§ 5. Die Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p

Für $0 < p < \infty$ und $0 \le x < \infty$ setzen wir

$$x^p = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \exp(p \cdot \ln(x)) & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

Damit ist $x \mapsto x^p$ stetig auf $[0,\infty)$ und diff'bar mit Ableitung $x \mapsto p \cdot x^p \cdot \frac{1}{x} > 0$, also streng monoton wachsend. Es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} x^p = \infty$, wir definieren $\infty^p = \infty$.

Weiter gilt $(x^p)^{1/p} = \exp(\frac{1}{p} \ln(\exp(p \ln(x)))) = x$.

Für $p, q > 0$ ist $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$, für $p \in \mathbb{N}$ ist $x^p = \underbrace{x \cdots x}_{p\text{-mal}}$.

(W. H. Young, engl. Math., 1863–1942)

1. **Lemma** (Youngs Ungleichung) Sei $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \ge 0$. Dann gilt

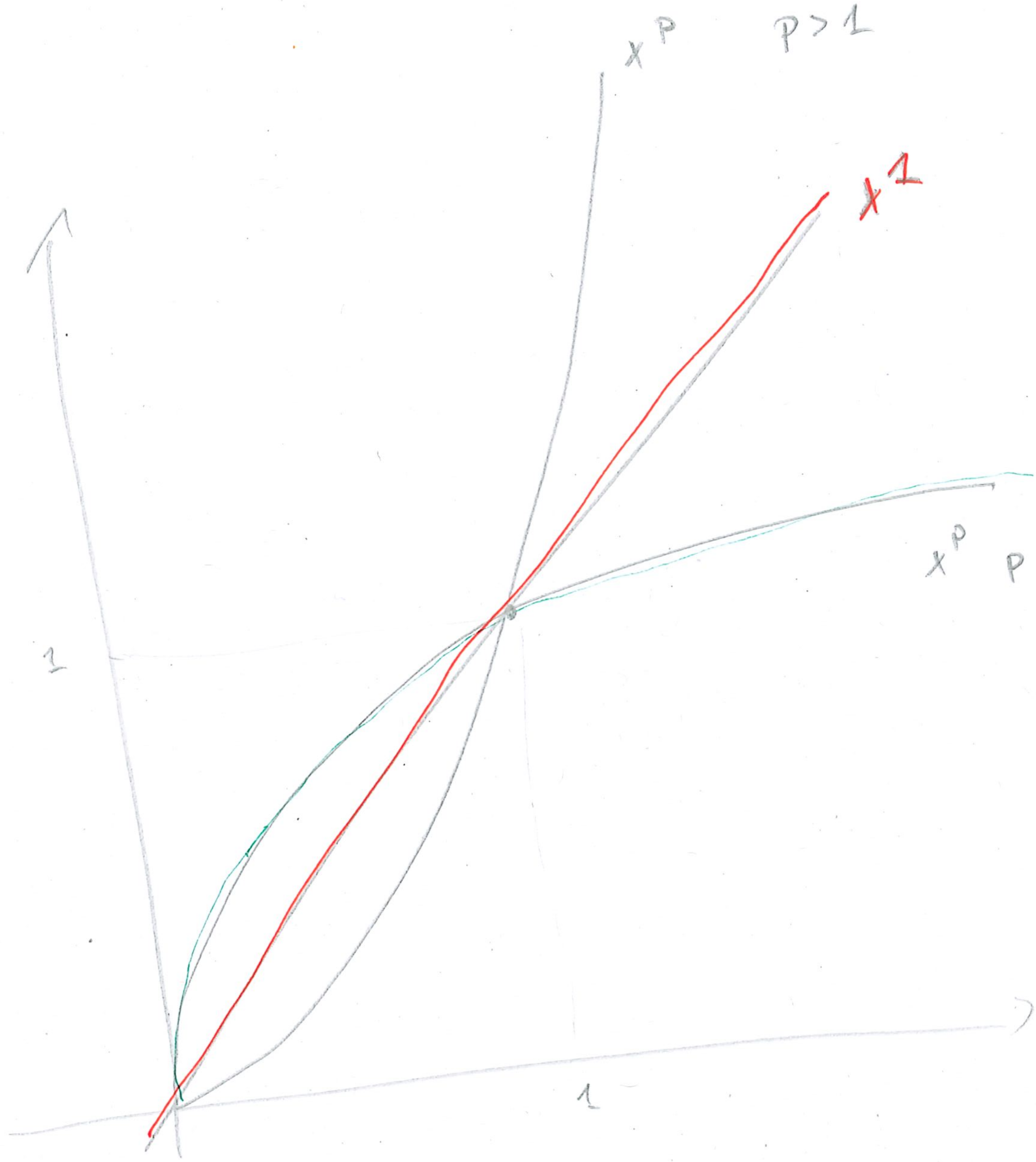
$$a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b$.

