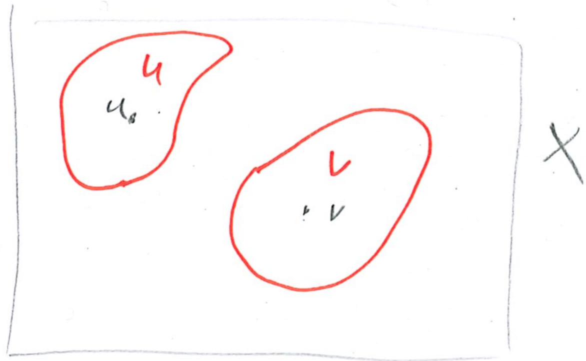
# §2 Trennungsaxiome und Kompaktheit

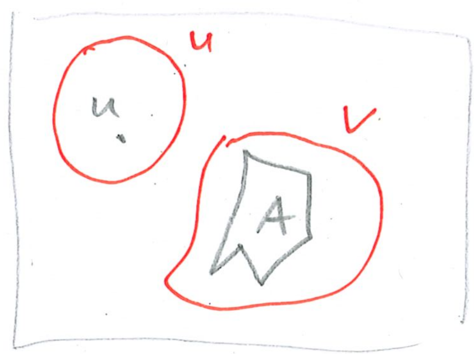
1. <u>Def</u> Sei $X$ ein top. Raum.

($T_1$) Wir nennen $X$ ein <u>$T_1$-Raum</u>, wenn für jedes $u \in X$ die Menge $\{u\} \subseteq X$ abg. ist.

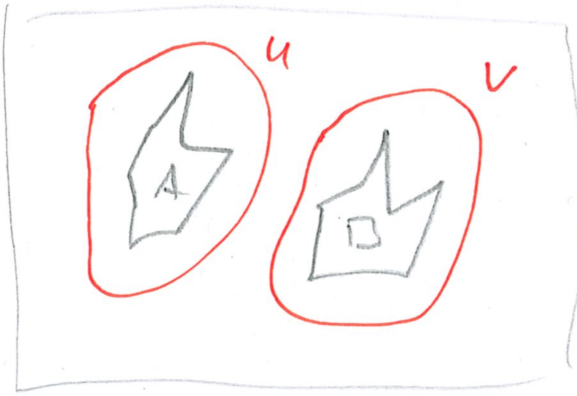
($T_2$) Wir nennen $X$ ein <u>$T_2$-Raum</u> oder Hausdorff-Raum, wenn es für alle $u, v \in X$ mit $u \neq v$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $u \in U$, $v \in V$ und $U \cap V = \emptyset$




($T_3$) Wir nennen $X$ ein <u>$T_3$-Raum</u> oder <u>regulär</u>, wenn $X$ ein $T_1$-Raum ist und wenn es für jedes $u \in X$, $A \subseteq X$ abg mit $u \notin A$ offene Mengen $U, V$ gibt mit $u \in U$, $A \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$



($T_4$) Wir nennen $X$ ein <u>$T_4$-Raum</u> oder <u>normal</u>, wenn $X$ ein $T_1$-Raum ist und wenn es für alle $A, B \subseteq X$ abg. mit $A \cap B = \emptyset$ stets $U, V \subseteq X$ offen gibt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.




<u>Klar</u>:
$$\begin{array}{ccccc} T_4 & \Rightarrow & T_3 & \Rightarrow & T_2 \\ & & \Downarrow & & \\ & & T_1 & & \end{array}$$

<u>Lemma</u> Es gilt $T_2 \Rightarrow T_1$, also $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

<u>Beweis</u> Sei $u \in X$. Zu jedem $v \in X$, $v \neq u$ gibt es $W_v \subseteq X$ offen mit $u \notin W_v$, $v \in W_v$. Damit ist
$$X - \{u\} = \bigcup_{v \neq u} W_v \text{ offen.}$$
$\square$

<u>Achtung</u>: manche Autoren definieren "normal" und "regulär" anders (ohne $T_1$).

<u>Beispiel</u> (a) Die Klumpentopologie auf $X = \mathbb{N}$ ist <u>nicht</u> $T_1$.

(b) Die koendliche Topologie auf $X = \mathbb{N}$ ist $T_1$, aber nicht $T_2$.

Denn: Für $U, V \subseteq \mathbb{N}$, $U, V$ offen in koendlich Topologie, $U, V \neq \emptyset$ gilt $U \cap V \neq \emptyset$.

2. Satz Jeder metrische Raum ist normal (also insbesondere regulär und Hausdorffsch).

Beweis Sei $(X, d)$ metr. Raum, seien $A, B \subseteq X$ abg. und disjunkt, $A \cap B = \emptyset$. Zu jedem $a \in A$ gibt es $\varepsilon_a > 0$ mit $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$. Zu jedem $b \in B$ gibt es $\varepsilon_b > 0$ mit $B_{\varepsilon_b}(b) \cap A = \emptyset$. Setze

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a/2}(a) \qquad V = \bigcup_{b \in B} B_{\varepsilon_b/2}(b)$$

$\Rightarrow A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U, V$ offen.

Beh: $U \cap V = \emptyset$. Denn wäre $z \in U \cap V$, so gäbe es $a \in A$, $b \in B$ mit $z \in B_{\varepsilon_a/2}(a) \cap B_{\varepsilon_b/2}(b)$

$$\Rightarrow d(a,b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} \Rightarrow d(a,b) < \varepsilon_a \text{ oder } d(a,b) < \varepsilon_b \; \lightning$$

$\square$

**Satz** Sei $(X,<)$ angeordnet. Dann ist die Ordnungstopologie Hausdorffsch.

**Beweis** Sei $u,v \in X$, $u \neq v$. OE $u<v$. Falls es $z$ gibt mit $u<z<v$ setze $U=(-\infty,z)$, $V=(z,\infty)$. Falls es kein solches $z$ gibt setze $U=(-\infty,v)$, $V=(u,\infty)$. $\square$

**Bem** Die Ordnungstopologie ist sogar normal.

3\. **Satz A** Sei $X$ ein top. Raum, sei $\Delta X = \{(u,u) \mid u \in X\} \subseteq X \times X$. Dann sind äquivalent:

(i) $X$ ist Hausdorffsch

(ii) $\Delta X \subseteq X \times X$ ist abg.

