Čech-Stone Kompaktifizierung

16. <u>Def.</u>: Ein T_1-Raum X heißt <u>Tychonoff Raum</u> oder <u>vollständig regulär</u> oder $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn gilt:
Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ und jedes $p \in X - A$ gibt es $\varphi: X \longrightarrow [0,1]$ stetig mit $\varphi|A = 1$ und $\varphi(p) = 0$ (also eine $(\{p\}, A)$-Urysohn-Funktion)

<u>Bem.</u>: (i) $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$

(ii) Ist X $T_{3\frac{1}{2}}$ Raum, $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum
($A \subseteq Y$ abgeschl, $p \in Y \setminus A$. Dann gilt $p \in X \setminus \underbrace{\overline{A}}_{\text{Abschluss in } X}$,
da $\overline{A} \cap Y = A$)

Insbesondere sind Teilräume von kompakten Räumen stets vollständig regulär (da kompakt $\Rightarrow T_4$ nach § 2.15, Korollar A).

<u>Bsp</u>: Kompaktifizierungen von $(0,1)$

(i) 1-Punkt Kompaktifizierung:

$(0,1) \cong_{\text{homö.}} S^1 \setminus \{(1,0)\} \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

$\iota: x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi x \\ \sin 2\pi x \end{pmatrix}$

<u>Bem</u>: $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ kann zu $F : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ erweitert werden, d.h. $f = F \circ r$, falls

$$f_0 := \lim_{x \to 0^-} f(x), \quad f_1 := \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

existieren und $f_0 = f_1$

(ii) $(0,1) \subseteq [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

<u>Bem</u>: Erweiterung von f existiert, wenn lediglich f_0, f_1 existieren.

<u>Aufgabe</u>: Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, finde βX kompakt mit $r_X : X \hookrightarrow \beta X$ Homöm. auf $r_X(X)$ und $\overline{r_X(X)} = \beta X$, sodass jede beschränkte, stetige Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $\beta f : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ erweitert werden kann, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, dashed, "\beta f"] \\
\mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

17. <u>Konstruktion</u>. Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum. Setze

$$S := C(X,[0,1]) = \{\varphi : X \longrightarrow [0,1] \mid \varphi \text{ stetig}\}.$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \iota_X : X &\longrightarrow [0,1]^S \\ p &\longmapsto (\varphi(p))_{\varphi\in S} \end{aligned}$$

<u>Lemma</u>. ι_X ist stetig, injektiv und $\iota_X : X \longrightarrow \iota_X(X)$ ist ein Homöomorphismus

<u>Beweis</u>. Für jedes $\varphi \in S$ ist $(pr_\varphi \circ \iota_X)(p) = \varphi(p)$ stetig, also ist ι_X stetig.

Da X $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, gibt es zu $p \neq q$ ein $\varphi\in S$ mit $\varphi(p) \neq \varphi(q)$. Insb. ist $\iota_X(p) \neq \iota_X(q)$, also ι_X inj.

Sei nun $A \subseteq X$ abgeschlossen.

<u>Beh.</u>: $\overline{\iota_X(A)} \cap \iota_X(X) = \iota_X(A)$, d.h. $\iota_X(A) \subseteq \iota_X(X)$ abgeschlossen ($\Rightarrow$ Homöomorphismus aufs Bild).

Sei $p \in X \setminus A$. Dann gibt es $\varphi \in S$ mit $\varphi(p) = 1$, $\varphi(A) \subseteq \{0\}$, da X $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

Es folgt:

$$\begin{aligned} & pr_\varphi(\iota_X(A)) \subseteq \{0\} \\ \Rightarrow\ & pr_\varphi(\overline{\iota_X(A)}) \subseteq \{0\} \\ \Rightarrow\ & \iota_X(p) \notin \overline{\iota_X(A)} \\ \Rightarrow\ & \iota_X(X\setminus A) \cap \overline{\iota_X(A)} = \emptyset. \end{aligned}$$

$\square$

Kor: Ein top. Raum X ist genau dann ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn X homöomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raumes ist.