Beweis Für $a = b$ erhalten wir $a^{1/p} a^{1/q} = a^1 = a = \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} a$ (✓)

Für $a = 0$ erhalten wir $0 \le \frac{1}{q} b$ (✓)

$20\frac{1}{2}$



Sei jetzt $0 < a < b$, betrachte $h(x) = x^{1/q}$.

MWS: $h(b) - h(a) = (b-a)\cdot h'(\xi)$ für ein $a < \xi < b$.

$$b^{1/q} - a^{1/q} = (b-a)\,\frac{1}{q}\cdot \xi^{1/q}\,\frac{1}{\xi} = (b-a)\cdot\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{\xi^{1/p}}$$

$$< (b-a)\,\frac{1}{q}\,\frac{1}{a^{1/p}} \qquad (\text{denn } a^{1/p} < \xi^{1/p}\,!)$$

$$\Rightarrow \quad a^{1/p}\cdot b^{1/q} = \frac{1}{q}(b-a) + a = \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b. \qquad \square$$

\#

2. Def Sei (A, Ω, μ) ein Maßraum, sei $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, sei $0 < p < \infty$.

Dann ist auch $|f|^p$ messbar; denn für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)|^p \geq s\} = \begin{cases} \Omega & \text{für } s \leq 0 \\ \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq s^{1/p}\} & \text{für } s > 0 \end{cases}$$

Wir definieren

$$N_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad \text{sowie}$$

$$N_\infty(f) = \inf\{ t \in [0,\infty] \mid |f| \leq t \text{ fast überall} \}$$

Für $r \in \mathbb{R}$ folgt
$$N_p(r\cdot f) = |r|\cdot N_p(f)$$
$$N_\infty(r\cdot f) = |r|\, N_\infty(f).$$

3. Satz (Hölders Ungleichung) (O. Hölder, dt. Math. 1859–1937)

Sei $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sei (A, Ω, μ) ein Maßraum, seien $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar.

Dann gilt $N_1(f \cdot g) \leq N_p(f) \cdot N_q(g)$.

Beweis: $N_p(f) = 0 \underset{\S 4.3}{\Longleftrightarrow} |f|^p = 0$ fast überall $\Rightarrow |f \cdot g| = 0$ fast überall, dann gilt die Behauptung. Ist $N_p(f) = \infty$, so gilt die Behauptung auch. Also OE $0 < N_p(f), N_q(g) < \infty$.

Betrachte $\tilde{f} = \frac{1}{N_p(f)} \cdot f$, $\tilde{g} = \frac{1}{N_q(g)} \cdot g$

Für fast alle $u \in \Omega$ ist $|f(u)|, |g(u)| < \infty$ und dann

$$|\tilde{f}| \cdot |\tilde{g}| \leq \frac{1}{p} |\tilde{f}|^p + \frac{1}{q} |\tilde{g}|^q$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\tilde{f}| \cdot |\tilde{g}| \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |f| \cdot |g| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

$\square$

4. <u>Satz</u> (Minkowskis Ungleichung) [H. Minkowski, dt.-russ. Math. 1864–1909]

Sei $1 \leq p \leq \infty$, sei (A, Ω, μ) ein Maßraum, seien $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$$

<u>Beweis</u> Es gilt $|f+g| \leq |f| + |g|$, also OE $f, g \geq 0$.

Für $p = 1$ oder $p = \infty$ ist das wahr nach § 3.16 bzw Eigenschaft des inf. Also OE $1 < p < \infty$, OE $N_p(f), N_p(g) < \infty$. Wähle $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Es gilt $(f+g)^p \leq (2 \cdot \max\{f, g\})^p \leq 2^p \cdot \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p f^p + 2^p g^p$

also ist $\int_\Omega (f+g)^p d\mu \leq 2^p \int_\Omega f^p d\mu + 2^p \int_\Omega g^p d\mu < \infty$.