**Beweis** $\Delta X$ abg $\Leftrightarrow$ für alle $u,v \in X$ mit $u \neq v$ gibt es $U,V \subseteq X$ offen mit $(u,v) \in U \times V$ und $(U \times V) \cap \Delta X = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $u \in U$, $v \in V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

**Satz B** Sei $X$ ein $T_1$-Raum. Dann sind äquivalent:

(i) $X$ ist regulär

(ii) für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jedes $u \in U$ gibt es $V \subseteq X$ offen mit $u \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

**Beweis** (i) $\Rightarrow$ (ii). Setze $A = X - U$ $\Rightarrow$ es gibt $V, W$ offen mit $A \subseteq W$, $u \in V$, $V \cap W = \emptyset$. Es folgt $\overline{V} \subseteq X - W \subseteq X - A = U$. $\square$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $u \in X$, $A \subseteq X$ abg., $u \notin A$. Setze $U = X - A$, wähle $V$ offen mit $u \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Setze $W = X - \overline{V}$ $\Rightarrow$ $A \subseteq W$ und $W \cap V = \emptyset$. $\square$

4. Satz Sei $X$ ein $T_m$-Raum, $m = 1, 2, 3$. Sei $Y \subseteq X$ Teilraum. Dann ist auch $Y$ ein $T_m$-Raum.

Beweis $m = 1$: Sei $y \in Y$ $\Rightarrow$ $\overline{\{y\}} = \{y\}$ $\Rightarrow$ $\{y\} \subseteq Y$ ist abg. in $Y$.

$m = 3$: Sei $y \in Y$ und $A \subseteq Y$ abg. in Teilraumtopologie, mit $y \notin A$. Dann ist $\overline{A} \cap Y = A$, also $y \notin \overline{A}$ $\Rightarrow$ es gibt $U, V \subseteq X$ offen mit $y \in U$, $\overline{A} \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow$ $y \in \underbrace{U \cap Y}_{\text{offen in } Y}$ $\quad A \subseteq \underbrace{V \cap Y}_{\text{offen in } Y}$

$m = 2$: Wie $m = 3$ mit $A = \{z\}$. $\square$

Bem Unterräume von normalen Räumen sind nicht unbedingt normal, Beispiele sind kompliziert.

5. Satz Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie von top. Räumen, mit $I \neq \emptyset$ und $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Sei $m = 1, 2, 3$. Dann sind äquivalent:

(i) Jedes $X_k$ ist ein $T_m$-Raum

(ii) $X = \prod_{i\in I} X_i$ ist ein $T_m$-Raum (in der Produkttopologie).

<u>Beweis</u> <u>(ii) ⇒ (i)</u>: Sei $k \in I$, wähle $z_i \in X_i$ für alle $i \in I$.

Sei $Y = \{ y \in X \mid y_i = z_i$ für alle $i \neq k \}$

Betrachte $f: X_k \longmapsto Y$, $x \longmapsto (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i = \begin{cases} z_i & i \neq k \\ x & i = k \end{cases}$

Dann ist $f$ stetig (nach § 1.16) mit stetiger Inversen

$pr_k|_Y : Y \to X$, also ist $Y$ homöomorph zu $X_k$.

Nach § 2.4 ist $Y$ ein $T_m$-Raum, also auch $X_k$.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>:

<u>$m = 1$</u>: Sei $z = (z_i)_{i\in I} \in X$, setze

$W_i = \{ w \in X \mid w_i \neq z_i \}$. Dann ist $W \subseteq X$ offen,

also ist $X - \{z\} = \bigcup_{i\in I} W_i$ offen. □

<u>$m = 3$</u>: Sei $z = (z_i)_{i\in I} \in X$ und $U \subseteq X$ offen mit

$z \in U$. Dann gibt es $I_0 \subseteq I$ endlich, $W_i \subseteq X_i$ offen

$W_i = X_i$ für $i \notin I_0$, $z \in W = \prod_{i\in I} W_i \subseteq U$.

Für jedes $j \in I_0$ wähle $V_j \subseteq W_j$ mit $z_j \in V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq W_j$

Für $j \in I - I_0$ setze $V_j = X_j$. Es folgt mit $\underbrace{V = \prod_{i \in I} V_i}_{\text{offen}}$

$z \in V \subseteq \prod_{i \in I} \overline{V_i} \subseteq W \subseteq U$.

Weiter ist $\prod_{i \in I} \overline{V_i}$ abgeschlossen, denn: setze $A_k =$
$\{(x_i)_{i \in I} \mid x_k \in \overline{V_k}\} \Rightarrow A_k$ abg und $\prod_{i \in I} \overline{V_i} = \bigcap_{k \in I} A_k$. $\square$

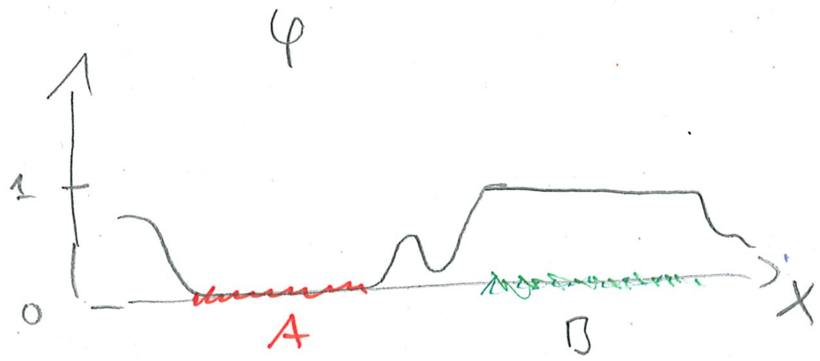
$m = 2$: Ähnlich wie $m = 3$. $\square$ #

Bem Produkte von normalen Räumen sind nicht unbedingt normal. • ZB $X = \mathbb{R}$ mit Sorgenfrey-Topologie, vgl. §1.6 $\rightarrow$ $X$ normal, $X \times X$ nicht normal ($\rightarrow$ Munkres).

• Ist $I$ überabzählbar, so ist $\mathbb{R}^I$ nicht normal.

Normale Räume sind wichtig, weil es auf ihnen viele stetige reelle Funktionen gibt.

7. Def Sei $X$ ein top. Raum, seien $A, B \subseteq X$ abg mit $A \cap B = \emptyset$. Eine stetige Abbildung $\varphi: X \to [0,1]$ heißt Urysohn-Funktion für $(A, B)$ wenn $\varphi(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $\varphi(b) = 1$ für alle $b \in B$




(P. S. Urysohn, 1898 – 2024, sowjetischer Mathematiker)

<u>Theorem</u> (Lemma von Urysohn) Sei $X$ ein $T_1$-Raum. Dann sind äquivalent: (i) $X$ ist normal ($T_4$-Raum)

(ii) für alle abg. Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ existiert eine Urysohn-Funktion für $(A, B)$.

