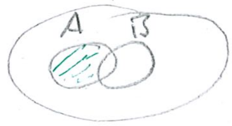
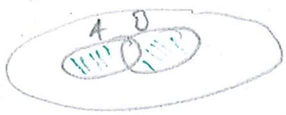
§1 Algebren, Inhalt, Maße

Es sei Ω eine Menge, mit $A, B \subseteq \Omega$.

Dann ist $A - B = \{ a \in A \mid a \notin B \}$



$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$



$A^c = \Omega - A$ (das hängt also von Ω ab!!)

das Komplement von A in Ω — Wir nennen A, B disjunkt wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.

$\mathcal{P}(\Omega) = \{ X \mid X \subseteq \Omega \text{ Teilmenge} \}$ Potenzmenge von Ω

Für $A, B, C \subseteq \Omega$ gilt die Distributivgesetze

$$\left.\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \end{aligned}\right\} \quad \text{Ü.A.} \quad \text{Venn-Diagramm}$$

Allgemein: ist $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Menge von Teilmengen,

$\bigcup M = \{ x \in \Omega \mid \text{es gibt } X \in M \text{ mit } x \in X \}$

$\bigcap M = \{ x \in \Omega \mid \text{für alle } X \in M \text{ gilt } x \in X \}$ (wenn $M \neq \emptyset$)

dann $(\bigcup M)^c = \bigcap \{ X^c \mid X \in M \}$

$(\bigcap M)^c = \bigcup \{ X^c \mid X \in M \}$

⌜Beweis der ersten Gleichung: $x \in (\bigcup M)^c \Leftrightarrow$ es gibt kein $X \in M$ mit $x \in X \Leftrightarrow$ für alle $X \in M$ ist $x \in X^c \Leftrightarrow x \in \bigcap \{X^c \mid X \in M\}$ ⌟

1. <u>Definition</u> Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Wir nennen $\mathcal{A}$ eine (Mengen-) <u>Algebra</u>, falls folgendes gilt:

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(A3) $A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$

Es folgt sofort: • $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A} \text{ für } A, B \in \mathcal{A}$$

sowie $A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$

<u>Beispiele</u> (a) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ist Algebra

(b) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist Algebra

(c) $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B, \Omega\}$ ist Algebra für $A \subseteq \Omega$ beliebig und $B = A^c$

(d) $\mathcal{A} = \{X \subseteq \Omega \mid X \text{ endlich oder } X^c \text{ endlich}\}$ ist Algebra, denn: A, B endlich $\Rightarrow A \cup B$ endlich
A^c endlich $\Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ endlich

(e) $\mathcal{A} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U \text{ offen}\}$ ist <u>kein</u> Algebra, denn Komplement von offenen Mengen sind i.A. nicht offen.

2. Lemma Sei Ω_1, Ω_2 Mengen, $F: \Omega_1 \to \Omega_2$ Abbildung, $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ sei eine Algebra. Dann ist auch $F^*(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_1 = \{ F^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A} \}$ eine Algebra. Insbesondere: ist $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, so ist $\mathcal{A}_2 | \Omega_1 = \{ A \cap \Omega_1 \mid A \in \mathcal{A}_2 \}$ eine Algebra

Beweis Es gilt $F^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$, $F^{-1}(A \cup B) = F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$

$F^{-1}(A^c) = F^{-1}(\Omega_2 - A) = \Omega_1 - F^{-1}(A)$.

Der Spezialfall folgt, wenn $F: \Omega_1 \hookrightarrow \Omega_2$ die Inklusionsabbildung ist, $F^{-1}(A) = A \cap \Omega_1$ $\square$

3. Lemma Sei S eine (nichtleere) Menge von Algebren auf Ω. Dann ist auch $\bigcap S = \mathcal{A}$ eine Algebra.

Beweis (*) Für jedes $\mathcal{B} \in S$ gilt $\Omega \in \mathcal{B}$, also $\Omega \in \mathcal{A}$.

Ist $A \in \mathcal{B}$ für jedes $\mathcal{B} \in S$, so ist $A^c \in \mathcal{B}$ für jedes $\mathcal{B} \in S$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ falls $A \in \mathcal{A}$.

Ist $A, B \in \mathcal{B}$ für jedes $\mathcal{B} \in S$, so auch $A \cup B \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$A \cup B \in \mathcal{A}$.

(*) $\bigcap S = \{ A \subseteq \Omega \mid$ für jedes $\mathcal{B} \in S$ ist $A \in \mathcal{B} \}$.

