§3 Messbare Abbildungen und Integrale

1. <u>Def</u> Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra mit Grundmenge Ω. Dann nennen wir $(\mathcal{A}, \Omega)$ ein <u>Messraum</u>*. Ist μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so heißt $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ <u>Maßraum</u>, vgl §2.16. Seien $(\mathcal{A}_1, \Omega_1)$ und $(\mathcal{A}_2, \Omega_2)$ Messräume. Eine Abbildung $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt <u>messbar</u> (genauer: <u>$\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar</u>), wenn für jedes $A \in \mathcal{A}_2$ gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$, d.h. wenn gilt $f^*(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$, vgl §1.5.

Ist $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}_2$ ein Erzeugendensystem, d.h. $\langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \mathcal{A}_2$, so gilt folgendes: $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ ist messbar genau dann, wenn gilt $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1$ für alle $E \in \mathcal{Z}$. Denn dann gilt $\langle f^*(\mathcal{Z}) \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = f^*(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$, vgl. §1.12.

---

* Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen <u>messbare Mengen</u>.

2. Beispiel (a) Wenn $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ konstant ist, dann ist f messbar. Denn: $f(x) = q = \text{const}$

$$f^{-1}(E) = \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } q \notin E \\ \Omega_1 & \text{wenn } q \in E \end{cases}$$

(b) Wenn $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, dann ist f messbar bzgl $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, denn: für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $f^{-1}(U)$ offen nach Analysis II:

$\ulcorner$ $f(p) = q \in U \rightsquigarrow$ es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q) \subseteq U$. $\urcorner$
sowie $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(q)$
$\llcorner$ $\Rightarrow B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U)$ offen. $\lrcorner$

Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{O} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$ $\quad \mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{R}^m \mid U \text{ offen}\}$

folgt die Behauptung.

(c) Sind $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ und $g: \Omega_2 \to \Omega_3$ messbar für Messräume $(\mathcal{A}_i, \Omega_i)$ $i = 1, 2, 3$, so ist auch $g \circ f: \Omega_1 \to \Omega_3$ messbar.

Denn: $A \in \mathcal{A}_3 \Rightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{A}_1$

3. Def Sind $(\mathcal{A}_1, \Omega_1)$ und $(\mathcal{A}_2, \Omega_2)$ Messräume, so schreiben wir $M(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \{ f : \Omega_1 \to \Omega_2 \mid f \text{ messbar} \}$

$$= \{ f : \Omega_1 \to \Omega_2 \mid f^*(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1 \}.$$

Wir setzen $[-\infty, \infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sowie

$$\mathcal{B}([-\infty,\infty]) = \{ A \subseteq [-\infty,\infty] \mid A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$
$$= \{ B \cup F \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ F \subseteq \{-\infty,\infty\} \}$$

Dann ist $\mathcal{B}([-\infty,\infty])$ eine σ-Algebra.

Die folgenden Mengen sind Erzeugendensystem für $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$\mathcal{Z}_1 = \{ (-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{Z}_2 = \{ (-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{Z}_3 = \{ (a, \infty) \mid a \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{Z}_4 = \{ [a, \infty) \mid a \in \mathbb{R} \}$

Die folgenden Mengen sind Erzeugendensysteme für $\mathcal{B}([-\infty,\infty])$:

$\mathcal{Z}_5 = \{ [-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{Z}_6 = \{ [-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{Z}_7 = \{ (a, \infty] \mid a \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{Z}_7 = \{ [a, \infty] \mid a \in \mathbb{R} \}$

Denn: $\langle \mathcal{Z}_1 \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \langle \mathcal{Z}_4 \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$ (Komplementbildung), enthalten sind Intervalle der Form $[a,b)$, also auch $\{a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a, a+\frac{1}{k}]$, also auch $[a,b], [a,b), (a,b]$.

Die anderen Fälle sind ähnlich; $\{\infty\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} [k, \infty]$ usw.