<u>Beweis</u> <u>(ii) => (i):</u> Sei $A, B \subseteq X$ abg, $A \cap B = \emptyset$. Sei $\varphi$ Urysohn-Funktion für $(A, B)$. Setze $U = \varphi^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, $V = \varphi^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$. Dann sind $U, V$ offen und disjunkt, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

<u>(i) => (ii):</u> Seien $A, B \subseteq X$ abg mit $A \cap B = \emptyset$.

Seien $U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

Setze $U_0 = U$, $U_1 = X - B$, $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Wir wählen eine Bijektion $l : \mathbb{N} \to S$ mit $l_0 = 0$, $l_1 = 1$. Jetzt definieren wir rekursiv offene Mengen $U_s$, für $s \in S$ so, dass gilt:

(*) $$s < t \Rightarrow U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq U_t$$

Angenommen, $U_s$ ist bereits definiert für $s = l_0, l_1, \ldots l_m$.

Schreibe $\{l_0, \ldots, l_m\} = \{s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_m = 1\}$

Dann gibt es $j$ mit $s_j < l_{m+1} < s_{j+1}$ und

$U_{s_j} \subseteq \overline{U_{s_j}} \subseteq U_{s_{j+1}}$. Da $X$ normal ist, gibt es

$\tilde{U}', \tilde{V}' \subseteq X$ offen mit $\overline{U_{s_j}} \subseteq \tilde{U}'$ und $X - U_{s_{j+1}} \subseteq \tilde{V}'$

und $\tilde{U}' \cap \tilde{V}' = \emptyset$. Es folgt $\overline{\tilde{U}'} \subseteq U_{s_{j+1}}$.

Wir setzen $U_{l_{m+1}} = \tilde{U}'$.

Damit ist ⊛ erfüllt für alle $s, t \in \{l_0, \ldots, l_{m+1}\}$.

Fahre so fort $\rightsquigarrow$ ⊛ erfüllt für alle $s, t \in S$.

Für $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < 0$ setze $U_q = \emptyset$ und

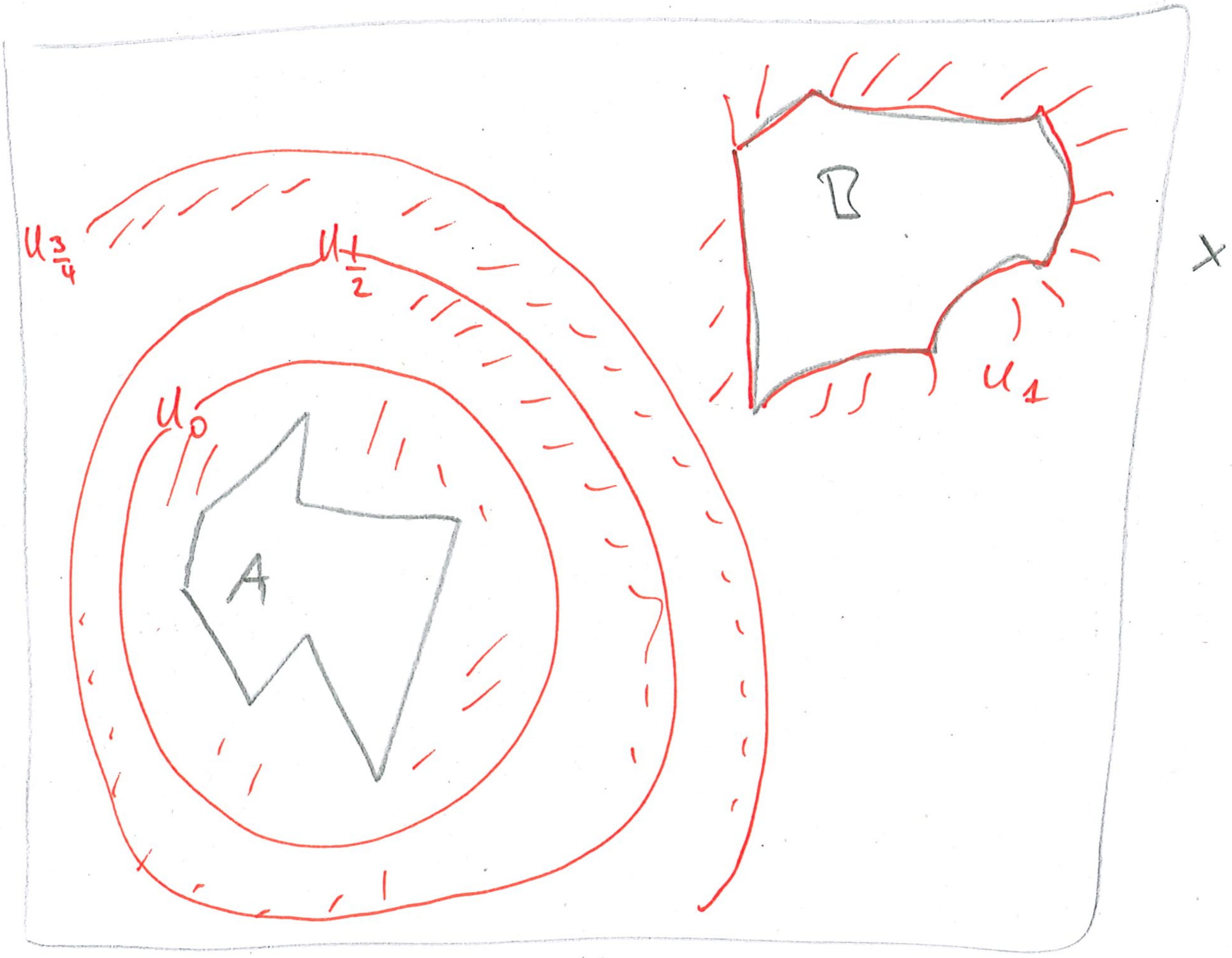
$U_q = X$ für $q > 1$. Damit ist $U_q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ definiert.

Für $x \in X$ sei $Q(x) = \underbrace{\{q \in \mathbb{Q} \mid x \in U_q\}}_{\neq \emptyset}$

sowie $\varphi(x) = \inf Q(x)$.

Es folgt $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Für $a \in A$ ist $\varphi(a) = 0$,

für $b \in B$ ist $\varphi(b) = 1$.


X
$U_{\frac{3}{4}}$
$U_{\frac{1}{2}}$
$U_0$
A
B
$U_1$

<u>Behauptung</u>: <u>$\varphi$ ist stetig</u>.

Zunächst gilt: $x \in \overline{U_s} \Rightarrow \varphi(x) \leq s$

$x \in X - U_s \Rightarrow \varphi(x) \geq s$.

Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, sei $x \in X$ mit $\alpha < \varphi(x) < \beta$.

