Forcing–Axiome und die Feinanalyse von H_{ω_2}

Ralf Schindler

WWU Münster, Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung

Cantors Kontinuumshypothese

- Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen. Aber *wieviele* gibt es?
- Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to A$.
- Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.
- Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Cantors Kontinuumshypothese

- Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen. Aber *wieviele* gibt es?
- Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to A$.
- Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.
- Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Cantors Kontinuumshypothese

- Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen. Aber *wieviele* gibt es?
- Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to A$.
- Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.
- Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Cantors Kontinuumshypothese

- Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen. Aber *wieviele* gibt es?
- Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to A$.
- Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.
- Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Cantors Kontinuumshypothese

- Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen. Aber *wieviele* gibt es?
- Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to A$.
- Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.
- Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Cantors Kontinuumshypothese

- Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen. Aber *wieviele* gibt es?
- Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to A$.
- Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.
- Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

- Young (1906): Jede überabzählbare G_δ– oder F_σ–Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
- Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borel–Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
- Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

- Young (1906): Jede überabzählbare G_δ– oder F_σ–Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
- Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borel–Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
- Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

- Young (1906): Jede überabzählbare G_δ– oder F_σ–Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
- Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borel–Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
- Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

- Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ Borel–Mengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$–Mengen $A \subset \mathbb{R}$.
- Korollar: Wenn $A \subset \mathbb{R}$ koanalytisch ist, dann ist A entweder höchstens abzählbar oder hat $\aleph_1$ Elemente oder enthält eine perfekte Teilmenge.
- Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?
- Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir uns der Axiomatisierung der Mengenlehre zuwenden.

- Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ Borel–Mengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$–Mengen $A \subset \mathbb{R}$.
- Korollar: Wenn $A \subset \mathbb{R}$ koanalytisch ist, dann ist A entweder höchstens abzählbar oder hat $\aleph_1$ Elemente oder enthält eine perfekte Teilmenge.
- Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?
- Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir uns der Axiomatisierung der Mengenlehre zuwenden.

- Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ Borel–Mengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$–Mengen $A \subset \mathbb{R}$.
- Korollar: Wenn $A \subset \mathbb{R}$ koanalytisch ist, dann ist A entweder höchstens abzählbar oder hat $\aleph_1$ Elemente oder enthält eine perfekte Teilmenge.
- Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?
- Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir uns der Axiomatisierung der Mengenlehre zuwenden.

- Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ Borel–Mengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$–Mengen $A \subset \mathbb{R}$.
- Korollar: Wenn $A \subset \mathbb{R}$ koanalytisch ist, dann ist A entweder höchstens abzählbar oder hat $\aleph_1$ Elemente oder enthält eine perfekte Teilmenge.
- Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?
- Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir uns der Axiomatisierung der Mengenlehre zuwenden.

Das Axiomensystem ZFC (Zermelo–Fraenkel mit Auswahl)

- Je zwei Mengen mit gleichen Elementen sind gleich.
- Für alle x, y existieren $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$.
- Es gibt eine unendliche Menge.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y)$ existiert $\{y \in x \colon \varphi(y)\}$.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y, z)$ existiert ein u, so daß für alle $y \in x$: $\exists z\ \varphi(y, z) \Longrightarrow \exists z \in u\ \varphi(y, z)$.
- Für alle x mit $\emptyset \notin x$ existiert eine Auswahlfunktion.
- Es gibt keine unendlichen absteigenden $\in$–Ketten der Form $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$.

Das Axiomensystem ZFC (Zermelo–Fraenkel mit Auswahl)

- Je zwei Mengen mit gleichen Elementen sind gleich.
- Für alle x, y existieren $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$.
- Es gibt eine unendliche Menge.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y)$ existiert $\{y \in x \colon \varphi(y)\}$.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y, z)$ existiert ein u, so daß für alle $y \in x$: $\exists z \, \varphi(y, z) \Longrightarrow \exists z \in u \, \varphi(y, z)$.
- Für alle x mit $\emptyset \notin x$ existiert eine Auswahlfunktion.
- Es gibt keine unendlichen absteigenden $\in$–Ketten der Form $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$.

Das Axiomensystem ZFC (Zermelo–Fraenkel mit Auswahl)

- Je zwei Mengen mit gleichen Elementen sind gleich.
- Für alle x, y existieren $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$.
- Es gibt eine unendliche Menge.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y)$ existiert $\{y \in x \colon \varphi(y)\}$.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y, z)$ existiert ein u, so daß für alle $y \in x$: $\exists z\, \varphi(y, z) \Longrightarrow \exists z \in u\, \varphi(y, z)$.
- Für alle x mit $\emptyset \notin x$ existiert eine Auswahlfunktion.
- Es gibt keine unendlichen absteigenden $\in$–Ketten der Form $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$.

Das Axiomensystem ZFC (Zermelo–Fraenkel mit Auswahl)

- Je zwei Mengen mit gleichen Elementen sind gleich.
- Für alle x, y existieren $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$.
- Es gibt eine unendliche Menge.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y)$ existiert $\{y \in x : \varphi(y)\}$.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y, z)$ existiert ein u, so daß für alle $y \in x$: $\exists z\ \varphi(y, z) \Longrightarrow \exists z \in u\ \varphi(y, z)$.
- Für alle x mit $\emptyset \notin x$ existiert eine Auswahlfunktion.
- Es gibt keine unendlichen absteigenden $\in$–Ketten der Form $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$.