<u>Folge</u> Ist $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig, so gibt es genau eine bezüglich Inklusion "$\subseteq$" <u>kleinste</u> Algebra $\mathcal{A} = \langle \mathcal{Z} \rangle_{Alg}$ mit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}$. Wir nennen $\mathcal{A}$ das <u>Algebren-Erzeugnis von $\mathcal{Z}$</u>

⌜Die Bedingung sagt: ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Algebra mit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B}$, so folgt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. ⌟

<u>Beweis</u> Setze $S = \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B}$ Algebra auf Ω mit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B} \}$ und $\mathcal{A} = \bigcap S$. Es gilt $\mathcal{P}(\Omega) \in S$, also $S \neq \emptyset$. Ist $\mathcal{B}$ Algebra mit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B}$, so ist $\mathcal{B} \in S$, also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Nach dem Lemma ist $\mathcal{A}$ eine Algebra. $\square$

4. <u>Def</u> Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt <u>σ-Algebra</u>, falls gilt:

(A4) Ist $A_n \in \mathcal{A}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$, so ist auch $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(σ steht für "Summe")

Bsp (a) $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra

(b) $\mathcal{A}$ endliche Algebra $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ σ-Algebra
(z.B. $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ ist σ-Algebra)

(c) $\mathcal{A} = \{X \subseteq \Omega \mid X$ abzählbar oder X^c abzählbar$\}$
ist σ-Algebra

5. **Lemma** Sei $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ Abbildung. Falls $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf Ω_2 ist, so ist $f^*\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$ eine σ-Algebra auf Ω_1

Beweis $A_n \in \mathcal{A}_2$ für $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}_2$ und
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{A}_1$$ $\square$

6. **Lemma** Ist S eine (nicht leere) Menge von σ-Algebren auf Ω, so ist $\bigcap S = \mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

Beweis $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \Rightarrow A_n \in \mathcal{B}$ für alle n, alle $\mathcal{B} \in S$
$\Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ für alle $\mathcal{B} \in S \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. $\square$

Folgerung Ist $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, so gibt es genau eine bezüglich Inklusion minimale σ-Algebra

$\mathcal{A} = \langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$ mit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}$, die von

$\mathcal{E}$ erzeugt σ-Algebra

Beweis Setze $S = \{ \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Algebra$\}$

Es gilt $\mathcal{P}(\Omega) \in S$, also $S \neq \emptyset$. Setze $\mathcal{A} = \bigcap S$,

wie in § 1.3. $\square$

7. **Def** Sei $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Wir nennen $\mathfrak{D}$ ein **Dynkin-System** (E. Dynkin, sowj. Mathematiker),

wenn gilt

(D1) $\Omega \in \mathfrak{D}$

(D2) $A \in \mathfrak{D} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{D}$

(D3) Wenn $A_n \in \mathfrak{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wenn $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, so gilt $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{D}$.

Bsp (a) Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System

(b) Ω endlich, [mit einer geraden Anzahl von Elementen], $\mathfrak{D} = \{ A \subseteq \Omega \mid A$ hat gerade Anzahl von Elementen$\}$. Wenn $\#\Omega \geq 4$, so ist $\mathfrak{D}$ keine Algebra (warum?) aber ein Dynkin-System.

Bem Sei $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System. Es folgt $\emptyset = \Omega^c \in \mathfrak{D}$. Ist $A, B \in \mathfrak{D}$ mit $A \subseteq B$, so ist $B^c \cap A = \emptyset \Rightarrow B - A = A^c \cap B = (A \cup B^c)^c \in \mathfrak{D}$.

8. **Lemma** Ist S eine Menge von Dynkin-Systemen, $S \neq \emptyset$, so ist auch $\bigcap S$ ein Dynkin-System.

(Beweis wie oben).

Folgerung Ist $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, so gibt es ein kleinstes Dynkin-System $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D}$, nämlich

$$\mathcal{D} = \bigcap \{ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathcal{B} \text{ Dynkin-System mit } \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B} \}$$

Schreibe $\mathcal{D} = \langle \mathcal{Z} \rangle_{Dyn}$.

→

Dynkin-Systeme sind eine Hilfs-Konstruktion um σ-Algebren zu identifizieren. Es gilt nämlich Folgendes. Wir nennen $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ <u>$\cap$-stabil</u> ("Schnitt-stabil") wenn gilt: $A, B \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Z}$.