Dann gibt es $s, t \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha < s < \varphi(x) < t < \beta$.

Setze $W = U_t - \overline{U_s} \Rightarrow W$ ist offen.

Für $z \in X - U_t$ ist $\varphi(z) \geq t$, für $z \in \overline{U_s}$ ist $\varphi(z) \leq s$, also ist $x \in W$, d.h. $W$ ist <u>Umgebung von $x$</u>.

Für $z \in U$ gilt $\varphi(z) \leq t$ und $\varphi(z) \geq s$, also $\varphi(z) \in [s,t] \subseteq (\alpha, \beta)$. Damit ist $\varphi(W) \subseteq (\alpha, \beta)$, also ist $\varphi$ stetig. $\square$

Unser nächstes Ziel ist Tietzes Fortsetzungssatz.

8. <u>Lemma A</u> Sei $X$ ein $T_4$-Raum, sei $A \subseteq X$ abg., sei $\varphi: A \to [-c, c]$ stetig, $c > 0$. Dann gibt es $\psi: X \to [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$ stetig mit

$$|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} c \quad \text{für alle } a \in A$$

Beweis Setze $A_+ = \{ a \in A \mid \varphi(a) \geq \frac{1}{3} c \}$
$A_- = \{ a \in A \mid \varphi(a) \leq -\frac{1}{3} c \}$

Nach Urysohns Lemma §2.7 gibt es $\lambda : X \to [0,1]$ stetig mit $\lambda|_{A_-} = 0$, $\lambda|_{A_+} = 1$. Setze

$\psi(x) = 2(\lambda(x) - \frac{1}{2}) \cdot \frac{c}{3} \Rightarrow \psi|_{A_+} = \frac{c}{3}$, $\psi|_{A_-} = -\frac{c}{3}$,

$\psi(X) \subseteq [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$. Für $a \in A_+$ ist $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} c$ und für $a \in A_-$ ist $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} c$. Ist $-\frac{1}{3} c < \varphi(a) < \frac{1}{3} c$, so ist $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} c$. □

Lemma B Sei $X$ ein $T_4$-Raum, sei $A \subseteq X$ abg., sei $\varphi : A \to [-1,1]$ stetig. Dann gibt es $\Phi : X \to [-1,1]$ stetig so, dass $\Phi|_A = \varphi$.

Beweis Nach Lemma A gibt es $\psi_0 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ stetig mit $|\varphi(a) - \psi_0(a)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $a \in A$.
Wieder mit Lemma A gibt es $\psi_1 : X \to [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ stetig mit

$$|(\varphi(a) - \psi_0(a)) - \psi_1(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \quad \text{usw}$$

$$\Rightarrow \psi_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \quad \text{stetig}$$

$$|\varphi(a) - \psi_0(a) - \dots - \psi_n(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } a \in A.$$

Setze jetzt $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \Rightarrow |\Phi(x)| \leq \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$. Für $a \in A$ gilt $\Phi(a) = \varphi(a)$.

Beh: $\Phi$ ist stetig. Denn: sei $\varepsilon > 0$, sei $x \in X$.

Dann gibt es $m \geq 0$ so, dass $\frac{1}{3} \sum_{k > m} \left(\frac{2}{3}\right)^k < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei $V$ eine Umgebung von $x$ so, dass für alle $v \in V$ gilt

$\sum_{k=0}^{m} |\varphi_k(x) - \varphi_k(v)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Dann folgt für $v \in V$,

dass $|\Phi(x) - \Phi(v)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, also ist

$\Phi$ stetig. $\square$

#

**Lemma C** Sei $X$ ein $T_4$-Raum, sei $A \subseteq X$ abg., sei $\varphi : A \to (-1,1)$ stetig. Dann gibt es $\Phi : X \to (-1,1)$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$.

**Beweis** Nach Lemma B gibt es $\Phi' : X \to [-1,1]$ stetig mit $\varphi = \Phi'|_A$. Sei $B = \{x \in X \mid |\Phi'(x)| = 1\}$.

Dann ist $B \subseteq X$ abg, $A \cap B = \phi$. Sei $\lambda : X \to [0,1]$ eine Urysohnfunktion mit $\lambda|_A = 1$, $\lambda|_B = 0$.

Setze $\Phi(x) = \lambda(x) \cdot \Phi'(x) \Rightarrow \Phi|_A = \Phi|_A = \varphi$
und $|\Phi(x)| < 1$ für alle $x \in X$. $\square$

<u>Theorem</u> (<u>Tietzes Fortsetzungssatz</u>) Sei $X$ ein $T_1$-Raum, sei $Z = \mathbb{R}$ oder $Z = [a,b]$ oder $Z = (a,b)$, für $a<b$.
Dann sind äquivalent:
(i) $X$ ist normal
(ii) Für jede abg. Teilmenge $A \subseteq X$ und jedes stetige $\varphi: A \to Z$ gibt es $\Phi: X \to Z$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$.

<u>Beweis</u> <u>(ii) ⇒ (i)</u>: Sei $u, v \in Z$ mit $u < v$.
Seien $A, B \subseteq X$ abg. mit $A \cap B = \emptyset$. Setze

$$\varphi(x) = \begin{cases} u & \text{wenn } x \in A \\ v & \text{wenn } x \in B \end{cases} \Rightarrow \varphi: A \cup B \to [u,v] \text{ stetig.}$$

Sei $\Phi$ eine Fortsetzung. Setze $U = \{x \in X \mid \Phi(x) < \frac{1}{2}(u+v)\}$
$V = \{x \in X \mid \Phi(x) > \frac{1}{2}(u+v)\}$

$\Rightarrow U, V \subseteq X$ offen, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>: Für $Z = [a,b]$ mit $a<b$ wähle Homöomorphismus $\tau: [a,b] \to [-1,1]$, z.B.

$$\tau(t) = \frac{1}{b-a}(2t-a-b).$$

Dann hat $\tilde{\varphi} = \tau \circ \varphi$ eine Fortsetzung $\tilde{\Phi}$ nach Lemma B, setze
$\Phi = \tau^{-1} \circ \tilde{\Phi}$.

Für $Z = (a,b)$ betrachte $\tau : (a,b) \to (-1,1)$ genauso. Für $Z = \mathbb{R}$ wähle ein Homöomorphismus $\tau : \mathbb{R} \to (-1,1)$, vgl. §1.9. Der Rest genauso. $\square$

Bemerkung Ein $T_1$-Raum $X$ heißt vollständig regulär oder Tychonov-Raum oder $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn gilt: für jedes $u \in X$ und jede offene Menge $U \subseteq X$ mit $u \in U \subseteq X$ gibt es $\varphi : X \to [0,1]$ stetig mit $\varphi(u) = 0$ und $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in X - U$.