$\square$

4. <u>Lemma</u> Sei (A,Ω) ein Messraum, sei $F = M(A, \mathcal{B}([-\infty,\infty]))$, sei $f_k \in F$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

(i) $\inf\limits_k f_k \in F$, $\sup\limits_k f_k \in F$, $\limsup\limits_k f_k \in F$,

$\liminf\limits_k f_k \in F$.

Dabei ist $(\inf\limits_k f_k)(p) = \inf\limits_k (f_k(p))$ etc...

(ii) falls $f(p) = \lim\limits_k f_k(p)$ für jedes p existiert, so ist $f \in F$

(iii) Für $f, g \in F$ ist $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\} \in F$

Dabei ist $(\min\{f,g\})(p) = \min\{f(p), g(p)\}$ etc...

<u>Beweis</u> (i) Sei $f(p) = \inf\limits_k f_k(p) \in [-\infty, \infty]$

Zeige: $f \in F$. Es gilt nun für $a \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\{p \in \Omega \mid f(p) \geq a\}}_{= f^{-1}([a,\infty])} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{p \in \Omega \mid f_k(p) \geq a\} \in A$$

und mit §3.3 folgt $f \in F$.

Genauso mit $f(p) = \sup\limits_k f_k(p)$

$$\{p \in \Omega \mid f(p) \leq a\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{p \in \Omega \mid f_k(p) \leq a\} \in A$$

Weiter gilt mit $\liminf_k f_k(p) = f(p)$, dass

$$f(p) = \sup_k \underbrace{\left(\inf_{l \geq k} f_l(p) \right)}_{= \tilde{f}_k(p)} \qquad \tilde{f}_k \in F \Rightarrow f \in F$$

und $\limsup_k f_k(p) = f(p)$ mit $f(p) = \inf_k \sup_{l \geq k} f_l(p)$ $\square$

(ii) Wenn $\lim f_k(p) = f(p)$ für jedes p existiert, so gilt

$\lim_k f_k(p) = \limsup_k f_k(p)$, also $f \in F$ nach (i). $\square$

(iii) Setze $f_0 = f$, $f_k = g$ für alle $k \geq 1$

$\Rightarrow \max\{f, g\} = \sup f_k$, benutze jetzt (i) $\square$

$\square$

5. <u>Satz</u> Sei (A, Ω) ein Messraum. Dann ist $M(A, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ein reeller Vektorraum und ein Ring. Das heißt: Für $f, g \in M(A, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$f + g \in M(A, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$
$$f \cdot g \in M(A, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$
$$s \cdot f \in M(A, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Beweis Sei $\mathcal{F} = M(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $f, g \in \mathcal{F}$, $s \in \mathbb{R}$.

Beh $f+g \in \mathcal{F}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt

$\{p \in \Omega \mid f(p)+g(p) < a\} = \bigcup \{ p \in \Omega \mid u, v \in \mathbb{Q},$
$u+v<a,\ f(p) < u$ und $g(p) < v\} \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow (f+g)^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A} \Rightarrow f+g$ messbar nach §3.1, 3.3

Beh $s \cdot f \in \mathcal{F}$

Das ist klar für $s=0$ (konstante Funktion sind messbar).

Für $s>0$ ist $\{p \in \Omega \mid s \cdot f(p) < a\} = \underbrace{\{p \in \Omega \mid f(p) < \frac{a}{s}\}}_{\in \mathcal{A}}$

Für $s<0$ ist $\{p \in \Omega \mid s \cdot f(p) < a\} = \underbrace{\{p \in \Omega \mid f(p) > \frac{a}{s}\}}_{\in \mathcal{A}}$

Benutze jetzt wieder §3.1, 3.3.

Damit ist $\mathcal{F}$ ein reeller Vektorraum.