9. **Satz** Ein Dynkin-System $\mathcal{A}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\mathcal{A}$ $\cap$-stabil ist.

Beweis Jede (σ-)Algebra ist $\cap$-stabil, denn

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c.$$

Sei $\mathcal{A}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System.

Für $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}$, also ist $\mathcal{A}$ eine Algebra.

(*) Wie vorher zeigt man: ist $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung, $\mathcal{D}_2$ ein Dynkin system auf Ω_2, so ist $f^*(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_1 = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{D}\}$ ein Dynkin-System auf Ω_1.

Sei $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $B_0 = A_0$,

$B_n = A_n - (A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ für $n \geq 1$

Es gilt $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1} \in \mathcal{A}$ (weil $\mathcal{A}$ Algebra ist)

also auch $B_n \in \mathcal{A}$ (weil $\mathcal{A}$ Algebra ist)

$B_m \cap B_n = \emptyset$ für $m \neq n$ und $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. $\square$

10. Satz (Sierpiński - Dynkin)

Sei $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine $\cap$-stabile Menge.

Dann gilt $\langle \mathcal{Z} \rangle_{Dyn} = \langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$.

Beweis $\langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$ ist ein Dynkin-System, also

$\mathcal{D} = \langle \mathcal{Z} \rangle_{Dyn} \subseteq \langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$. Es genügt für "$\supseteq$"

zu zeigen, dass $\langle \mathcal{Z} \rangle_{Dyn} = \mathcal{D}$ $\cap$-stabil ist, denn

dann ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra nach §1.9.

Für $A \subseteq \Omega$ setze $\mathcal{D}_A = \{ B \subseteq \Omega \mid A \cap B \in \mathcal{D} \}$.

Beh 1 $A \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}_A$ ist Dynkin-System.

Denn: $\cdot$ $A \cap \Omega = A \in \mathcal{D}_A \Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}_A$.

$\cdot$ $B \in \mathcal{D}_A \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{D}$ $\Rightarrow A \cap B^c = A - (A \cap B) \in \mathcal{D}$

vgl. §1.7 !

also $B^c \in \mathcal{D}$.

$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c = (A^c \cup (A \cap B))^c$

• $A_n \in \mathcal{D}_A$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$

$$\Rightarrow A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap A_n) \in \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_A . \ \square$$

<u>Beh 2.</u> Wenn $A \in \mathcal{Z}$, dann $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_A$.

<u>Bew:</u> $\mathcal{D}_A$ ist Dynkin-System nach <u>Beh 1</u>. Sei $B \in \mathcal{Z}$ beliebig. Dann ist $A \cap B \in \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow B \in \mathcal{D}_A$ also $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D}_A$. Es folgt $\langle \mathcal{Z} \rangle_{Dyn} \subseteq \mathcal{D}_A$. $\square$

<u>Beh 3.</u> Wenn $A \in \mathcal{D}$, dann $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_A$.

<u>Bew:</u> Sei $B \in \mathcal{Z}$ beliebig. Es folgt mit Beh. 2
$A \in \mathcal{D}_B$, also $B \cap A \in \mathcal{D}$, also $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D}_A$
und damit $\langle \mathcal{Z} \rangle_{Dyn} \subseteq \mathcal{D}_A$. $\square$

Nun folgt, dass $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil ist, denn für $A, B \in \mathcal{D}$ gilt $B \in \mathcal{D}_A$, also $A \cap B \in \mathcal{D}$. $\square$

11. <u>Korollar</u> Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, so ist

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{Dyn} = \langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} .$$

12. <u>Satz</u> Sei $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung, sei $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$, $f^*(\mathcal{Z}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{Z}\}$.

Dann gilt

$$f^*(\langle \mathcal{Z} \rangle_{xyz}) = \langle f^*(\mathcal{Z}) \rangle_{xyz} \quad \text{für}$$

$xyz =$ Dyn, Alg, σ-Alg.

<u>Beweis</u> (Für $xyz =$ Alg, die anderen Fälle sind analog.)