Weiter ist $(f+g)^p = (f+g) \cdot (f+g)^{p-1}$ $\qquad (p > 1 \,!)$

$$\leadsto \int_\Omega (f+g)^p d\mu = \int_\Omega f (f+g)^{p-1} d\mu + \int_\Omega g (f+g)^{p-1} d\mu$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hölder}}}{\leq} N_p(f) \cdot N_q((f+g)^{p-1}) + N_p(g) \cdot N_q((f+g)^{p-1})$$

$$N_q((f+g)^{p-1}) = \left(\int_\Omega (f+g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_\Omega (f+g)^p d\mu \right)^{1/q}$$

Damit $\left(\int_\Omega (f+g)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le N_p(f) + N_p(g)$.

$\square$

5. <u>Def</u> Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum. Für $1 \le p \le \infty$ definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{A}, \Omega, \mu) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar mit } N_p(f) < \infty \}$$

Dann ist $\mathcal{L}^p(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein reeller Vektorraum und $\|f\|_p = N_p(f)$ ist eine Halbnorm.

Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ gilt $\min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$.

Ist $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\left(\frac{1}{\infty} = 0\right)$ und ist $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$, $h \in \mathcal{L}^q(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$, so ist $f \cdot h \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ mit $\|f \cdot h\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|h\|_q$.

<u>Beweis</u> Sei $s \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$. Dann gilt

$\|s \cdot f\|_p = |s| \cdot \|f\|_p$ (vgl. §5.2) und

$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ nach § 6.4.

Damit ist $\mathcal{L}^p(A,\Omega,\mu)$ ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\|_p$ ist eine Halbnorm. Weiter gilt

$$|\max\{f,g\}|^p \le \max\{|f|^p, |g|^p\} \le |f|^p + |g|^p$$
$$|\min\{f,g\}|^p \le \max\{|f|^p, |g|^p\} \le |f|^p + |g|^p$$

also $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \mathcal{L}^p(A,\Omega,\mu)$.

Für $f \in \mathcal{L}^p(A,\Omega,\mu)$, $h \in \mathcal{L}^q(A,\Omega,\mu)$ mit $1 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ folgt mit Hölder Ungleichung

$\|f\cdot h\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|h\|_q$.

Ist $p=1$, $q=\infty$, $\|h\|_\infty = r \ge 0$, so ist $|h(\omega)| \le r$ fast überall $\Rightarrow$ $|fh| \le |f|\cdot r$ fast überall

$\Rightarrow \int_\Omega |f\cdot h|\, d\mu \le \int_\Omega |f|\, d\mu \cdot r = \|f\|_1 \cdot \|h\|_\infty$. $\square$

(*)

6. **Def** Sei (A,Ω,μ) ein Maßraum, sei $1 \le p \le \infty$. Wir definieren $\mathcal{N}^p(A,\Omega,\mu) = \{f \in \mathcal{L}^p(A,\Omega,\mu) \mid \|f\|_p = 0\}$. Dann ist $\mathcal{N}^p(A,\Omega,\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(A,\Omega,\mu)$ ein Untervektorraum und wir definieren

$$L^p(A,\Omega,\mu) = \mathcal{L}^p(A,\Omega,\mu) \big/ \mathcal{N}^p(A,\Omega,\mu).$$

Die Elemente von $L^p(A,\Omega,\mu)$ sind also Äquivalenzklassen von Funktionen f, wobei $f, \tilde{f}$

* **Bemerkungen** Sei $g, f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar

(a) es gilt $f \in \mathcal{L}^p(A, \Omega, \mu)$ genau dann, wenn $|f| \in \mathcal{L}^p(A, \Omega, \mu)$

denn: $(f^p)_+ = (f_+)^p \quad (-f_-)^p = (-f)^p_-$

$|f|^p = f^p_+ + (-f)^p_-$

(b) Ist $|f| \leq |g|$ und $g \in \mathcal{L}^p(A, \Omega, \mu)$, so auch $f \in \mathcal{L}^p(A, \Omega, \mu)$

denn: $|f| \leq |g| \Rightarrow |f|^p \leq |g|^p$.

(c) Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $1 \leq p \leq q < \infty$, dass $\mathcal{L}^p(A, \Omega, \mu) \supseteq \mathcal{L}^q(A, \Omega, \mu)$

(Übungsaufgabe)

aus $\mathcal{L}^p$ äquivalent sind, falls gilt

$$\|f-\tilde{f}\|_p = 0$$

[Das ist ein UVR, denn $\|f\|_p = \|g\|_p = 0 \Rightarrow \|f+g\|_p = 0$

und für $s \in \mathbb{R}$ ist $\|s \cdot f\|_p = |s| \cdot \|f\|_p$.]