Klar: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$. Ist $Y \subseteq X$ Teilraum, so ist auch $Y$ ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

—

Jetzt kommen wir zu Kompaktheit.

9. Def. Sei $X$ ein top. Raum. Eine Menge $\mathcal{C}$ von offenen Teilmengen von $X$ heißt offene Überdeckung, wenn gilt $\bigcup \mathcal{C} = X$, d.h. wenn $X = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} U$. Ein Hausdorffraum $X$ heißt kompakt, wenn gilt: für jede offene Überdeckung $\mathcal{C}$ gibt es $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich mit $X = \bigcup \mathcal{C}_0$.

jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.

⌜Achtung: manche (alte) Topologiebücher lassen die Hausdorff-Bedingung weg. ⌟

Bsp (a) $X$ diskreter topologischer Raum, $\mathcal{C} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ist offene Überdeckung. Also ist $X$ genau dann kompakt, wenn $X$ endlich ist.

(b) $\mathbb{R}$ mit üblicher Topologie, $\mathcal{C} = \{(-k,k) \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$. Ist $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich, so ist $\bigcup \mathcal{C}_0 \neq \mathbb{R}$. Also ist $\mathbb{R}$ nicht kompakt.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines Hausdorffraums $X$ heißt kompakt, wenn $A$ in der Teilraumtopologie kompakt ist. Äquivalent dazu: ist $\mathcal{C}$ Menge von offenen Teilmengen von $X$ mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, so gibt es $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$. Denn: die offenen Teilmengen von $A$ in der Teilraumtopologie sind von der Form $A \cap U$, $U \subseteq X$ offen.

10. **Satz** Sei $X$ ein Hausdorff-Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(a) Falls $A$ kompakt ist, so ist $A$ abg. in $X$.

(b) Falls $X$ kompakt ist, so ist $A$ genau dann abg., wenn $A$ kompakt ist.

**Beweis** (a). Sei $w \in X - A$. Für jedes $a \in A$ gibt es $U_a, V_a \subseteq X$ offen mit $w \in V_a$, $a \in U_a$, $U_a \cap V_a = \emptyset$.
Setze $\mathcal{C} = \{U_a \mid a \in A\}$. Dann ist $\bigcup \mathcal{C} \supseteq A$, also gibt es $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_0 = \{U_{a_1}, \dots, U_{a_m}\}$.
Dann ist $V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_m} = W$ offen, $w \in W$, $W \cap A = \emptyset$. $\square$
Also ist $A$ abg. in $X$.

(b) Sei $X$ kp, sei $A \subseteq X$ abg, sei $\mathcal{C}$ Menge von offenen Mengen in $X$ mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, sei $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{X - A\}$.
Dann ist $\bigcup \tilde{\mathcal{C}} = X$, also gibt es $\tilde{\mathcal{C}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ endlich mit $X = \bigcup \tilde{\mathcal{C}}_0$; setze $\mathcal{C}_0 = \tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \mathcal{C} \Rightarrow A \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$. $\square$
(Rest mit (a).)

11. **Satz** Seien $X, Y$ Hausdorff-Räume und sei $f: X \to Y$ stetig. Wenn $A \subseteq X$ kompakt ist, so ist $f(A) = B \subseteq Y$ auch kompakt. Insbesondere ist $f(A)$ abgeschlossen.

**Beweis** Sei $\mathcal{C}$ Menge von offenen Teilmengen von $Y$ mit $B \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Sei $\tilde{\mathcal{C}} = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{C}\}$.

Dann ist $\tilde{\mathcal{C}}$ Menge von offenen Teilmengen von $X$ (weil $f$ stetig ist) mit $A \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$. Also gibt es $\tilde{\mathcal{C}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ endlich mit $A \subseteq \bigcup \tilde{\mathcal{C}}_0$. Damit: $\tilde{\mathcal{C}}_0 = \{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_m)\}$

$U_1, \dots, U_m \in \mathcal{C} \Rightarrow B \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m$. $\square$

<u>Korollar</u> Seien $X, Y$ Hausdorff-Räume, sei $f: X \to Y$ stetig und bijektiv. Wenn $X$ kompakt ist, so ist $f$ ein Homöomorphismus.

<u>Beweis</u> Sei $h: Y \to X$ die Umkehrabbildung von $f$, sei $A \subseteq X$ abg. Dann ist $A$ kompakt, also ist $h^{-1}(A) = f(A) = B \subseteq Y$ kompakt, also abg. in $Y$. Damit ist $h$ stetig, also ist $f$ ein Homöomorphismus. $\square$

12. <u>Def</u> Eine Menge von Mengen $\mathcal{C}$ hat die <u>endliche Durchschnittseigenschaft</u> FIP (engl finite intersection property) wenn gilt: Für jede <u>endliche</u> Teilmenge $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ (mit $\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$) ist $\bigcap \mathcal{C}_0 \neq \emptyset$. D.h. für alle $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{C}$ gibt es ein $z \in C_1 \cap \dots \cap C_m$.

13. <u>Satz</u> Sei $X$ ein Hausdorff-Raum. Dann sind äquivalent: (i) $X$ ist kompakt

(ii) für jede Menge von abg. Teilmengen $\mathcal{A} \neq \emptyset$ mit FIP ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

<u>Beweis</u> Rein formal. Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ Menge von abg. Teilmengen, sei $\mathcal{C} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$. Dann gilt:

$$\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset \iff \bigcup \mathcal{C} \neq X$$

$\mathcal{A}$ FIP $\iff$ für alle endlichen $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ ist $\bigcup \mathcal{C}_0 \neq X$

$\square$ #

14. <u>Theorem</u> (Satz von Tychonov) Sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von Hausdorffräumen, $J \neq \emptyset$, alle $X_j \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) alle $X_j$ sind kompakt

(ii) $\prod_{j \in J} X_j = X$ ist kompakt (in der Produkttopologie).

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) ist einfach: $X$ kompakt $\Rightarrow$ $X_j = pr_j(X)$ ist auch kompakt nach §2.11.

Für die andere Richtung brauchen wir Zorns Lemma.

Erinnerung an Zorns Lemma: Eine partiell geordnete Menge $(P, \leq)$ heißt induktiv, wenn jede linear geordnete① Teilmenge $K \subseteq P$ eine obere Schranke hat②.

① $a, b \in K \Rightarrow a \leq b$ oder $b \leq a$

② es gibt $s \in P$ so, dass für alle $a \in K$ gilt $a \leq s$.

Zorns Lemma: Ist $(P, \leq)$ induktiv, $P \neq \emptyset$, so gibt es in $P$ mindestens ein maximales Element③ $m$.