$f^*(\langle \mathcal{Z} \rangle_{Alg})$ ist eine Algebra, die $f^*(\mathcal{Z})$ enthält (nach § 1.2). Es folgt

$$f^*(\langle \mathcal{Z} \rangle_{alg}) \supseteq \langle f^*(\mathcal{Z}) \rangle_{alg}.$$

Setze $\tilde{A}_2 = \{A \subseteq \Omega_2 \mid f^{-1}(A) \in \langle f^*(\mathcal{Z}) \rangle_{alg}\}$

Dann ist $\tilde{A}_2$ eine Algebra auf Ω_2, denn:

$\Omega_2 \in \tilde{A}_2$, $A, B \in \tilde{A}_2$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$\rightsquigarrow A \cup B \in \tilde{A}_2$, $f^{-1}(\Omega_2 - A) = \Omega_1 - f^{-1}(A)$

$\rightsquigarrow A^c \in \tilde{A}_2$

Es folgt $\langle \mathcal{Z} \rangle_{Alg} \subseteq \tilde{A}_2$, also

$$f^*(\langle \mathcal{Z} \rangle_{alg}) \subseteq f^*(\tilde{A}_2) = \langle f^*(\mathcal{Z}) \rangle_{Alg}$$

13. <u>Def</u> Wir setzen $[0,\infty] = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} \cup \{\infty\}$

mit der Anordnung $t \leq \infty$ für alle $t \in [0,\infty]$

und $s \leq t$ falls $t - s \geq 0$ für $s,t \in \mathbb{R}$.

Weiter definieren wir die Addition durch

$$s+t = \begin{cases} \infty & \text{falls } s=\infty \text{ oder } t=\infty \\ s+t & \text{falls } s,t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dann ist $[0,\infty]$ eine kommutative Halbgruppe mit 0,

d.h. $s+t = t+s$, $0+t = t$, $s+(t+r) = (s+t)+r$

(nachrechnen mit Fallunterscheidungen)

Subtraktion ist <u>nicht</u> erlaubt!

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Ein <u>Inhalt</u> ist eine

Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ mit

(I1) $\mu(\emptyset) = 0$

(I2) $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Wir nennen μ ein <u>Prämaß</u>, wenn zusätzlich

gilt (I3) Für $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$

für alle $n \neq m$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A \in \mathcal{A}$

$$\text{Folgt: } \mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

(wobei die rechte Seite ∞ ist, wenn die Reihe divergiert oder wenn $\mu(A_n) = \infty$ für ein n)

Schließlich nennen wir μ ein <u>Maß</u>, wenn μ ein Prämaß ist und wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

<u>Bsp</u> (a) Sei $\emptyset \neq A \subseteq \Omega$, $B = A^c$. Sei $a, b \in [0,\infty]$ beliebig. Setze $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = a$, $\mu(B) = b$, $\mu(\Omega) = a+b$ $\leadsto$ das ist ein Maß auf der σ-Algebra $\Omega = \{\emptyset, A, B, \Omega\}$

(b) Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $p_j \in [0,\infty]$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Setze $\mu(A) = \sum_{j \in A} p_j$ für $A \subseteq \Omega$. Das ist ein Maß auf $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

(c) Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A} = \left\{ A \subseteq \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ endlich oder} \\ A^c \text{ endlich} \end{array} \right\}$

Setze $\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ endlich} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Wenn Ω <u>endlich</u> ist, ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und μ ist ein Maß.

Wenn Ω <u>abzählbar unendlich</u> ist, ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, μ ist ein Inhalt, aber <u>kein</u> Prämaß

$$\mu(\Omega) = 1 \neq \sum_{a \in \Omega} \mu(\{a\}) = 0$$

Wenn Ω überabzählbar ist (= unendlich und nicht abzählbar) so ist μ ein Prämaß. (!) #

(d) $p \in \Omega$, $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Das ist ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$, das <u>Dirac-Maß</u> zum Punkt p.

(e) Ω beliebig, $\mu(A) = \begin{cases} \# A & \text{wenn } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

ist ein Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, das <u>Zählmaß</u>.

14. <u>Satz</u> (Eigenschaften von Inhalten und Maßen)

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, μ ein Inhalt. Dann gilt Folgendes

(i) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(ii) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iv) $A, B \in \mathcal{A}$, $\mu(A), \mu(B) \neq \infty \Rightarrow |\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$

(v) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$

(vi) $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$.

Beweis (ii) folgt weil $A \cap (B-A) = \emptyset$

und (ii) $\Rightarrow$ (i).