Das Axiomensystem ZFC (Zermelo–Fraenkel mit Auswahl)

- Je zwei Mengen mit gleichen Elementen sind gleich.
- Für alle x, y existieren $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$.
- Es gibt eine unendliche Menge.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y)$ existiert $\{y \in x \colon \varphi(y)\}$.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y, z)$ existiert ein u, so daß für alle $y \in x$: $\exists z \, \varphi(y, z) \Longrightarrow \exists z \in u \, \varphi(y, z)$.
- Für alle x mit $\emptyset \notin x$ existiert eine Auswahlfunktion.
- Es gibt keine unendlichen absteigenden $\in$–Ketten der Form $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$.

Das Axiomensystem ZFC (Zermelo–Fraenkel mit Auswahl)

- Je zwei Mengen mit gleichen Elementen sind gleich.
- Für alle x, y existieren $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$.
- Es gibt eine unendliche Menge.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y)$ existiert $\{y \in x \colon \varphi(y)\}$.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y, z)$ existiert ein u, so daß für alle $y \in x$: $\exists z\, \varphi(y, z) \Longrightarrow \exists z \in u\, \varphi(y, z)$.
- Für alle x mit $\emptyset \notin x$ existiert eine Auswahlfunktion.
- Es gibt keine unendlichen absteigenden $\in$–Ketten der Form $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$.

Das Axiomensystem ZFC (Zermelo–Fraenkel mit Auswahl)

- Je zwei Mengen mit gleichen Elementen sind gleich.
- Für alle x, y existieren $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$.
- Es gibt eine unendliche Menge.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y)$ existiert $\{y \in x \colon \varphi(y)\}$.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y, z)$ existiert ein u, so daß für alle $y \in x$: $\exists z\ \varphi(y, z) \Longrightarrow \exists z \in u\ \varphi(y, z)$.
- Für alle x mit $\emptyset \notin x$ existiert eine Auswahlfunktion.
- Es gibt keine unendlichen absteigenden $\in$–Ketten der Form $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$.

Das Axiomensystem ZFC (Zermelo–Fraenkel mit Auswahl)

- Je zwei Mengen mit gleichen Elementen sind gleich.
- Für alle x, y existieren $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$.
- Es gibt eine unendliche Menge.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y)$ existiert $\{y \in x \colon \varphi(y)\}$.
- Für alle x und alle Formeln $\varphi(y, z)$ existiert ein u, so daß für alle $y \in x$: $\exists z\ \varphi(y, z) \Longrightarrow \exists z \in u\ \varphi(y, z)$.
- Für alle x mit $\emptyset \notin x$ existiert eine Auswahlfunktion.
- Es gibt keine unendlichen absteigenden $\in$–Ketten der Form $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$.

Gödels Konstruktibles Universum

- Gödel definierte 1938 ein kanonisches Modell der Mengenlehre, in das nur diejenigen Mengen aufgenommen werden, welche aufgrund der Prinzipien von ZFC aufgenommen werden *müssen*.
- $L_0 = \emptyset$. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, die Menge aller definierbaren Teilmengen von L_α. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limiten λ.
- $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$.
- Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in L die Kontinuumshypothese CH.

Gödels Konstruktibles Universum

- Gödel definierte 1938 ein kanonisches Modell der Mengenlehre, in das nur diejenigen Mengen aufgenommen werden, welche aufgrund der Prinzipien von ZFC aufgenommen werden *müssen*.
- $L_0 = \emptyset$. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, die Menge aller definierbaren Teilmengen von L_α. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limiten λ.
- $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$.
- Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in L die Kontinuumshypothese CH.

Gödels Konstruktibles Universum

- Gödel definierte 1938 ein kanonisches Modell der Mengenlehre, in das nur diejenigen Mengen aufgenommen werden, welche aufgrund der Prinzipien von ZFC aufgenommen werden *müssen*.
- $L_0 = \emptyset$. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, die Menge aller definierbaren Teilmengen von L_α. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limiten λ.
- $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$.
- Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in L die Kontinuumshypothese CH.

Gödels Konstruktibles Universum

- Gödel definierte 1938 ein kanonisches Modell der Mengenlehre, in das nur diejenigen Mengen aufgenommen werden, welche aufgrund der Prinzipien von ZFC aufgenommen werden *müssen*.
- $L_0 = \emptyset$. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, die Menge aller definierbaren Teilmengen von L_α. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limiten λ.
- $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$.
- Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in L die Kontinuumshypothese CH.

Gödels Konstruktibles Universum

- Gödel definierte 1938 ein kanonisches Modell der Mengenlehre, in das nur diejenigen Mengen aufgenommen werden, welche aufgrund der Prinzipien von ZFC aufgenommen werden *müssen*.
- $L_0 = \emptyset$. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, die Menge aller definierbaren Teilmengen von L_α. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limiten λ.
- $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$.
- Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in L die Kontinuumshypothese CH.