Bew.: Nach Tychonoff ist $[0,1]^S$ kompakt, und X homöomorph zu Teilraum von $[0,1]^S$. □

18. **Def**: Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, $S = C(X,[0,1])$, $\iota_X : X \longrightarrow [0,1]^S$, $p \longmapsto (\varphi(p))_{\varphi\in S}$. Setze

$$\beta X := \overline{\iota_X(X)} \subseteq [0,1]^S.$$

Dann heißt $\iota_X : X \longrightarrow \beta X$ die <u>Čech-Stone Kompaktifizierung von X</u>.

(βX ist kompakt, da abgeschlossen im kompakten Raum $[0,1]^S$.)

Korollar A. Ist K kompakt, so ist $\iota_K : K \longrightarrow \beta K$ ein Homöomorphismus (da $\iota_K(K)$ kompakt, also abgeschlossen, folgt $\iota_K(K) = \overline{\iota_K(K)} = \beta K$).

Bem.: Für $X = \mathbb{N}$ (mit der diskreten Topologie) gilt:

$$\#\underbrace{\beta\mathbb{N}}_{\widehat{=}\text{ Menge aller Ultrafilter auf } \mathbb{N}} = 2^c = 2^{2^{\aleph_0}} = |\mathfrak{P}(\mathbb{R})|$$

Satz. (Der Čech-Stone Funktor β) Sei $f: X \longrightarrow Y$ stetig, X, Y $T_{3\frac{1}{2}}$-Räume. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung

$$\beta f : \beta X \longrightarrow \beta Y,$$

sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ Y \arrow[r, "\iota_Y"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bem.: Ist insb. Y kompakt, so erhalten wir

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, dotted] \\ Y & \end{tikzcd}$$

eindeutige stetige Erweiterung $\beta(f)$ von f auf βX.

Beweis. (i) Eindeutigkeit: Es gebe auch $h: \beta X \to \beta Y$ mit $h \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$. Da $A := \{ q \in \beta X \mid h(q) = \beta f(q) \}$ abgeschlossen ($X \setminus A = \{ q \in \beta X \mid h(q) \neq \beta f(q) \}$ ist offen!), folgt aus $\iota_X(X) \subseteq A$:

$$\beta X = \overline{\iota_X(X)} \subseteq A, \text{ also ist } h = \beta X.$$

(II) Existenz: Seien $S = C(X,[0,1])$, $T = C(Y,[0,1])$.
Für $\psi \in T$ ist dann $\psi \circ f \in S$. Betrachte die stetige Abbildung

$$\alpha : [0,1]^S \longrightarrow [0,1]^T$$
$$(t_\varphi)_{\varphi \in S} \longmapsto \left(pr_{\psi\circ f}\,(t_\varphi)\right)_{\psi \in T} = (t_{\psi\circ f})_{\psi\in T}$$

Einschränken auf $\beta X \subseteq [0,1]^S$ ergibt:

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, mapsto, "\iota_X"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & (\varphi(p))_{\varphi\in S} \arrow[d, mapsto, "\alpha"] \\
f(p) \arrow[r, mapsto, "\iota_Y"] & (\psi(f(p)))_{\psi\in T}
\end{tikzcd}$$

, also erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\alpha\big|_{\beta X}^{\beta Y} =: \beta f"] \\
Y \arrow[r, "\iota_X"] & \beta Y
\end{tikzcd}$$

$\square$

<u>Korollar B</u> (Die universelle Eigenschaft der Čech-Stone Kompaktifizierung).

Sei X ein Tychonov-Raum, K kompakt, $f : X \to K$ stetig. Dann gibt es genau einen stetigen

Homöomorphismus

$$\beta(f) : \beta X \longrightarrow K \quad \text{mit} \quad \beta(f) \circ \iota_X = f ,$$

d.h.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, "\exists!\, \beta(f)"] \\
K &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d] & \beta X \arrow[d, "\beta f \quad \exists!"] \arrow[dl, dotted, "\beta(f)"'] \\
K \arrow[r, "\iota_K", "\text{Homöom.}"'] & \beta K
\end{tikzcd}$$

$\square$

Bem: Man unterscheidet nicht zwischen $\beta(f)$ und βf.