Zu (iii): $A = (A-B) \cup (A \cap B)$

$$\Rightarrow \mu(A) = \mu(A-B) + \mu(A \cap B)$$
$$\mu(B) = \mu(B-A) + \mu(A \cap B)$$
$$\mu(A \cup B) = \mu(A-B) + \mu(A \cap B) + \mu(B-A).$$

Zu (iv): $\mu(A) \leq \mu(A \cup B) = \mu(A-B) + \mu(B)$

mit $A - B \subseteq A \Delta B$

also $\mu(A) \leq \mu(A \Delta B) + \mu(B)$

genauso $\mu(B) \leq \mu(A \Delta B) + \mu(A)$

Zu (v): mit Induktion nach n, $n=1$ klar.

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n) \overset{(iii)}{\leq} \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + \mu(A_n)$$
$$\overset{(IA)}{\leq} \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_{n-1}) + \mu(A_n)$$

Zu (vi): Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} \mu(A_k) = \mu(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_m) \overset{(i)}{\leq} \mu(A)$$

also $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$. $\square$

15. Satz Sei A eine Algebra, μ ein Inhalt.

Dann sind äquivalent:

(i) μ ist ein Prämaß

(ii) für jede aufsteigende Kette $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ mit $A_n \in A$ für alle n und $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in A$ gilt

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$$

Beweis (i) => (ii):

Setze $B_0 = A_0$, $B_n = A_n - A_{n-1}$ für $n \geq 1$.

Dann gilt $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, $B_n \in A$ und

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_n \mu(A_n).$$

(ii) => (i): Sei $B_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ für alle $n \neq m$, sei $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in A$.

Setze $A_n = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n$, es folgt

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k).$$

$\square$

16. <u>Satz</u> Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, μ ein Inhalt.
Falls für jede absteigende Kette $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ ~~$\in \mathcal{A}$~~ gilt

$\lim \mu(A_n) = 0$, so ist μ ein Prämaß.

<u>Bew.</u> Sei $B_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $B_n \cap B_m = \emptyset$ für alle $n \neq m$, sei $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ mit $B \in \mathcal{A}$. ZZ: $\mu(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k)$.

Setze $A_n = B - (B_0 \cup \ldots \cup B_n) \leadsto A_n \in \mathcal{A}$,

$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$, also $\lim_n \mu(A_n) = 0$.

$$\mu(B) = \mu(A_n) + \mu(B_0) + \ldots + \mu(B_n)$$
$$= \mu(A_n) + \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) \quad \text{jetzt Grenzwert}$$

$$\mu(B) = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k)$$

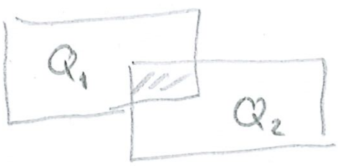
$\square$

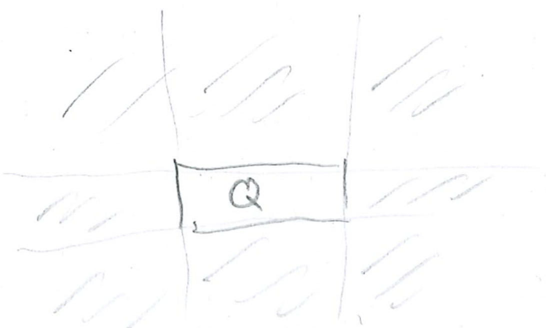
17. <u>Def</u> Ein <u>Intervall</u> (in $\mathbb{R}$) ist ein Menge der Form $[a,b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \le t \le b\}$,
$(a,b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$, $[a,b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a \le t < b\}$
$(a,b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t \le b\}$, $(-\infty, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid t \le b\}$
$(-\infty, b) = \{t \in \mathbb{R} \mid t < b\}$, $(a, \infty) = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t\}$
$[a, \infty) = \{t \in \mathbb{R} \mid a \le t\}$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ (auch $\emptyset = (a,a)$ ist ein Intervall; ebenso $\{a\} = [a,a]$)

Beobachten: I, J Intervall $\Rightarrow$ $I \cap J$ auch Intervall
$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $\Rightarrow$ $I^c = I - \mathbb{R}$ ist <u>disjunkte</u> Vereinig von Intervallen.

Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$. Ein <u>Quader</u> $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Menge der Form $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, $I_1, \dots, I_n$ Intervall

Es folgt: Q_1, Q_2 Quader $\Rightarrow$ $Q_1 \cap Q_2$ Quader
Q Quader $\Rightarrow$ $Q^c = \mathbb{R}^n - Q$ ist disjunkte Vereinig von endlich vielen Quadern.