Gödels Konstruktibles Universum

- Gödel definierte 1938 ein kanonisches Modell der Mengenlehre, in das nur diejenigen Mengen aufgenommen werden, welche aufgrund der Prinzipien von ZFC aufgenommen werden *müssen*.
- $L_0 = \emptyset$. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, die Menge aller definierbaren Teilmengen von L_α. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limiten λ.
- $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$.
- Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in L die Kontinuumshypothese CH.

Gödels Konstruktibles Universum

- Gödel definierte 1938 ein kanonisches Modell der Mengenlehre, in das nur diejenigen Mengen aufgenommen werden, welche aufgrund der Prinzipien von ZFC aufgenommen werden *müssen*.
- $L_0 = \emptyset$. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, die Menge aller definierbaren Teilmengen von L_α. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limiten λ.
- $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$.
- Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in L die Kontinuumshypothese CH.

Gödels Konstruktibles Universum

- Gödel definierte 1938 ein kanonisches Modell der Mengenlehre, in das nur diejenigen Mengen aufgenommen werden, welche aufgrund der Prinzipien von ZFC aufgenommen werden *müssen*.
- $L_0 = \emptyset$. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, die Menge aller definierbaren Teilmengen von L_α. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limiten λ.
- $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$.
- Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in L die Kontinuumshypothese CH.

Cohens Methode des *forcing*

- Cohen isolierte 1962 eine Methode, die es erlaubt, Modelle der Mengenlehre zu konstruieren, welche reicher sind als L.
- Sei M ein Modell der Mengenlehre. Sei $\mathbb{P} \in M$ eine partielle Ordnung. Zu jedem M–generischen Filter $G \subset \mathbb{P}$ läßt sich $M[G]$ konstruieren, das kleinste Modell N der Mengenlehre mit $M \cup \{G\} \subset N$.
- Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Cohens Methode des *forcing*

- Cohen isolierte 1962 eine Methode, die es erlaubt, Modelle der Mengenlehre zu konstruieren, welche reicher sind als L.
- Sei M ein Modell der Mengenlehre. Sei $\mathbb{P} \in M$ eine partielle Ordnung. Zu jedem M–generischen Filter $G \subset \mathbb{P}$ läßt sich $M[G]$ konstruieren, das kleinste Modell N der Mengenlehre mit $M \cup \{G\} \subset N$.
- Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Cohens Methode des *forcing*

- Cohen isolierte 1962 eine Methode, die es erlaubt, Modelle der Mengenlehre zu konstruieren, welche reicher sind als L.
- Sei M ein Modell der Mengenlehre. Sei $\mathbb{P} \in M$ eine partielle Ordnung. Zu jedem M–generischen Filter $G \subset \mathbb{P}$ läßt sich $M[G]$ konstruieren, das kleinste Modell N der Mengenlehre mit $M \cup \{G\} \subset N$.
- Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Cohens Methode des *forcing*

- Cohen isolierte 1962 eine Methode, die es erlaubt, Modelle der Mengenlehre zu konstruieren, welche reicher sind als L.
- Sei M ein Modell der Mengenlehre. Sei $\mathbb{P} \in M$ eine partielle Ordnung. Zu jedem M–generischen Filter $G \subset \mathbb{P}$ läßt sich $M[G]$ konstruieren, das kleinste Modell N der Mengenlehre mit $M \cup \{G\} \subset N$.
- Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Cohens Methode des *forcing*

- Cohen isolierte 1962 eine Methode, die es erlaubt, Modelle der Mengenlehre zu konstruieren, welche reicher sind als L.
- Sei M ein Modell der Mengenlehre. Sei $\mathbb{P} \in M$ eine partielle Ordnung. Zu jedem M–generischen Filter $G \subset \mathbb{P}$ läßt sich $M[G]$ konstruieren, das kleinste Modell N der Mengenlehre mit $M \cup \{G\} \subset N$.
- Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Cohens Methode des *forcing*

- Cohen isolierte 1962 eine Methode, die es erlaubt, Modelle der Mengenlehre zu konstruieren, welche reicher sind als L.
- Sei M ein Modell der Mengenlehre. Sei $\mathbb{P} \in M$ eine partielle Ordnung. Zu jedem M–generischen Filter $G \subset \mathbb{P}$ läßt sich $M[G]$ konstruieren, das kleinste Modell N der Mengenlehre mit $M \cup \{G\} \subset N$.
- Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

- Die Frage nach der Gültigkeit von CH ist immer noch eine der treibenden Kräfte der gegenwärtigen Mengenlehre.
- Die Suche nach natürlichen Axiomen, welche ZFC erweitern und CH beantworten, hat zu (technisch) interessanten Problemklassen der modernen Mengenlehre geführt.
- Die heutigen Ansätze bauen zumeist entweder auf Gödels konstruktiblen Methoden oder auf Cohens Methode des *forcing* auf.