Für die Äquivalenzklasse $f + \mathcal{N}^p(A,\Omega,\mu)$ schreib kurz $\underline{f}$. Wir definieren $\|\underline{f}\|_p = \|f\|_p$, das ist eine wohldefinierte Norm auf $L^p(A,\Omega,\mu)$,

denn: $\|f-\tilde{f}\|_p = 0 \Rightarrow \|f\|_p = \|f-\tilde{f}+\tilde{f}\|_p \leq \|\tilde{f}\|_p$

genauso $\|\tilde{f}\|_p \leq \|f\|_p$. Damit folgt

$$\|\underline{f}+\underline{g}\|_p = \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|\underline{f}\|_p + \|\underline{g}\|_p$$

$$\|s\underline{f}\|_p = \|sf\|_p = |s| \cdot \|f\|_p = |s|\,\|\underline{f}\|_p$$

$$\|\underline{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}^p(A,\Omega,\mu) \Leftrightarrow \underline{f} = \underline{0}$$

.#

7. Theorem (Satz von Fischer-Riesz)

E. Fischer, österr. Math. 1875 – 1954

F. Riesz, ung. Math. 1880 – 1956

Sei (A, Ω, μ) ein Maßraum, sei $1 \leq p \leq \infty$.
Dann ist $(L^p(A, \Omega, \mu), \|.\|_p)$ ein Banachraum.

Zusatz: Ist $f_n, f \in \mathcal{L}^p(A, \Omega, \mu)$ mit $\lim_k \|f - f_k\|_p = 0$, so gibt es eine Teilfolge f_{n_j} mit $\lim_j f_{n_j}(\omega) = f(\omega)$ fast überall.

Beweis: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{L}^p(A, \Omega, \mu)$ so, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Angenommen, $p < \infty$. Wähle eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ so, dass $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq 2^{-j}$, setze $g_j = f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$,

so $\sum_{j=0}^{k} g_j = f_{n_{k+1}} - f_{n_0}$. Setze $h_k = \sum_{j=0}^{k} |g_j|$ sowie

$h = \sum_{j=0}^{\infty} |g_j|$. Dann gilt $\|h_k\|_p \leq \sum_{j=0}^{k} 2^{-j} \leq 2$

$$\int_\Omega h^p \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \S 4.11}}{=} \lim_k \int_\Omega h_k^p \, d\mu \leq 2^p, \text{ also } \int_\Omega h \, d\mu < \infty.$$

Es folgt $h(\omega) < \infty$ fast überall (§ 4.5),

also konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(\omega)$ fast überall absolut.

Damit konvergiert auch $(f_{n_j}(\omega))_{j\in\mathbb{N}}$ fast überall,

also gibt es $f: \Omega \to \mathbb{R}$ messbar mit

$$f(\omega) = \lim_j f_{n_j}(\omega) \quad \text{fast überall.}$$

Beh: $\lim_n \|f - f_n\|_p = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es $m \geq 0$ so, dass $\|f_k - f_l\|_p \leq \varepsilon$ für alle $k, l \geq m$. Jetzt Fatous Lemma:

$$\int_\Omega |f - f_l|^p d\mu = \int_\Omega \liminf_j |f_{n_j} - f_l|^p d\mu$$

$$\leq \liminf_j \int_\Omega |f_{n_j} - f_l|^p d\mu \leq \varepsilon^p$$

also $\|f - f_l\|_p \leq \varepsilon$ für $l \geq m$. $\square$

Angenommen, $p=\infty$. Setze $M_i = \{\omega\in\Omega \mid |f_i(\omega)| > \|f_i\|_\infty\}$

$L_{j,k} = \{\omega\in\Omega \mid |f_j(\omega)-f_k(\omega)| > \|f_j - f_k\|_\infty\}$

$N = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i \cup \bigcup_{j,k=0}^{\infty} L_{j,k}$ Nullmenge. Für $\omega\in N^c$

gilt $|f_i(\omega)| \le \|f_i\|_\infty$ sowie $|f_j(\omega)-f_k(\omega)| \le \|f_j - f_k\|_\infty$

Setze $f(\omega) = \begin{cases} \lim_n f_n(\omega) & \text{für } \omega\in N^c \\ 0 & \text{für } \omega\in N \end{cases}$

$\Rightarrow$ f messbar und auf N^c konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f. Es gilt also $\lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0$

$\square$

8. Erinnerung (an Analysis I) Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Eine Stufenfunktion ist eine Linearkombination

$f = \sum_{j=1}^{m} s_i \cdot \chi_{A_i}$, $s_i\in\mathbb{R}$, $A_i \subseteq [a,b]$ abg. Intervall.