Wir setzen $A(n) = \{Q_1 \cup \dots \cup Q_m \mid Q_k \text{ Quader in } \mathbb{R}^n,\ Q_k \cap Q_l = \emptyset \text{ für } k \ne l\}$

<u>Lemma A</u> Sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Quader in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $\mathcal{A}(n) = \langle \mathcal{Z} \rangle_{Alg}$.

<u>Beweis</u> Ist $A, B \in \mathcal{A}(n)$, so ist $A \cap B \in \mathcal{A}(n)$,

denn: $A = Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$, $B = P_1 \cup \ldots \cup P_\ell$

$\Rightarrow A \cap B = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{\ell} \underbrace{(Q_i \cap P_j)}_{\text{Quader}}$. Damit auch

$A^c = Q_1^c \cap \ldots \cap Q_m^c \in \mathcal{A}(n)$. Weiter ist

$\Omega = \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}(n)$ sowie $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}(n)$.

Damit ist $\mathcal{A}(n)$ eine Algebra, also $\mathcal{A}(n) \supseteq \langle \mathcal{Z} \rangle_{Alg}$.

Für $A = Q_1 \cup \ldots \cup Q_m \in \mathcal{A}(n)$ gilt aber $A \in \langle \mathcal{Z} \rangle_{Alg}$,

also $\mathcal{A}(n) \subseteq \langle \mathcal{Z} \rangle_{Alg}$. $\square$

Für $r > 0$ setzen wir $\Omega_r = [-r, r]^n \subseteq \mathbb{R}^n$

sowie $\mathcal{A}(n)_r = \mathcal{A}(n) | \Omega_r$. Das ist nach

§1.2 eine Algebra, die von $\mathcal{Z} | \Omega_r$ erzeugt wird

(nach §1.12)

Die <u>Länge</u> eines Intervalls $I = (a,b), [a,b], (a,b], [a,b)$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ sei $\ell(I) = b - a$.

Wir setzen $\ell(\emptyset) = 0$, $\ell(I) = \infty$ falls

$I = (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, a], (-\infty, \infty)$.

Das **Volumen** eines Quaders $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $v(Q) = l(I_1) \cdot l(I_2) \cdots l(I_n)$

(mit Rechenregel $0 \cdot \infty = 0$!))

#

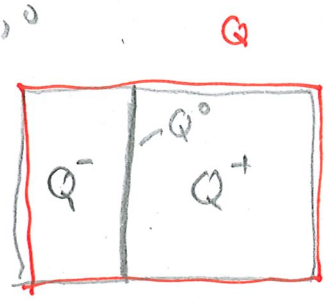
Beobachtung. Ist $c \in I_k$, $1 \le k \le n$

so setze

$$\left.\begin{aligned} I_k^- &= I_k \cap (-\infty, c) \\ I_k^0 &= \{c\} \\ I_k^+ &= I_k \cap (c, \infty) \end{aligned}\right\} \quad I_k = I_k^- \,\dot\cup\, I_k^0 \,\dot\cup\, I_k^+$$

$$Q^\varepsilon = I_1 \times \dots \times I_k^\varepsilon \times \dots \times I_n \qquad \varepsilon = +, -, 0$$

$$\leadsto \quad v(Q) = v(Q^-) + v(Q^+) + \underbrace{v(Q^0)}_{=0}$$



Wir haben Q zerlegt längs der affinen Hyperebene

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k = c\}.$$

Lemma B Für $A \in \mathcal{A}(n)_r$ definieren wir

$$\mu_r(A) = v(Q_1) + \dots + v(Q_m) \quad \text{wobei}$$

$Q_1, \dots, Q_m \subseteq \Omega_r$ Quader sind, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$A = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$.

Dann ist μ_r ein Inhalt auf $\mathcal{A}(n)_r$.

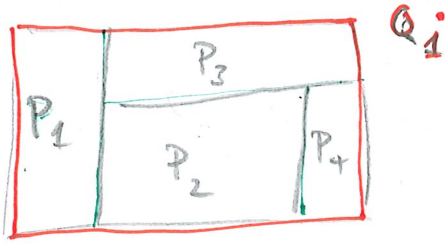
Beweis Wir müssen zeigen, dass μ_r wohldefiniert ist, d.h. folgendes: ist

$$A = Q_1 \cup \dots \cup Q_m = P_1 \cup \dots \cup P_\ell$$

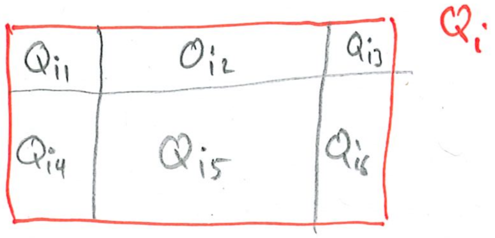
Q_i, P_j Quader, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$$\overset{!}{\Longrightarrow} v(Q_1) + \dots + v(Q_m) = v(P_1) \cup \dots \cup v(P_\ell)$$

z.B. 