- Die Frage nach der Gültigkeit von CH ist immer noch eine der treibenden Kräfte der gegenwärtigen Mengenlehre.
- Die Suche nach natürlichen Axiomen, welche ZFC erweitern und CH beantworten, hat zu (technisch) interessanten Problemklassen der modernen Mengenlehre geführt.
- Die heutigen Ansätze bauen zumeist entweder auf Gödels konstruktiblen Methoden oder auf Cohens Methode des *forcing* auf.

- Die Frage nach der Gültigkeit von CH ist immer noch eine der treibenden Kräfte der gegenwärtigen Mengenlehre.
- Die Suche nach natürlichen Axiomen, welche ZFC erweitern und CH beantworten, hat zu (technisch) interessanten Problemklassen der modernen Mengenlehre geführt.
- Die heutigen Ansätze bauen zumeist entweder auf Gödels konstruktiblen Methoden oder auf Cohens Methode des *forcing* auf.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

Moderne konstruktible Ansätze

- Gödels L glaubt, daß jedes (innere) Modell W der Mengenlehre *starr* ist, d.h. die einzige elementare Einbettung von W nach W ist die Identität.
- Die heutige Mengenlehre betrachtet kanonische konstruktible Modelle, die unter Phönomenen der Nicht–Starrheit möglichst saturiert sind:
- Sei E eine sorgfältig gewählte Folge von Extendern. $K_0 = \emptyset$. $K_{\alpha+1} = Def(K_\alpha; E)$, die Menge aller mit Hilfe des Parameters E definierbaren Teilmengen von K_α. $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ für Limiten λ.
- $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$.
- Derartige Modelle heißen *Extender*– oder *Kernmodelle*. Sie können sehr große Kardinalzahlen besitzen.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

- Kernmodelle wurden u.a. konstruiert von:
- Dodd-Jensen 1981 (für eine meßbare Kardinalzahl). Mitchell 1984 (für Maße). Jensen 1990 (für eine starke Kardinalzahl). Schindler 2002 (für fast lineare Iterationen). Jensen–Steel 2007 (für eine Woodin–Zahl). Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel 2009 (für domestizierte Mäuse).
- In K gilt, daß es eine Σ^2_1–Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt aber in K die Kontinuumshypothese CH.

Moderne *forcing*–Ansätze

- Martins Axiom (MA): Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, welcher die *ccc* erfüllt. Der Durchschnitt von weniger als $\mathbb{R}$ vielen offenen dichten Mengen ist dicht.
- Äquivalent: Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche die *ccc* erfüllt. Sei $\{D_i : i \in I\}$ eine Familie von weniger als $\mathbb{R}$ vielen Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.
- MA hat unzählige Anwendungen in der Topologie, der Algebra und der Mengenlehre.

Moderne *forcing*–Ansätze

- Martins Axiom (MA): Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, welcher die *ccc* erfüllt. Der Durchschnitt von weniger als $\mathbb{R}$ vielen offenen dichten Mengen ist dicht.
- Äquivalent: Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche die *ccc* erfüllt. Sei $\{D_i : i \in I\}$ eine Familie von weniger als $\mathbb{R}$ vielen Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.
- MA hat unzählige Anwendungen in der Topologie, der Algebra und der Mengenlehre.

Moderne *forcing*–Ansätze

- Martins Axiom (MA): Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, welcher die *ccc* erfüllt. Der Durchschnitt von weniger als $\mathbb{R}$ vielen offenen dichten Mengen ist dicht.
- Äquivalent: Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche die *ccc* erfüllt. Sei $\{D_i \colon i \in I\}$ eine Familie von weniger als $\mathbb{R}$ vielen Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.
- MA hat unzählige Anwendungen in der Topologie, der Algebra und der Mengenlehre.

Moderne *forcing*–Ansätze

- Martins Axiom (MA): Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, welcher die *ccc* erfüllt. Der Durchschnitt von weniger als $\mathbb{R}$ vielen offenen dichten Mengen ist dicht.
- Äquivalent: Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche die *ccc* erfüllt. Sei $\{D_i \colon i \in I\}$ eine Familie von weniger als $\mathbb{R}$ vielen Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.
- MA hat unzählige Anwendungen in der Topologie, der Algebra und der Mengenlehre.

- *forcing*–Axiome sind Verallgemeinerungen von MA.
- Während Kernmodelle unter Nicht–Starrkeits–Phänomenen saturiert sein können, drücken *forcing*–Axiome zusätzlich aus, daß das mengentheoretische Universum so gut wie möglich bzgl. *forcing*–Erweiterungen saturiert ist.
- Proper *forcing*–Axiom (PFA): Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche proper ist. Sei $\{D_i : i \in \omega_1\}$ eine Familie von Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.
- Martins Maximum (MM): Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt. Sei $\{D_i : i \in \omega_1\}$ eine Familie von Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.

- *forcing*–Axiome sind Verallgemeinerungen von MA.
- Während Kernmodelle unter Nicht–Starrkeits–Phänomenen saturiert sein können, drücken *forcing*–Axiome zusätzlich aus, daß das mengentheoretische Universum so gut wie möglich bzgl. *forcing*–Erweiterungen saturiert ist.
- Proper *forcing*–Axiom (PFA): Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche proper ist. Sei $\{D_i : i \in \omega_1\}$ eine Familie von Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.
- Martins Maximum (MM): Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt. Sei $\{D_i : i \in \omega_1\}$ eine Familie von Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.