Insbesondere ist f dann eine Elementarfunktion (auf $\Omega=\mathbb{R}$ oder $\Omega = [a,b]$). Das Integral von f wurde in Analysis I definiert als $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} s_j \cdot \lambda(A_i)$

$= \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda$ λ Lebesgue-Maß.

Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Regelfunktion</u>, wenn es eine Folge von Stufenfunktionen $f_k: [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Jede <u>stetige</u> Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion, jede Regelfunktion ist beschränkt. Wir definieren

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_k \int_a^b f_k(x)\,dx \quad \text{, vgl. Analysis I, § 5}$$

9. <u>Satz</u> Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist f messbar und integrierbar bzgl. des Lebesgue-Maßes λ, wenn wir setzen $f(u) = 0$ für alle $u \in \mathbb{R} - [a,b]$.

Es gilt

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Analysis I}} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda}_{\text{Analysis III}} .$$

<u>Beweis</u> Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stufenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Setze $f_k(u) = 0$ für $u \in \mathbb{R} - [a,b]$ $\rightsquigarrow$ $f_k \in E(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

und $f(u) = \lim_k f_k(u)$ gilt für alle $u \in \mathbb{R}$

Also ist f messbar. Weiter ist f beschränkt, daher gibt es $r \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(u)| \leq r$ für alle $u \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |f_k| \leq r \cdot \chi_{[a,b]} = g$. Nach §4.14 (Satz von Lebesgue) gilt $\lim\limits_k \int_{\mathbb{R}} |f - f_k| \, d\lambda = 0$,

insbesondere $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim\limits_k \int_{\mathbb{R}} f_k \, d\lambda = \lim\limits_k \int_a^b f_k(x) dx$

$= \int_a^b f(x) dx.$ $\square$

Insbesondere können wir das Lebesgue-Integral von stetigen Funktionen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bestimmen. Beachte: $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ ist Lebesgue-integrierbar, aber keine Regelfunktion.

Für die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ existiert der Grenzwert

$\lim\limits_{r \to 0} \int_0^r f(x) dx$, aber f ist auf $[0,\infty)$ nicht Lebesgue integrierbar (vgl. Deuer)

10. <u>Satz</u> <u>(über parametrisierte Integrale)</u>

Sei (A,Ω,μ) ein Maßraum, sei X ein metrischer Raum (z.B. $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall), sei $z \in X$ und seien $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ Abbildungen mit folgenden Eigenschaften.

(a) Für jedes $x \in X$ ist $f(x,-) : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar

(b) Für jedes $u \in \Omega$ ist $f(-,u) : X \to \mathbb{R}$ stetig (bzw. stetig in z)

(c) g ist integrierbar, mit $|f(x,u)| \le g(u)$ für alle $(x,u) \in X \times \Omega$.

Dann ist die Abbildung $x \mapsto \int_\Omega f(x,-)\,d\mu$ stetig (bzw. stetig in z)

<u>Beweis</u> Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_n x_n = z$. Setze $f = f(z,-)$ und $f_n = f(x_n,-)$. Dann gilt $\lim_n f_n = f$ und $|f_n| \le g$. Nach dem Satz von Lebesgue § 4.14 gilt $\int_\Omega f\,d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\,d\mu$.

Damit ist $x \mapsto \int_\Omega f(x,-)\,d\mu$ stetig in z.

Wenn $f(-,u)$ für jedes u stetig ist, gilt das für jedes $z \in X$. □

11. <u>Satz</u> (über das Differenzieren in Integralen)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, seien $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ Abbildungen mit folgenden Eigenschaften.

(a) $f(t,-): \Omega \to \mathbb{R}$ ist messbar für alle $t \in I$

(b) $f(-,u): I \to \mathbb{R}$ ist diff'bar für alle $u \in \Omega$, mit Ableitung $f'(-,u)$

(c) g ist integrierbar, mit $|f'(t,u)| \leq g(u)$ für alle $(t,u) \in I \times \Omega$.