Idee Wir zerschneiden jedes Q_i in Teilquader $Q_{i,1}, \dots, Q_{i,p_i}$ längs der (endlich vielen) affinen Hyperebenen, die die P_j begrenzen



Es folgt $Q_i \cap P_j = Q_{i,k_1} \cup \dots \cup Q_{i,k_j}$ mit

$$v(Q_i \cap P_j) = v(Q_{i,k_1}) + \dots + v(Q_{i,k_j})$$

sowie $v(Q_i) = v(Q_i \cap P_1) + \dots + v(Q_i \cap P_\ell)$

also $\mu_r(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\ell} v(P_i \cap Q_j)$.

Klar: $\mu(\emptyset) = 0$, $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$
und $B = P_1 \cup \dots \cup P_e$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = Q_1 \cup \dots \cup Q_n \cup P_1 \cup \dots \cup P_m$

$\mu_r(A \cup B) = \mu_r(A) + \mu_r(B)$ $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass μ_r ein Prämaß ist. Dazu brauchen wir einen Hilfsatz.

18. Satz Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $C_n \subseteq X$ kompakte Teilmenge, für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $C_0 \cap C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.

Beweis Wähle $c_n \in C_0 \cap \dots \cap C_n$ für jedes n.
$\Rightarrow (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in C_0, C_0 kompakt $\Rightarrow$ es gibt eine konvergente Teilfolge $(c_j)_{j \in J}$ $J \subseteq \mathbb{N}$ unendlich mit $\lim_{j \in J} c_j = c$. Da $c_k \in \underbrace{C_0 \cap \dots \cap C_n}_{\text{abg in } X}$ für alle $k \geq n$ folgt $c \in C_0 \cap \dots \cap C_n$ für alle $n \geq 0$
$\Rightarrow c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ $\square$

Ohne Kompaktheit ist das Falsch, z.B.
$C_n = (0, 2^{-n})$ $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \emptyset$ aber
$\emptyset \neq C_0 \cap \dots \cap C_n = C_n$ für $n \in \mathbb{N}$

19. <u>Lemma</u> μ_r ist ein Prämaß auf $\mathcal{A}(n)_r$.

<u>Beweis</u> Wir benutzen Satz §1.16. Sei
$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$ eine absteigende Kette mit $A_k \in \mathcal{A}(n)_r$,
für alle $k \in \mathbb{N}$, und mit $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k = \emptyset$.

Zu zeigen ist: $\lim\limits_{k} \mu_r(A_k) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$.

Für jedes $A_k = Q_{1,k} \cup \dots \cup Q_{s_k,k}$ $\quad Q_{i,l}$ Quader, $s_k > 0$
wählen wir <u>abg.</u> Quader $P_{i,k} \subseteq Q_{i,l}$ so, dass
$v(Q_{i,k}) \leq v(P_{i,k}) + \frac{\varepsilon}{2} 2^{-k} \cdot \frac{1}{s_k}$. Es folgt mit
$B_k = P_{1,k} \cup \dots \cup P_{s_k,k} \subseteq A_k$, dass $B_k \in \mathcal{A}(n)_r$ und
$\mu_r(A_k) \leq \mu_r(B_k) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-k}$. Weiter ist B_k
abg in $\mathbb{R}^n$ und $B_k \subseteq [-r,r]^n \Rightarrow B_k$ kompakt
(abg. + beschränkt in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ kompakt nach Heine-Borel)
Wegen $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} B_k \subseteq \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k = \emptyset$ gibt es nach §1.18 ein
$n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\bigcap\limits_{k=0}^{n_0} B_k = \emptyset$.