Schreibe jetzt $f_+ = \max\{f, 0\}$ $\quad f_- = \min\{f, 0\}$

$\Rightarrow f = f_+ + f_-$, $f_+, f_- \in \mathcal{F}$, denn für $a \geq 0$

ist $\{p \in \Omega \mid f_+(p) \geq a\} = \{p \in \Omega \mid f(p) \geq a\}$

für $a<0$ ist $\{p \in \Omega \mid f_+(p) \geq a\} = \{p \in \Omega \mid f(p) \geq 0\}$

Analog $g = g_+ + g_-$

Nun gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$\{p \in \Omega \mid f_+(p) \cdot g_+(p) < a\} = \bigcup \{p \in \Omega \mid u, v \in \mathbb{Q},\ u, v \geq 0,\ u \cdot v < a,\ f_+(p) < u \text{ \underline{und} } g_+(p) < v\} \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow f_+ \cdot g_+ \in \mathcal{F}$, analog $f_+ \cdot g_-$, $f_- \cdot g_+$, $f_- \cdot g_- \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow f \cdot g = (f_+ + f_-) \cdot (g_+ + g_-) \in \mathcal{F}$. $\square$

6. Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ folgt

$$f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f_+, f_- \in \mathcal{F} \Rightarrow |f| = f_+ - f_- \in \mathcal{F}.$$

Beachte: ist $X \subseteq \Omega$ nicht messbar, so ist χ_X nicht messbar,

$\chi_X(p) = \begin{cases} 1 & p \in X \\ 0 & p \in X^c \end{cases}$, aber $\chi_X + \chi_{X^c} = 1$ ist messbar! #

Für $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}([-\infty, \infty]))$ gilt ebenfalls $f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f_+, f_- \in \mathcal{F} \Rightarrow |f| \in \mathcal{F}$.

Ist $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, so ist auch $f \cdot g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}([-\infty, \infty]))$, Beweis wie oben.

(Mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$)

7. <u>Def</u> Sei (A, Ω) ein Messraum. Wir nennen $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eine <u>Elementarfunktion</u>, falls $f \in M(A, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und falls f nur endlich viele (verschiedene) Werte $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ annimmt. Mit $A_j = \{ p \in \Omega \mid f(p) = a_j \}$ folgt dann

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \chi_{A_j} \qquad \left(\chi_E(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

Sei $E(A)$ der reelle Vektorraum aller Elementarfunktionen, $E_+(A) = \{ f \in E(A) \mid f \geq 0 \}$

Die Elementarfunktionen spielen die Rolle der Stufenfunktionen in der Analysis I.

8. <u>Satz</u> Sei $f \in M(A, \mathcal{B}([-\infty, \infty]))$ mit $f \geq 0$. Dann existieren Elementarfunktionen $f_k \in E_+(A)$ so dass die Folge $f_k(p)$ für jedes p monoton wachsend, mit $f = \lim_k f_k$.

Falls f beschränkt ist, können wir sogar gleichmäßige Konvergenz erreichen, d.h. $\lim_k \| f - f_k \|_\infty = 0$

Beweis Wir setzen für $k, n \in \mathbb{N}$

$$A_{n,k} = \{ p \in \Omega \mid \frac{k}{2^n} \leq f(p) < \frac{k+1}{2^n} \} \in \mathcal{A}$$

$$B_n = \{ p \in \Omega \mid f(p) \geq n \} \in \mathcal{A}$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{A_{n,k}} + n \cdot \chi_{B_n} \in E_+(\mathcal{A}).$$

① Ist $f(p) = \infty$, so ist $f_n(p) = n \Rightarrow \lim_n f_n(p) = f(v)$

② Angenommen, $f(p) < \infty$. Dann gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq f(p) < m+1$.

Für $n \leq m$ ist $p \in B_n$ und für $k \leq n \cdot 2^n - 1$ ist $\frac{k+1}{2^n} \leq n \leq m$, also $p \notin A_{n,k}$

$\Rightarrow f_n(p) = n$ für $n \leq m$.

Für $n > m$ ist $p \notin B_n$ und es gibt genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{k}{2^n} \leq f(p) < \frac{k+1}{2^n}$.