Dann ist $\varphi(t) = \int_\Omega f(t,-)\, d\mu$ diff'bar auf I, mit Ableitung $\varphi'(t) = \int_\Omega f'(t,-)\, d\mu$ (und $f'(t,-)$ ist integrierbar für alle $t \in I$!) #

<u>Beweis</u> Sei $t \in I$, sei $s_n \in I - \{t\}$ mit $\lim_n s_n = t$.

Setze $h_n(u) = \dfrac{f(s_n,u) - f(t)}{s_n - t}$, $h(u) = f'(t,u)$

Dann gilt $\lim_n h_n(u) = h(u)$ für jedes u, also ist h messbar (weil h_n messbar).

Beh: $|h_n| \leq g$.

Denn: $h_n(u) = \frac{f(s_n,u) - f(t,u)}{s_n - t} \overset{(\text{Mws})}{=} f'(\xi_n, u)$

mit $s_n < \xi_n < t$ bzw $t < \xi_n < s_n$ $\square$

Nach dem Satz von Lebesgue §4.14 ist h integrierbar

und $\int_\Omega h \, d\mu = \lim_n \int_\Omega h_n \, d\mu = \lim_n \frac{\varphi(s_n) - \varphi(t)}{s_n - t}$ $\square$

12. Lemma Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, sei

$\lim_n \int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \chi_{[-n,n]} \, d\lambda < \infty$. Dann ist

f integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_{[-n,n]} \, d\lambda$.

Insbesondere gilt: wenn f auf jedem Intervall $[-n,n]$ eine Regelfunktion ist, mit

$\lim_n \int_{-n}^{n} |f(t)| \, dt < \infty$, dann $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_n \int_{-n}^{n} f(t) \, dt$.

Beweis Setze $f_n = f \cdot \chi_{[-n,n]}$. Nach Beppo Levi §4.11 gilt wegen $|f_0| \leq |f_1| \leq \ldots$, dass $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda = \lim \int_{\mathbb{R}} |f_n| \, d\lambda < \infty$

also ist f integrierbar, mit $|f_n| \leq |f|$.

Nach dem Satz von Lebesgue §4.14 ist

$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda.$ $\square$

13. Beispiel. Es gilt $\int_0^\infty u^n \exp(-u)\,du = n!$

Denn Betrachte $f(x,u) = \begin{cases} \exp(-xu) & u \geq 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$

$\int_0^b \exp(-xu)\,du = \frac{1}{x}\left(1 - \exp(-xu)\right)$, also mit §5.12

$\int_0^\infty \exp(-xu)\,du = \int_{\mathbb{R}} f(x,-)\,d\lambda = \frac{1}{x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = -u \cdot f(x,u)$, also $\int_0^\infty u \exp(-xu)\,du = \frac{1}{x^2}$

nach §5.11. Iteration liefert $\int_0^\infty u^n \exp(-xu)\,du = \frac{n!}{x^{n+1}}$

Für $x = 1$ folgt die Behauptung. $\square$

14. Bemerkung Sei (A, Ω, μ) ein Maßraum, sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nach der Hölderschen Ungleichung erhalten wir eine stetige bilineare Abbildung

$$L^p(A, \Omega, \mu) \times L^q(A, \Omega, \mu) \to \mathbb{R}$$
$$(\underline{f}, \underline{g}) \longmapsto \langle \underline{f} | \underline{g} \rangle = \int_\Omega f \cdot g \, d\mu$$

(Die Abbildung ist stetig, denn: $\|\underline{f}\|_p ; \|\underline{g}\|_q \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \left| \int_\Omega f \cdot g \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \varepsilon^2 ,$$ also folgt:

$$\|\underline{f} - \underline{\tilde{f}}\|_p \leq \varepsilon , \quad \|\underline{g} - \underline{\tilde{g}}\|_q \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |\langle f | g \rangle - \langle f' | g' \rangle| &= | \langle f | g - g' \rangle + \langle f - f' | g' \rangle | \\ &\leq \|f\|_p \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \|g'\|_q \\ &\leq \|f\|_p \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \|g\|_q + \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon (\|f\|_p + \|g\|_q + \varepsilon) \end{aligned}$$

Insbesondere ist $L^2(A, \Omega, \mu)$ ein

Hilbertraum, mit $\|\underline{f}\|_2 = \langle \underline{f} | \underline{f} \rangle$

(d.h. ein Banachraum, mit $\|\underline{f}\|_2 = \langle \underline{f} | \underline{f} \rangle$)