③ Für kein $p \in P$ gilt $m < p$

Jetzt Beweis, dass (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge von abg. Teilmengen von $X$ mit FIP. zZ ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sei $P = \{ \mathcal{E} \mid \mathcal{E}$ ist Menge von Teilmengen mit FIP, mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \}$

Bezüglich Inklusion "$\subseteq$" ist $(P, \subseteq)$ partiell geordnet.

(a) Beh: $(P, \subseteq)$ ist induktiv, hat also ein maximales Element,

Denn ist $K \subseteq P$ linear geordnet, so setze $\mathcal{K} = \bigcup K$.

Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$. Ist $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{K}$ so gibt es $\mathcal{E} \in K$ mit $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{E}$ (weil $K$ linear geordnet ist), also $E_1 \cap \ldots \cap E_m \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{K} \in P$.

$\Rightarrow K$ hat obere Schranke. $\square$

Wir wählen jetzt ein maximales $\mathcal{E} \in P$.

(b) <u>Beh</u> Ist $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{E}$, so ist $E_1 \cap \ldots \cap E_m \in \mathcal{E}$.

<u>Denn</u>: $E_1 \cap \ldots \cap E_m \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \cup \{E_1 \cap \ldots \cap E_m\}$ hat FIP

$\Rightarrow \mathcal{E} \cup \{E_1 \cap \ldots \cap E_m\} \in P$. Aber $\mathcal{E}$ ist maximal. $\square$

Wir setzen für $j \in J$ $\quad \mathcal{E}_j = \{ \overline{pr_j(E)} \mid E \in \mathcal{E} \}$.

Dann hat $\mathcal{E}_j$ FIP, also gibt es $z_j \in \bigcap \mathcal{E}_j \subseteq X_j$

(weil $X_j$ kompakt). Sei $U_k \subseteq X_j$ eine Umgebung von $z_j$,

sei $W_k = \{ x \in X \mid pr_k(x) \in U_k \}$ sowie $z = (z_j)_{j \in J}$

(c) <u>Beh</u> Es gilt $W_k \in \mathcal{E}$.

<u>Denn</u>: für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt $E \cap W_k \neq \emptyset$,

$\left[ \begin{array}{l} \text{denn } z_k \in \overline{pr_k(E)}, \text{ d.h. } U_k \cap pr_k(E) \neq \emptyset \\ \Rightarrow \text{ es gibt } x \in E \text{ mit } pr_k(x) \in U_k \Rightarrow x \in W_k. \end{array} \right]$

Ist also $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{E} \Rightarrow \underbrace{E_1 \cap \ldots \cap E_m}_{\in \mathcal{E}} \cap W_k \neq \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{E} \cup \{W_k\}$ hat FIP $\Rightarrow \mathcal{E} \cup \{W_k\} \in P$

$\Rightarrow W_k \in \mathcal{E}$ wegen Maximalität. $\square$

Wir wählen jetzt $z \in X$ so, dass für jedes $j \in J$ gilt $z_j = pr_j(z) \in \bigcap \mathcal{E}_j \subseteq X_j$

(d) <u>Beh</u> Für alle $E \in \mathcal{E}$ ist $z \in \overline{E}$.

<u>Denn</u> Sei $V \subseteq X$ eine Umgebung von $z$. Dann gibt es $J_0 \subseteq J$ endlich, $U_j \subseteq X_j$ offen mit $z_j \in U_j$ so, dass $W = \{ x \in X \mid pr_j(x) \in U_j$ für alle $j \in J_0 \} \subseteq V$.
Mit (b), (c) folgt $W = \bigcap_{k \in J_0} W_k \in \mathcal{E}$, insbesondere also $W \cap E \neq \emptyset$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Damit $z \in \overline{E}$ □

Für alle $A \in \mathcal{A}$ folgt also insbesondere $z \in \overline{A} = A$, d.h. $z \in \bigcap \mathcal{A}$. □

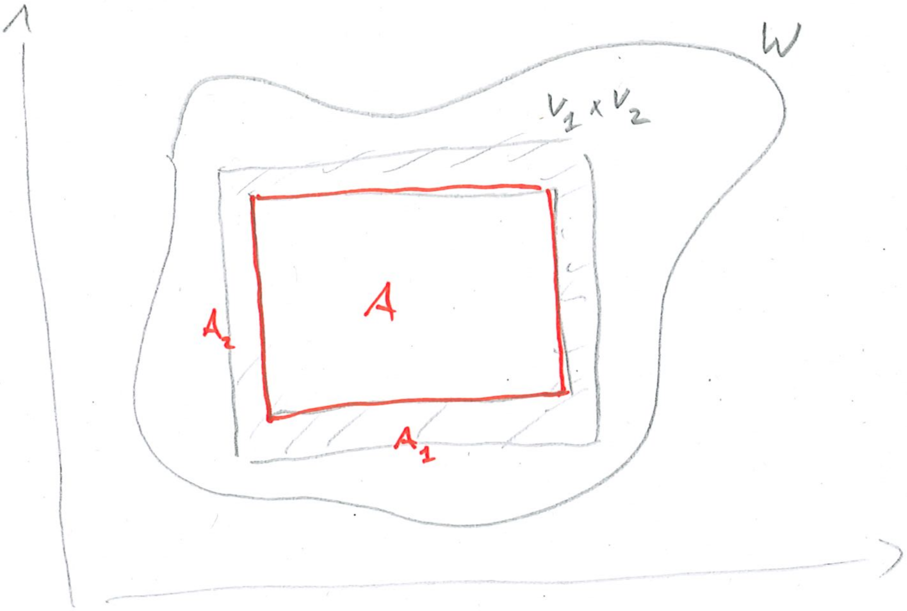
<u>Korollar</u> Die <u>Cantormenge</u> $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt, ebenso der <u>Hilbertwürfel</u> $[0,1]^{\mathbb{N}}$ und natürlich auch $[0,1]^m \subseteq \mathbb{R}^m$ für alle $m \geq 1$.

A.N. Tychonov, sowj. Mathematiker, 1906–1993
Spezialfall: $[0,1]^I$ ist für jedes $I$ kompakt.

15. Satz (Wallace' Lemma)

Seien $X_1, \dots, X_m$ Hausdorff-Räume, sei $X = X_1 \times \dots \times X_m$. Für $j = 1, \dots, m$ sei $A_j \subseteq X_j$ kompakt. Sei $W \subseteq X$ offen mit $A = A_1 \times \dots \times A_m \subseteq W$. Dann gibt es $V_i \subseteq X_i$ offen mit $A_i \subseteq V_i$ und $A_1 \times \dots \times A_m \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq W$.