- *forcing*–Axiome sind Verallgemeinerungen von MA.
- Während Kernmodelle unter Nicht–Starrkeits–Phänomenen saturiert sein können, drücken *forcing*–Axiome zusätzlich aus, daß das mengentheoretische Universum so gut wie möglich bzgl. *forcing*–Erweiterungen saturiert ist.
- Proper *forcing*–Axiom (PFA): Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche proper ist. Sei $\{D_i : i \in \omega_1\}$ eine Familie von Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.
- Martins Maximum (MM): Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt. Sei $\{D_i : i \in \omega_1\}$ eine Familie von Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.

- *forcing*–Axiome sind Verallgemeinerungen von MA.
- Während Kernmodelle unter Nicht–Starrkeits–Phänomenen saturiert sein können, drücken *forcing*–Axiome zusätzlich aus, daß das mengentheoretische Universum so gut wie möglich bzgl. *forcing*–Erweiterungen saturiert ist.
- Proper *forcing*–Axiom (PFA): Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche proper ist. Sei $\{D_i \colon i \in \omega_1\}$ eine Familie von Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.
- Martins Maximum (MM): Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, welche stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt. Sei $\{D_i \colon i \in \omega_1\}$ eine Familie von Mengen, welche alle dicht in $\mathbb{P}$ sind. Dann gibt es einen Filter G, der alle D_i schneidet.

forcing–Axiome und CH

- Todorcevic–Velickovic (1992): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- CH wird in der Struktur H_{ω_2} entschieden. H_{ω_2} = die Familie aller Mengen, die (erblich) höchstens die Größe $\aleph_1$ haben.
- CH $\Longleftrightarrow$ In H_{ω_2} gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \aleph_1$. Letztere Aussage ist Σ_2 über H_{ω_2}. $\neg$ *CH* ist also Π_2 über H_{ω_2}.

forcing–Axiome und CH

- Todorcevic–Velickovic (1992): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- CH wird in der Struktur H_{ω_2} entschieden. H_{ω_2} = die Familie aller Mengen, die (erblich) höchstens die Größe $\aleph_1$ haben.
- CH $\Longleftrightarrow$ In H_{ω_2} gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \aleph_1$. Letztere Aussage ist Σ_2 über H_{ω_2}. $\neg$ *CH* ist also Π_2 über H_{ω_2}.

forcing–Axiome und CH

- Todorcevic–Velickovic (1992): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- CH wird in der Struktur H_{ω_2} entschieden. H_{ω_2} = die Familie aller Mengen, die (erblich) höchstens die Größe $\aleph_1$ haben.
- CH $\Longleftrightarrow$ In H_{ω_2} gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \aleph_1$. Letztere Aussage ist Σ_2 über H_{ω_2}. $\neg$ *CH* ist also Π_2 über H_{ω_2}.

forcing–Axiome und CH

- Todorcevic–Velickovic (1992): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- CH wird in der Struktur H_{ω_2} entschieden. H_{ω_2} = die Familie aller Mengen, die (erblich) höchstens die Größe $\aleph_1$ haben.
- CH $\Longleftrightarrow$ In H_{ω_2} gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \aleph_1$. Letztere Aussage ist Σ_2 über H_{ω_2}. $\neg$ *CH* ist also Π_2 über H_{ω_2}.

forcing–Axiome und CH

- Todorcevic–Velickovic (1992): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- CH wird in der Struktur H_{ω_2} entschieden. H_{ω_2} = die Familie aller Mengen, die (erblich) höchstens die Größe $\aleph_1$ haben.
- CH $\Longleftrightarrow$ In H_{ω_2} gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \aleph_1$. Letztere Aussage ist Σ_2 über H_{ω_2}. $\neg$ *CH* ist also Π_2 über H_{ω_2}.

forcing–Axiome und CH

- Todorcevic–Velickovic (1992): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- CH wird in der Struktur H_{ω_2} entschieden. H_{ω_2} = die Familie aller Mengen, die (erblich) höchstens die Größe $\aleph_1$ haben.
- CH $\Longleftrightarrow$ In H_{ω_2} gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \aleph_1$. Letztere Aussage ist Σ_2 über H_{ω_2}. $\neg$ *CH* ist also Π_2 über H_{ω_2}.

forcing–Axiome und CH

- Todorcevic–Velickovic (1992): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- CH wird in der Struktur H_{ω_2} entschieden. H_{ω_2} = die Familie aller Mengen, die (erblich) höchstens die Größe $\aleph_1$ haben.
- CH $\Longleftrightarrow$ In H_{ω_2} gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \rightarrow \aleph_1$. Letztere Aussage ist Σ_2 über H_{ω_2}. $\neg$ *CH* ist also Π_2 über H_{ω_2}.