Wegen $f(p) < n$ ist $k \leq n \cdot 2^n - 1$, also

$$f_n(p) = \frac{k}{2^n} \Rightarrow |f(p) - f_n(p)| \leq \frac{1}{2^n}$$

Weiter $f_{n+1}(p) = \frac{k'}{2^{n+1}}$, $\frac{k'}{2^{n+1}} \leq f(p) < \frac{k'+1}{2^{n+1}}$

also folgt $\dfrac{k}{2^n} \leq \dfrac{k'}{2^{n+1}}$, denn

$\dfrac{2k}{2^{n+1}} \leq f(p) < \dfrac{2k+2}{2^{n+1}}$, $\dfrac{k'}{2^{n+1}} \leq f(p) < \dfrac{k'+1}{2^{n+1}} \Rightarrow 2k \leq k'$.

Wir haben gezeigt: für jedes $p \in \Omega$ ist $(f_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend (*) mit $\lim\limits_n f_n(p) = f(p)$.

Wenn $n \geq f(p)$ für alle $p \in \Omega$ gilt, so folgt für alle p $|f(p) - f_n(p)| \leq 2^{-n}$; wenn also f beschränkt ist, so ist $\lim\limits_n \|f - f_n\|_\infty = 0$ $\square$

9. <u>Def</u> Sei (A, Ω, μ) ein Maßraum, sei $f \in E_*(A)$. Wir definieren das <u>Integral</u>

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int f \, d\mu = \sum_{k=1}^m a_k \cdot \mu(A_k)$$

wobei $f = \sum\limits_{k=1}^m a_k \cdot \chi_{A_k}$ $\quad a_k \geq 0$

$f(\Omega) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ p.w. verschieden, $A_k = \{p \in \Omega \mid f(p) = a_k\}$

$$\int_\Omega f \, d\mu \in [0, \infty]$$

(*) dann: $f_k(p) = k \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \le f(p) < m+1$

$$f_{m+1}(p) = \frac{k}{2^{m+1}} \le f(p) < \frac{k+1}{2^{m+1}} \Rightarrow m \le \frac{k}{2^{m+1}}$$

und $f_{n+1}(p) \ge f_n(p)$ für $n > m$.

Also $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ □

10. Einfache Eigenschaften des Integrals

Sei $f, g \in E_+(A)$, $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$. Dann gilt

$$\int_\Omega s \cdot f \, d\mu = s \cdot \int_\Omega f \, d\mu \quad \text{sowie}$$

$$\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu.$$

Beweis: Die erste Behauptung ist klar, wenn $s = 0$.

Für $s > 0$ ist $\{p \in \Omega \mid f(p) = a\} = \{p \in \Omega \mid s \cdot f(p) = s \cdot a\}$
$a \geq 0$

$f(\Omega) = \{a_1, \dots, a_m\}$ $\quad s \cdot f(\Omega) = \{s a_1, \dots, s a_m\}$

$$s \cdot \int_\Omega f \, d\mu = s \cdot \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{m} (s a_k) \mu(A_k) = \int_\Omega s \cdot f \, d\mu .$$

$f(\Omega) = \{a_1, \dots, a_m\}$ $\quad g(\Omega) = \{b_1, \dots, b_l\}$ p.w. verschieden

$A_k = f^{-1}(a_k)$ p.w. verschieden $\quad B_k = g^{-1}(b_k)$

$$\{p \in \Omega \mid f(p) + g(p) = c\} = \bigcup \{A_i \cap B_j \mid a_i + b_j = c\}$$

$(f+g)(\Omega) = \{c_1, \dots, c_n\}$ $\quad C_k = (f+g)^{-1}(c_k)$

$$\Rightarrow \int_\Omega (f+g) \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_i \cdot \mu(C_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{a_i + b_j = c_k} c_k \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) =$$

$$\sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_i a_i \mu(A_i) + \sum_j b_j \mu(B_j) \qquad \square$$

11. Korollar Sein $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}, \infty > a_1, \dots, a_m \geq 0$

Dann gilt für $f = a_1 \chi_{A_1} + \dots + a_m \cdot \chi_m$

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{k=1}^m a_k \cdot \mu(A_k). \qquad \square$$

12. Korollar Sei $f, g \in E_+(\mathcal{A})$ mit $f \leq g$.

Dann gilt $\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$.