$m = 2$




Beweis Für $m = 1$ ist das klar.

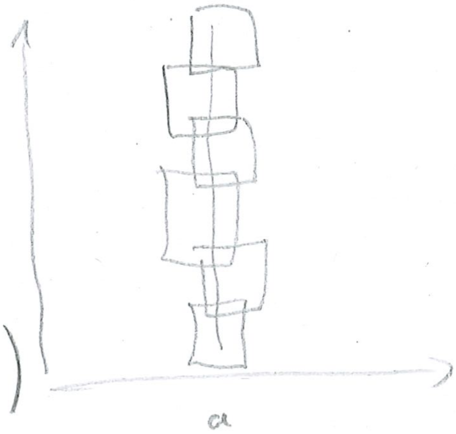
$m = 2$: Sei $a \in A_1$. Für jedes $b \in A_2$ gibt es offene Mengen $U_b \subseteq X_1$, $V_b \subseteq X_2$ mit

$$(a, b) \in U_b \times V_b \subseteq W.$$

Da $\{a\} \times A_2 \cong A_2$ kompakt ist, gibt es $b_1, \dots, b_s \in A_2$ mit $\{a\} \times A_2 \subseteq (U_{b_1} \times V_{b_1}) \cup \dots \cup (U_{b_s} \times V_{b_s})$.

Setze $U_a = U_{b_1} \cap \dots \cap U_{b_s}$, $V_a = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_s}$

⇝ $\{a\} \times A_2 \subseteq U_a \times V_a \subseteq W$.




Weil $A_1 \times A_2$ kompakt ist, gibt es $a_1, \dots, a_r \in A_1$ mit

$$A_1 \times A_2 \subseteq (U_{a_1} \times V_{a_1}) \cup \dots \cup (U_{a_r} \times V_{a_r})$$

Setze jetzt $V_1 = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_r}$ ⇝ $V_1 \times V_2 \subseteq W$

$V_2 = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_r}$ $\quad A_1 \times A_2 \subseteq V_1 \times V_2$

□

<u>$m \geq 3$</u> $\quad X = X_1 \times \underbrace{X_2 \times \dots \times X_m}_{=Y} \qquad A = A_1 \times \underbrace{A_2 \times \dots \times A_m}_{=B}$

⇝ es gibt $V_1 \subseteq X_1$, $U \subseteq Y$ offen mit

$A \subseteq V_1 \times U \subseteq W$. Mit Induktion gibt es $V_2, \dots, V_m$

mit $A_2 \times \dots \times A_m \subseteq V_2 \times \dots \times V_m \subseteq U$

insgesamt $A_1 \times \dots \times A_m \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq V_1 \times U \subseteq W$.

□

<u>Korollar A</u> Ist $X$ ein Hausdorff-Raum und sind $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ kompakt, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so gibt es $V_1, \dots, V_m \subseteq X$ offen mit $A_i \subseteq V_i$ und $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Insbesondere ist jeder kompakte Raum normal.

<u>Beweis</u> Setze $Y = \underbrace{X \times \dots \times X}_{m} = X^m$, $A = A_1 \times \dots \times A_m \subseteq X^m$,

$W = \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid x_i \neq x_j$ für $i \neq j\}$. Dann ist $W \subseteq X^m$ offen (weil $X$ Hausdorff-Raum ist) und $A \subseteq W$ (weil $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$). Also gibt es $V_1, \dots, V_m \subseteq X$ offen mit $A \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq W$ $\Rightarrow$ $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$. □

<u>Korollar B</u> Seien $X, Y$ Hausdorffräume, sei $Y$ kompakt. Wenn $A \subseteq X \times Y$ abg. ist, so ist auch $pr_1(A) \subseteq X$ abg.

<u>Beweis</u> Sei $U = X - pr_1(A)$, z.z.: $U \subseteq X$ ist offen. Für $u \in U$ ist $\underbrace{(\{u\} \times Y)}_{\text{kompakt}} \cap A = \emptyset$, also gibt es $V_1 \subseteq X$ offen mit $\{u\} \times Y \subseteq V_1 \times Y \subseteq (X \times Y) - A \Rightarrow V_1 \subseteq U$. □

16. Def / Erinnerung Ein $T_1$-Raum $X$ heißt

Tychonov-Raum, vollständig regulär oder $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum,

wenn gilt: für jede abg. Teilmenge $A \subseteq X$ und

jedes $u \in X - A$ gibt es $\varphi : X \to [0,1]$ stetig mit

$\varphi|_A = 1$, $\varphi(u) = 0$ (also eine $(\{u\}, A)$-Urysohn-Funktion)

Klar: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$. Für jedes $Y \subseteq X$ ist

dann auch $Y$ ein Tychonov-Raum.

Insbesondere sind Teilräume von kompakten Räumen

stets Tychonov-Räume, vgl §2.15 Korollar A.

17. Konstruktion Sei $X$ ein Tychonov-Raum,

Sei $S = C(X, [0,1]) = \{\varphi : X \to [0,1] \mid \varphi \text{ stetig}\}$.

Betrachte die Abbildung $\iota_X : X \to [0,1]^S$

$$x \longmapsto (\varphi(x))_{\varphi \in S}$$

Lemma Die Abbildung $\iota_X : X \to [0,1]^S$ ist

stetig, injektiv und die Koeinschränkung

$$X \xrightarrow{\iota_X} \iota_X(X)$$

ist ein Homöomorphismus.

Beweis Für jedes $\varphi \in S$ ist die Projektion
$pr_\varphi : [0,1]^S \to [0,1]$, $(t_\psi)_{\psi \in S} \mapsto t_\varphi$ stetig. Weiter
ist $pr_\varphi \circ \iota_X(x) = \varphi(x)$. Nach § 1.16 ist $\iota_X$ stetig.
Ist $u, v \in X$, $u \neq v$, so gibt es $\varphi \in S$ mit $\varphi(u) \neq \varphi(v)$
(weil X Tychonov-Raum ist), also $\underbrace{pr_\varphi \iota_X(u)}_{=\varphi(u)} \neq \underbrace{pr_\varphi \iota_X(v)}_{=\varphi(v)}$
$\Rightarrow \iota_X(u) \neq \iota_X(v) \Rightarrow \varphi$ ist injektiv.

Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ abg. Beh: $\overline{\iota_X(A)} \cap \iota_X(X) = \iota_X(A)$,
d.h. $\iota_X(A)$ ist abgeschlossen in $\iota_X(X)$.
Denn: Sei $u \in X - A$. Dann gibt es $\varphi \in S$ mit
$\varphi(u) = 0$, $\varphi|_A = 1 \Rightarrow pr_\varphi(\iota_X(A)) = \{1\}$
$pr_\varphi(\iota_X(u)) = 0$

$\Rightarrow \iota_X(u) \notin \overline{\iota_X(A)}$ □

Damit ist das Lemma bewiesen.