Beschränkte *forcing*–Axiome

- Bagaria (2001): PFA $\Longrightarrow$ das Beschränkte Proper *forcing*–Axiom (BPFA): Sei φ eine Σ_1–Formel mit Parametern aus H_{ω_2}, welche in einer *forcing*–Erweiterung gilt, die mittels eines proper *forcings* gewonnen wurde. Dann gilt φ.
- Bagaria (2001): MM $\Longrightarrow$ das Beschränkte Martins Maximum (BMM): Sei φ eine Σ_1–Formel mit Parametern aus H_{ω_2}, welche in einer *forcing*–Erweiterung gilt, die mittels eines *forcings* gewonnen wurde, welches stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt. Dann gilt φ.

Beschränkte *forcing*–Axiome

- Bagaria (2001): PFA $\Longrightarrow$ das Beschränkte Proper *forcing*–Axiom (BPFA): Sei φ eine Σ_1–Formel mit Parametern aus H_{ω_2}, welche in einer *forcing*–Erweiterung gilt, die mittels eines proper *forcings* gewonnen wurde. Dann gilt φ.
- Bagaria (2001): MM $\Longrightarrow$ das Beschränkte Martins Maximum (BMM): Sei φ eine Σ_1–Formel mit Parametern aus H_{ω_2}, welche in einer *forcing*–Erweiterung gilt, die mittels eines *forcings* gewonnen wurde, welches stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt. Dann gilt φ.

Beschränkte *forcing*–Axiome

- Bagaria (2001): PFA $\Longrightarrow$ das Beschränkte Proper *forcing*–Axiom (BPFA): Sei φ eine Σ_1–Formel mit Parametern aus H_{ω_2}, welche in einer *forcing*–Erweiterung gilt, die mittels eines proper *forcings* gewonnen wurde. Dann gilt φ.
- Bagaria (2001): MM $\Longrightarrow$ das Beschränkte Martins Maximum (BMM): Sei φ eine Σ_1–Formel mit Parametern aus H_{ω_2}, welche in einer *forcing*–Erweiterung gilt, die mittels eines *forcings* gewonnen wurde, welches stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt. Dann gilt φ.

Beschränkte *forcing*–Axiome und CH

- Todorcevic (2002): BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- Caicedo–Velickovic (2006) BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ der Länge $\aleph_2$, welche Δ_1 über H_{ω_2} ist.
- Woodin (1992): MM $\Longrightarrow$ $\delta^1_2 = \aleph_2$.
- "$\delta^1_2 = \aleph_2$", eine "einfach definierbare Verletzung" von CH, läßt sich als Aussage schreiben, welche ebenfalls Π_2 über H_{ω_2} ist.

Beschränkte *forcing*–Axiome und CH

- Todorcevic (2002): BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- Caicedo–Velickovic (2006) BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ der Länge $\aleph_2$, welche Δ_1 über H_{ω_2} ist.
- Woodin (1992): MM $\Longrightarrow$ $\delta^1_2 = \aleph_2$.
- "$\delta^1_2 = \aleph_2$", eine "einfach definierbare Verletzung" von CH, läßt sich als Aussage schreiben, welche ebenfalls Π_2 über H_{ω_2} ist.

Beschränkte *forcing*–Axiome und CH

- Todorcevic (2002): BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- Caicedo–Velickovic (2006) BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ der Länge $\aleph_2$, welche Δ_1 über H_{ω_2} ist.
- Woodin (1992): MM $\Longrightarrow$ $\delta^1_2 = \aleph_2$.
- "$\delta^1_2 = \aleph_2$", eine "einfach definierbare Verletzung" von CH, läßt sich als Aussage schreiben, welche ebenfalls Π_2 über H_{ω_2} ist.

Beschränkte *forcing*–Axiome und CH

- Todorcevic (2002): BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- Caicedo–Velickovic (2006) BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ der Länge $\aleph_2$, welche Δ_1 über H_{ω_2} ist.
- Woodin (1992): MM $\Longrightarrow$ $\delta^1_2 = \aleph_2$.
- "$\delta^1_2 = \aleph_2$", eine "einfach definierbare Verletzung" von CH, läßt sich als Aussage schreiben, welche ebenfalls Π_2 über H_{ω_2} ist.

Beschränkte *forcing*–Axiome und CH

- Todorcevic (2002): BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen.
- Caicedo–Velickovic (2006) BPFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ der Länge $\aleph_2$, welche Δ_1 über H_{ω_2} ist.
- Woodin (1992): MM $\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$.
- "$\delta^1_2 = \aleph_2$", eine "einfach definierbare Verletzung" von CH, läßt sich als Aussage schreiben, welche ebenfalls Π_2 über H_{ω_2} ist.

forcing–Axiome und große Kardinalzahlen

- Schindler (2006): BMM $\Longrightarrow$ Es gibt ein (inneres) Modell mit einer starken Kardinalzahl.
- Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel (2009): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine nicht–domestizierte Maus.
- Sargsyan (2010): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt ein Modell von $AD_{\mathbb{R}}$ plus Θ ist regulär.