Beweis Schreib $f = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^l b_j \chi_{B_j}$

mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ Setze $C_{ij} = A_i \cap B_j$
$B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$$f = \sum_{i,j} a_i \chi_{C_{ij}} \qquad g = \sum_{i,j} b_j \chi_{C_{ij}}$$

$f \leq g \Rightarrow a_i \leq b_j$ für alle $C_{ij} \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i,j} a_i \mu(C_{ij}) \leq \sum_{i,j} b_j \mu(C_{ij}) \qquad \square$$

13. <u>Satz</u> Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, sei $g, f_k \in E_+(\mathcal{A})$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Wenn für jedes p die Folge $(f_k(p))_{k \in \mathbb{N}}$ monoton steigt, mit $g(p) \leq \sup_k f_k(p) = \lim_k f_k(p)$, so gilt

$$\int_\Omega g \, d\mu \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_k \, d\mu .$$

<u>Beweis</u> Schreibe $g = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i}$, $g(\Omega) = \{\underbrace{b_1, \ldots, b_m}_{\text{paarw. verschieden}}\}$

Sei $0 < s < 1$. Setze

$A_n = \{ p \in \Omega \mid f_n(p) \geq s \cdot g(p) \} \in \mathcal{A}$

Es folgt $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ sowie $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

Folglich ist $\mu(B_i) = \lim_k \mu(B_i \cap A_k)$, vgl § 1.15.

Weiter gilt $f_n \geq s \cdot g \cdot \chi_{A_n}$ (nach Definition von A_n),

also $\int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega s \cdot g \cdot \chi_{A_n} \, d\mu = s \cdot \int_\Omega g \cdot \chi_{A_n} \, d\mu$

nach § 3.12. Weiter ist

$$\underbrace{\lim_n \int_\Omega g \cdot \chi_{A_n} \, d\mu}_{} = \underbrace{\lim_n \sum_{i=1}^m b_i \cdot \mu(B_i \cap A_n)}_{\text{monoton steigend}} = \int_\Omega g \, d\mu$$

$$= \sup_n \int_\Omega g \cdot \chi_{A_n} \, d\mu$$

Damit aber auch

$$\sup_n \int_\Omega f_n \, d\mu \geq s \cdot \int_\Omega g \, d\mu$$

Das ist richtig für jedes $0 < s < 1$, also auch

$$\sup_n \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega g \cdot d\mu \qquad \square$$

#

14. Korollar Seien $f_k, g_k \in E_+(A)$, $f \in M(A, \mathbb{B}([-\infty,\infty]))$

Angenommen, $f_k(p), g_k(p)$ steigen monoton für alle $p \in \Omega$, mit $\lim_k f_k(p) = f(p) = \lim_k g_k(p)$. Dann gilt

$$\sup_n \int_\Omega f_n \, d\mu = \sup_n \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

Beweis Mit §3.13 folgt aus

$$g_m(p) \leq \sup_n f_n(p) = f(p), \text{ dass}$$

$$\int_\Omega g_m \, d\mu \leq \sup_n \int_\Omega f_n \, d\mu \quad \text{, also}$$

$$\sup_m \int_\Omega g_m \, d\mu \leq \sup_n \int_\Omega f_n \, d\mu.$$ Genauso folgt die umgekehrte Ungleichung. $\square$

15. <u>Def</u> Sei $f \in M(\mathcal{A}, \mathcal{B}([-\infty,\infty]))$ mit $f \geq 0$, für ein Maßraum $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $f_k \in E_+(\mathcal{A})$ so, dass $f = \lim_k f_k$ wobei $(f_k(p))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sei für alle $p \in \Omega$, vgl §3.8. Wir definieren

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_k \int_\Omega f_k \, d\mu$$

Nach §3.14 hängt die linke Seite <u>nicht</u> von der Wahl der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ab.