Setze $C_k = B_0 \cap B_1 \cap \dots \cap B_k$. Es gilt

$$A_m - C_m = A_m \cap C_m^c = A_m \cap \bigcup_{k=0}^{m} B_k^c = \bigcup_{k=0}^{m} (A_m \cap B_k^c)$$

$$= \bigcup_{k=0}^{m} (A_m - B_k) \underset{\substack{\uparrow \\ A_m \subseteq A_k}}{\subseteq} \bigcup_{k=0}^{m} (A_k - B_k), \quad \text{also}$$

nach § 1.14 $\mu_r(A_m - C_m) \leq \sum_{h=0}^{m} \mu_r(A_h - B_h)$

$\leq \sum_{h=0}^{m} \frac{\varepsilon}{2} 2^{-h} \leq \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} 2^{-h} = \varepsilon$. Für $m \geq n_0$ ist $C_m = \phi$,

also $\mu_r(A_m) = \mu_r(A_m - C_m) \leq \varepsilon$. $\square$

20. <u>Korollar</u> Die Abbildung $\tilde{\mu}_r : A \longmapsto \mu_r(A \cap [-r,r]^n)$

ist ein Prämaß auf $\mathcal{A}(n)$.

<u>Beweis</u> $\tilde{\mu}_r(\phi) = \mu_r(\phi) = 0$ (v)

Ist $A_h \in \mathcal{A}(n)$, $A_h \cap A_j = \phi$ für $h \neq j$ mit

$\dot{\bigcup}_{h=0}^{\infty} A_h = A \in \mathcal{A}(n)$, so gilt $\tilde{\mu}_r(A) = \mu_r(A \cap [-r,r]^n)$

$= \mu_r\left(\dot{\bigcup}_{h=0}^{\infty}(A_h \cap [-r,r]^n)\right) \underset{\mu_r \text{ Prämaß}}{=} \sum_{h=0}^{\infty} \mu_r(A_h \cap [-r,r]^n)$

$= \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{\mu}_r(A_h)$ (beachte: $A \cap [-r,r]^n \in \mathcal{A}(n)_r$) $\square$

Wir sind nicht an $\tilde{\mu}_r$ interessiert, sondern an

$\mu = \lim_{r \to \infty} \mu_r$. Dazu brauchen wir einen Satz.

21\. <u>Satz</u> Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, sei $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Prämaßen mit $\mu_k(A) \leq \mu_{k+1}(A)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\mu(A) = \lim_k \mu_k(A)$$

ist ein Prämaß auf $\mathcal{A}$.

(Dabei ist der Limes einer unbeschränkten Folge ∞)

<u>Beweis</u> Es gilt $\mu_k(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$ (v)

Sind $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$, so folgt
$\mu_k(A \cup B) = \mu_k(A) + \mu_k(B)$, es folgt

$$\mu(A \cup B) = \lim_k \mu_k(A \cup B) = \lim_k (\mu_k(A) + \mu_k(B))$$
$$\overset{\circledast}{=} \lim_k \mu_k(A) + \lim_k \mu_k(B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$\circledast$ gilt nach Ana I, wenn beide Folgen beschränkt sind, aber auch, wenn $\mu_k(A)$ oder $\mu_k(B)$ unbeschränkt ist.

Damit ist μ ein Inhalt. Jetzt benutzen wir §1.15. Sei $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ aufsteigende Kette, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Zu zeigen: $\mu(A) = \lim_k \mu(A_k)$

Angenommen, $\mu(A) \neq \lim_k \mu(A_k)$. Dann ist

$\mu(A) > \lim_k \mu(A_k) = s$ (denn $A_k \subseteq A$ und μ ist Inhalt)

Es folgt $\mu(A_k) \leq s$ für alle $k \in \mathbb{N}$, da die Folge $(\mu(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

Also $\mu(A_k) = \lim_m \mu_m(A_k) \leq s$. Da $\mu_m \leq \mu_{m+1}$ folgt $\mu_m(A_k) \leq s$ und damit $\lim_k \mu_m(A_k) = \mu_m(A) \leq s$.

Das ist ein Widerspruch zu $\mu(A) = \lim_m \mu_m(A) > s$. $\square$

#

22. Def Für $A \in \mathcal{A}(n)$ setzen wir

$$\mu(A) = \lim_k \tilde{\mu}_k(A) \qquad \text{(vgl §1.20)}$$

Nach §1.21 ist das ein Prämaß auf $\mathcal{A}(n)$, das Lebesgue-Prämaß.

Beobachtung Ist Q ein Quader mit $v(Q) < \infty$, so gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $Q \subseteq [-k,k]^n$, es folgt $\mu(Q) = v(Q)$. Ist $v(Q) = \infty$, so ist die Folge $v(Q \cap [-k,k]^n)$ unbeschränkt, also $\mu(Q) = \infty$.

In jedem Falle gilt also $v(Q) = \mu(Q)$.