Korollar Ein $T_1$-Raum X ist genau dann ein Tychonov-Raum, wenn er homöomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raums K ist.

Beweis $[0,1]^S$ ist kompakt nach dem Satz von

Tychonov § 2.14 und § 2.17 ist $X$ homöomorph zu einem Teilraum $\iota_X(X) \subseteq [0,1]^S$. $\square$

18. <u>Def</u> Sei $X$ ein Tychonov-Raum, $S = C(X,[0,1])$ wie oben, $\iota_X : X \to [0,1]^S$ wie in § 2.17.

$$x \longmapsto (\varphi(x))_{\varphi \in S}$$

Wir definieren $\beta X = \overline{\iota_X(X)} \subseteq [0,1]^S$ und nennen die Abbildung

$$\iota_X : X \to \beta X$$

die <u>Čech-Stone Kompaktifizierung von $X$</u>.

⌜M. Stone, amerik. Mathematiker, 1903-1989.
E. Čech, tschech. Mathematiker, 1893-1960
A. Tychonov, sowj. Mathematiker, 1906-1993 ⌟

Da $\beta X$ abg. ist in $[0,1]^S$, ist $\beta X$ kompakt.

<u>Satz</u> (<u>Der Čech-Stone Funktor $\beta$</u>)

Seien $X, Y$ Tychonov-Räume, sei $f : X \to Y$ stetig. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\beta f : \beta X \to \beta Y$ so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_X"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\ \beta X \arrow[r, "\beta f"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. $\iota_Y \circ f = \beta f \circ \iota_Y$.

<u>Beweis</u> <u>Eindeutigkeit</u>. Angenommen, $h$ ist stetig, $\iota_Y \circ f = h \circ \iota_Y$.

Sei $A = \{ a \in \beta X \mid h(a) = \beta f(a) \} \subseteq \beta X$. Dann ist $A$ abg. und $\iota_X(X) \subseteq A$, also $\overline{\iota_X(X)} = \beta X \subseteq A$. $\square$

<u>Existenz</u> Sei $S = C(X,[0,1])$, $T = C(Y,[0,1])$

Betrachte
$$\alpha : [0,1]^S \longrightarrow [0,1]^T$$
$$(t_\varphi)_{\varphi \in S} \longmapsto (t_{\psi \circ f})_{\psi \in T}$$

Für jedes $\psi \in T$ ist $pr_\psi \circ \alpha : (t_\varphi)_{\varphi \in S} \mapsto t_{\psi \circ f}$ stetig,

also ist $\alpha$ stetig. Für $u \in X$ ist $\alpha((\varphi(u))_{\varphi \in S}) = (\psi \circ f(u))_{\psi \in T}$

d.h.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_X"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\ \iota_X(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \iota_Y(Y) \arrow[d, hook] \\ \beta X \arrow[r, "\alpha"] & {[0,1]^T} \end{tikzcd}$$

Da $\alpha$ stetig ist, gilt $\alpha(\beta X) = \alpha(\overline{\iota_X(X)}) \subseteq \overline{\alpha(\iota_X(X))} \subseteq \beta Y$.

Definiere $\beta f$ als Einschränkung von $\alpha$,

$$\beta X \xrightarrow{\alpha} \beta Y$$

$\square$

<u>Korollar A</u> Wenn $K$ kompakt ist, so ist $\iota_K : K \to \beta K$ ein Homöomorphismus.

<u>Beweis</u> Dann ist $\iota_K(K) \subseteq [0,1]^S$ kompakt (§2.11) also abg. (§2.10), also $\iota_K(K) = \beta K$ □

<u>Korollar B</u> (Die universelle Eigenschaft der Čech-Stone Kompaktifizierung)

Sei $X$ ein Tychonov-Raum, sei $K$ kompakt, sei $f: X \to K$ stetig. Dann gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\beta(f): \beta X \to K$ mit $\beta(f) \circ \iota_X = f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta(f)\ \exists!"] \\ & K \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> Wir haben

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f\ \exists!"] \arrow[dl, "\beta(f)"'] \\ K \arrow[r, "\iota_K", "\cong"'] & \beta K \end{tikzcd}$$

Homöomorphismus

□

Man unterscheidet dann <u>nicht</u> zwischen $\beta(f)$ und $\beta f$.

19. **Satz** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent: (i) $X$ ist kompakt

(ii) jede Folge in $X$ hat eine konvergente Teilfolge.

**Beweis** $\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge ohne konvergente Teilfolge. Dann gibt es zu jedem $z\in X$ ein $\varepsilon_z>0$ so, dass $\{ j\in\mathbb{N} \mid x_j \in B_{\varepsilon_z}(z)\}$ endlich ist. Dann hat $\mathcal{C} = \{ B_{\varepsilon_z}(z) \mid z\in X\}$ keine endliche Teilüberdeckung.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von $X$.

Beh A: Es gibt $\lambda>0$ so, dass für jedes $z\in X$ ein $U\in\mathcal{C}$ existiert mit $B_\lambda(z) \in U$.

Denn sonst gäbe es zu jedem $n>0$ ein $x_n$ so, dass $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ in keinem $U\in\mathcal{C}$ liegt. Wegen (ii) können wir annehmen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (wähle $x_0$ beliebig). Sei $z=\lim_n x_n \in U \in \mathcal{C}$. Dann gibt es $\varepsilon>0$ mit $B_\varepsilon(z)\subseteq U$.
Wähle $j>\frac{1}{\varepsilon}$ mit $d(x_j,z)<\frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$ $B_{\frac{1}{j}}(x_j)\subseteq U$ ↯

Beh B: Es gibt $x_1,\dots,x_m\in X$ mit $B_\lambda(x_1)\cup\dots\cup B_\lambda(x_m) = X$. Dabei ist $\lambda>0$ wie in Beh. A gewählt.

Denn sonst: Wähle $x_0\in X$ beliebig, $x_1\in X - B_\lambda(x_0)$, $x_2 \in X-(B_\lambda(x_0)\cup B_\lambda(x_1))$ usw

$\rightsquigarrow d(x_i, x_j) > \lambda$ für alle $i \neq j \rightsquigarrow$ keine konvergente Teilfolge $\lightning$. $\Box$

Setze $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{C}$ mit $B_\lambda(x_i) \subseteq U_i$

$\Rightarrow X = U_1 \cup \dots \cup U_m$. $\Box$