16. <u>Lemma</u> Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, sei $f, g \geq 0$ mit $f, g \in M(\mathcal{A}, \mathcal{B}([-\infty,\infty]))$, sei $s \geq 0$.

Dann gilt: (i) $\int_\Omega s \cdot f \, d\mu = s \cdot \int_\Omega f \, d\mu$

(ii) $\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$

(iii) Ist $f \leq g$, so gilt $\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$.

<u>Beweis</u> Wir wählen Folgen $f_k, g_k \in E_+(\mathcal{A})$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ so dass $f_k(p), g_k(p)$ monoton wachsen, mit $f(p) = \lim_k f_k(p)$, $g(p) = \lim_k g_k(p)$ für alle $p \in \Omega$.

(i): Es gilt $\underbrace{\lim_k s\cdot f_k}_{= s\cdot \lim_k f_k} = s\cdot f$, also

$$\underbrace{s\cdot \lim_k \int_\Omega f_k \, d\mu}_{= s\cdot \int_\Omega f \, d\mu} = \lim_k \int_\Omega s\cdot f_k \, d\mu = \int_\Omega s\cdot f \, d\mu$$

(ii): Es gilt $\underbrace{\lim_k (f_k + g_k)}_{= \lim_k f_k + \lim_k g_k} = f+g$, also

$$\underbrace{\lim_k \int_\Omega f_k \, d\mu + \lim_k \int_\Omega g_k \, d\mu}_{= \lim_k \int_\Omega (f_k+g_k)\, d\mu} = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$$

$$= \lim_k \int_\Omega (f_k + g_k) \, d\mu = \int_\Omega (f+g) \, d\mu$$

(iii): Es gilt mit $h_k = \max\{f_k, g_k\}$, dass

$\lim_k h_k = g$ sowie $f_k \leq h_k$ und $h_k \in E_+(\mathcal{A})$.

Damit $\int_\Omega f_k \, d\mu \leq \int_\Omega h_k \, d\mu$ nach §3.12, also

$\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$. $\square$

17. <u>Def</u> Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, sei $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}([-\infty,\infty]))$. Sei $f_+ = \max\{0, f\}$, $f_- = \min\{0, f\}$. Wir nennen f <u>integrierbar</u> (genauer: <u>μ-integrierbar</u>), wenn gilt

$$\int_\Omega f_+ \, d\mu < \infty \quad \underline{\text{und}} \quad \int_\Omega (-f_-) \, d\mu < \infty.$$

Dann definieren wir

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f_+ \, d\mu - \int_\Omega (-f_-) \, d\mu$$

Mit $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ bezeichnen wir die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (f darf also nicht die Werte $-\infty, \infty$ annehmen).

18. <u>Lemma</u> Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, sei $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}([-\infty,\infty]))$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist integrierbar

(ii) $|f|$ ist integrierbar

<u>Beweis</u> $f_+ = \max\{0, f\}$, $f_- = \min\{0, f\}$

$\leadsto$ $f = f_+ + f_-$ $|f| = f_+ - f_-$.

Wenn $\int_\Omega f_+ \, d\mu < \infty$ und $\int_\Omega (-f_-) \, d\mu < \infty$, dann nach

§ 3.16 $\int_\Omega \underbrace{(f_+ - f_-)}_{=|f|} \, d\mu = \int_\Omega f_+ \, d\mu + \int_\Omega (-f_-) \, d\mu < \infty$

also (i) $\Rightarrow$ (ii).

Wenn $|f| = |f|_+$ integrierbar ist, so gilt

$f_+ \leq |f|$, $-f_- \leq |f|$, also nach § 3.16

$\int_\Omega f_+ \, d\mu \leq \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$ und $\int_\Omega (-f_-) \, d\mu \leq \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$,

damit (ii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

19. <u>Satz</u> Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum. Dann

ist $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein reeller Vektorraum.

Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ gilt

$\min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$.

Die Abbildung $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}, \Omega, \mu) \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto \int_\Omega f \, d\mu$$

ist linear, mit $\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$.