forcing–Axiome und große Kardinalzahlen

- Schindler (2006): BMM $\Longrightarrow$ Es gibt ein (inneres) Modell mit einer starken Kardinalzahl.
- Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel (2009): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine nicht–domestizierte Maus.
- Sargsyan (2010): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt ein Modell von $AD_{\mathbb{R}}$ plus Θ ist regulär.

forcing–Axiome und große Kardinalzahlen

- Schindler (2006): BMM $\Longrightarrow$ Es gibt ein (inneres) Modell mit einer starken Kardinalzahl.
- Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel (2009): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine nicht–domestizierte Maus.
- Sargsyan (2010): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt ein Modell von $AD_{\mathbb{R}}$ plus Θ ist regulär.

forcing–Axiome und große Kardinalzahlen

- Schindler (2006): BMM $\Longrightarrow$ Es gibt ein (inneres) Modell mit einer starken Kardinalzahl.
- Jensen–Schimmerling–Schindler–Steel (2009): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt eine nicht–domestizierte Maus.
- Sargsyan (2010): PFA $\Longrightarrow$ Es gibt ein Modell von $AD_{\mathbb{R}}$ plus Θ ist regulär.

- Woodin's Resultat, wonach MM $\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$, läßt sich wie folgt faktorisieren:
- Foreman–Magidor–Shelah (1989): MM $\Longrightarrow$ NS_{ω_1} ist abschüssig.
- Bagaria (2001), s.o.: MM $\Longrightarrow$ BMM.
- Claverie–Schindler (2009): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ $\delta^1_2 = \aleph_2$.

- Woodin's Resultat, wonach MM $\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$, läßt sich wie folgt faktorisieren:
- Foreman–Magidor–Shelah (1989): MM $\Longrightarrow$ NS_{ω_1} ist abschüssig.
- Bagaria (2001), s.o.: MM $\Longrightarrow$ BMM.
- Claverie–Schindler (2009): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$.

- Woodin's Resultat, wonach MM $\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$, läßt sich wie folgt faktorisieren:
- Foreman–Magidor–Shelah (1989): MM $\Longrightarrow$ NS_{ω_1} ist abschüssig.
- Bagaria (2001), s.o.: MM $\Longrightarrow$ BMM.
- Claverie–Schindler (2009): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ $\delta^1_2 = \aleph_2$.

- Woodin's Resultat, wonach MM $\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$, läßt sich wie folgt faktorisieren:
- Foreman–Magidor–Shelah (1989): MM $\Longrightarrow$ NS_{ω_1} ist abschüssig.
- Bagaria (2001), s.o.: MM $\Longrightarrow$ BMM.
- Claverie–Schindler (2009): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ $\delta^1_2 = \aleph_2$.

Die Feinanalyse von H_{ω_2}

- BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig impliziert nicht nur $\delta^1_2 = \aleph_2$ (und damit $\neg$ CH) sondern scheint bzgl. "natürlicher" Aussagen, welche Π_2 über H_{ω_2} sind, vollständig zu sein.
- Die Beweise verwenden alle eine Variante eines *forcings* von Jensen, das "L–*forcing*". Die von uns ausgearbeitete Variante fügt mittels eines *forcings*, welches stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt, abzählbare generisch iterierbare Strukturen mit einem abschüssigen Ideal auf ω_1 hinzu, welche zu H_{ω_2} generisch iterieren.

Die Feinanalyse von H_{ω_2}

- BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig impliziert nicht nur $\delta^1_2 = \aleph_2$ (und damit $\neg$ CH) sondern scheint bzgl. “natürlicher” Aussagen, welche Π_2 über H_{ω_2} sind, vollständig zu sein.
- Die Beweise verwenden alle eine Variante eines *forcings* von Jensen, das “L–*forcing*”. Die von uns ausgearbeitete Variante fügt mittels eines *forcings*, welches stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt, abzählbare generisch iterierbare Strukturen mit einem abschüssigen Ideal auf ω_1 hinzu, welche zu H_{ω_2} generisch iterieren.

Die Feinanalyse von H_{ω_2}

- BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig impliziert nicht nur $\delta^1_2 = \aleph_2$ (und damit $\neg$ CH) sondern scheint bzgl. "natürlicher" Aussagen, welche Π_2 über H_{ω_2} sind, vollständig zu sein.
- Die Beweise verwenden alle eine Variante eines *forcings* von Jensen, das "L–*forcing*". Die von uns ausgearbeitete Variante fügt mittels eines *forcings*, welches stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt, abzählbare generisch iterierbare Strukturen mit einem abschüssigen Ideal auf ω_1 hinzu, welche zu H_{ω_2} generisch iterieren.

Die Feinanalyse von H_{ω_2}

- BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig impliziert nicht nur $\delta^1_2 = \aleph_2$ (und damit $\neg$ CH) sondern scheint bzgl. "natürlicher" Aussagen, welche Π_2 über H_{ω_2} sind, vollständig zu sein.
- Die Beweise verwenden alle eine Variante eines *forcings* von Jensen, das "L–*forcing*". Die von uns ausgearbeitete Variante fügt mittels eines *forcings*, welches stationäre Teilmengen von ω_1 bewahrt, abzählbare generisch iterierbare Strukturen mit einem abschüssigen Ideal auf ω_1 hinzu, welche zu H_{ω_2} generisch iterieren.

- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ acg ("admissible club guessing") ($\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$).
- Woodin (1999): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \psi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).
- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \phi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).

- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ acg ("admissible club guessing") ($\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$).
- Woodin (1999): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \psi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).
- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \phi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).

- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ acg ("admissible club guessing") ($\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$).
- Woodin (1999): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \psi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).
- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \phi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).

- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ acg ("admissible club guessing") ($\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$).
- Woodin (1999): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \psi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).
- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \phi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).

- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ acg ("admissible club guessing") ($\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$).
- Woodin (1999): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \psi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).
- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \phi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).

- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow$ acg ("admissible club guessing") ($\Longrightarrow \delta^1_2 = \aleph_2$).
- Woodin (1999): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \psi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).
- Doebler–Schindler (2010): BMM plus NS_{ω_1} ist abschüssig $\Longrightarrow \phi_{AC}$ ($\Longrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$).

Offene Fragen

- Liefert PFA die Existenz eines (inneren) Modells mit einer superkompakten Kardinalzahl?
- Liefert BMM die Existenz eines (inneren) Modells mit einer Woodin-Zahl? (Die Antwort ist "ja" unter Hinzunahme der Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1 nach Claverie–Schindler (2010).) Wie sieht das "natürliche" Modell von BMM aus?
- Impliziert BMM die Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1?
- Gilt CH? Wieviele reelle Zahlen gibt es?

Offene Fragen

- Liefert PFA die Existenz eines (inneren) Modells mit einer superkompakten Kardinalzahl?
- Liefert BMM die Existenz eines (inneren) Modells mit einer Woodin-Zahl? (Die Antwort ist "ja" unter Hinzunahme der Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1 nach Claverie–Schindler (2010).) Wie sieht das "natürliche" Modell von BMM aus?
- Impliziert BMM die Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1?
- Gilt CH? Wieviele reelle Zahlen gibt es?

Offene Fragen

- Liefert PFA die Existenz eines (inneren) Modells mit einer superkompakten Kardinalzahl?
- Liefert BMM die Existenz eines (inneren) Modells mit einer Woodin-Zahl? (Die Antwort ist “ja” unter Hinzunahme der Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1 nach Claverie–Schindler (2010).) Wie sieht das “natürliche” Modell von BMM aus?
- Impliziert BMM die Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1?
- Gilt CH? Wieviele reelle Zahlen gibt es?

Offene Fragen

- Liefert PFA die Existenz eines (inneren) Modells mit einer superkompakten Kardinalzahl?
- Liefert BMM die Existenz eines (inneren) Modells mit einer Woodin-Zahl? (Die Antwort ist “ja” unter Hinzunahme der Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1 nach Claverie–Schindler (2010).) Wie sieht das “natürliche” Modell von BMM aus?
- Impliziert BMM die Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1?
- Gilt CH? Wieviele reelle Zahlen gibt es?

Offene Fragen

- Liefert PFA die Existenz eines (inneren) Modells mit einer superkompakten Kardinalzahl?
- Liefert BMM die Existenz eines (inneren) Modells mit einer Woodin-Zahl? (Die Antwort ist "ja" unter Hinzunahme der Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1 nach Claverie–Schindler (2010).) Wie sieht das "natürliche" Modell von BMM aus?
- Impliziert BMM die Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1?
- Gilt CH? Wieviele reelle Zahlen gibt es?

Offene Fragen

- Liefert PFA die Existenz eines (inneren) Modells mit einer superkompakten Kardinalzahl?
- Liefert BMM die Existenz eines (inneren) Modells mit einer Woodin-Zahl? (Die Antwort ist "ja" unter Hinzunahme der Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1 nach Claverie–Schindler (2010).) Wie sieht das "natürliche" Modell von BMM aus?
- Impliziert BMM die Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1?
- Gilt CH? Wieviele reelle Zahlen gibt es?

Offene Fragen

- Liefert PFA die Existenz eines (inneren) Modells mit einer superkompakten Kardinalzahl?
- Liefert BMM die Existenz eines (inneren) Modells mit einer Woodin-Zahl? (Die Antwort ist "ja" unter Hinzunahme der Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1 nach Claverie–Schindler (2010).) Wie sieht das "natürliche" Modell von BMM aus?
- Impliziert BMM die Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1?
- Gilt CH? Wieviele reelle Zahlen gibt es?

Offene Fragen

- Liefert PFA die Existenz eines (inneren) Modells mit einer superkompakten Kardinalzahl?
- Liefert BMM die Existenz eines (inneren) Modells mit einer Woodin-Zahl? (Die Antwort ist "ja" unter Hinzunahme der Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1 nach Claverie–Schindler (2010).) Wie sieht das "natürliche" Modell von BMM aus?
- Impliziert BMM die Existenz eines abschüssigen Ideals auf ω_1?
- Gilt CH? Wieviele reelle Zahlen gibt es?