Ist $f \geq g$, so ist $\int_\Omega f \, d\mu \geq \int_\Omega g \, d\mu$

Beweis Sei $s \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{L}^1(A, \Omega, \mu)$.

Dann sind $f+g$ und $s \cdot f$ messbar. Weiter gilt

$|f+g| \leq |f| + |g|$, mit §3.16 folgt $\int_\Omega |f+g| \, d\mu < \infty$,

nach §3.18 ist $f+g$ integrierbar. Weiter gilt

$|s \cdot f| = |s| \cdot |f|$ und $|s| \cdot |f|$ ist integrierbar nach

§3.16, also ist $s \cdot f$ integrierbar nach §3.18.

Damit ist $\mathcal{L}(A, \Omega, \mu)$ ein reeller Vektorraum.

Weiter ist $\left.\begin{array}{l} |\max\{f,g\}| \leq |f| + |g| \\ |\min\{f,g\}| \leq |f| + |g| \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \max\{f,g\} \\ \min\{f,g\} \end{array}$

integrierbar mit §3.16, §3.18.

Angenommen, $f = \varphi - \psi$, für $\varphi, \psi \geq 0$ integrierbar.

Dann gilt $f_+ - (-f_-) = \varphi - \psi$

$$\underbrace{f_+ + \psi}_{\geq 0} = \underbrace{\varphi + (-f_-)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f_+ \, d\mu + \int_\Omega \psi \, d\mu = \int_\Omega \varphi \, d\mu + \int_\Omega (-f_-) \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \varphi \, d\mu - \int_\Omega \psi \, d\mu$$

Für $f+g = \underbrace{f_+ + g_+}_{\geq 0} - \underbrace{(-f_- - g_-)}_{\geq 0}$ also

$$\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega (f_+ + g_+) \, d\mu - \int_\Omega (-f_- - g_-) \, d\mu$$

$$= \int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu.$$

Angenommen, $\alpha \geq 0$. Dann ist $\alpha \cdot f = \underbrace{\alpha \cdot f_+}_{\geq 0} - \underbrace{\alpha(-f_-)}_{\geq 0}$

$$\Rightarrow \int_\Omega \alpha f\,d\mu = \alpha \int_\Omega f\,d\mu \quad \text{mit § 3.16.}$$

Weiter $-f = -f_+ - f_- = \varphi - \psi$ mit $\varphi = -f_- \geq 0$
$\psi = f_+ \geq 0$

$$\Rightarrow \int_\Omega (-f)\,d\mu = \int_\Omega (-f_-)\,d\mu - \int_\Omega f_+\,d\mu = -\int_\Omega f\,d\mu.$$

Schließlich noch $\int_\Omega f\,d\mu =$

$$\int_\Omega f_+\,d\mu - \int_\Omega (-f_-)\,d\mu \leq \int_\Omega f_+\,d\mu + \int_\Omega (-f_-)\,d\mu$$

$$= \int_\Omega |f|\,d\mu$$

genauso $\underbrace{\int_\Omega (-f)\,d\mu}_{= -\int_\Omega f\,d\mu} \leq \int_\Omega |f|\,d\mu$, damit also

$$\left| \int_\Omega f\,d\mu \right| \leq \int_\Omega |f|\,d\mu.$$

Ist $f \geq g$, so ist $f - g \geq 0$ und damit

$$\int_\Omega (f-g)\,d\mu \geq 0 \quad \text{nach § 3.16.}$$

$\square$

20. Bemerkung Die Abbildung $\mathcal{L}^1(A,\Omega,\mu) \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_\Omega |f| \, d\mu$$ ist eine Halbnorm,

d.h. für $f, g \in \mathcal{L}^1(A,\Omega,\mu)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- $\|\alpha \cdot f\|_1 = |\alpha| \cdot \|f\|_1$
- $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$

Es gilt nicht unbedingt: $\|f\|_1 = 0 \leadsto f = 0$.

Das ist das nächste Thema.