§ 7 Der Transformationssatz

Wir betrachten zuerst zwei Konstruktionen von Maßen.

1. <u>Def</u> Sei (A_1, Ω_1, μ_1) ein Maßraum, (A_2, Ω_2) ein Messraum, sei $h: \Omega_1 \to \Omega_2$ messbar. Setze $\mu_2(E) = \mu_1(h^{-1}(E))$, für $E \subseteq \Omega_2$ messbar. Dann ist $\mu_2 = h_* \mu_1$ ein Maß auf Ω_2, das <u>Bildmaß</u>.

2. <u>Lemma</u> Sei $h: \Omega_1 \to \Omega_2$ wie oben, sei $f: \Omega_2 \to [-\infty, \infty]$ messbar.

(a) Falls $f \geq 0$, so gilt

$$\int_{\Omega_2} f \, d\mu_2 = \int_{\Omega_1} f \circ h \, d\mu_1$$

(b) f ist genau dann integrierbar, wenn $f \circ h$ integrierbar ist; dann gilt

$$\int_{\Omega_2} f \, d\mu_2 = \int_{\Omega_1} f \circ h \, d\mu_1 .$$

<u>Beweis</u> (a) Angenommen, $f = \chi_E$ für $E \subseteq \Omega_2$ messbar.

$\leadsto \chi_E \circ h = \chi_{h^{-1}(E)}$ und

$$\int_{\Omega_2} \chi_E \, d\mu_2 = \mu_1(h^{-1}(E)) = \int_{\Omega_1} \chi_E \circ h \, d\mu_1 \qquad (*)$$

Damit folgt (a), falls $f \in E_+(\mathcal{A}_2)$. Im allgemeinen wähle $0 \le f_0 \le f_1 \le \dots$, $f_k \in E_+(\mathcal{A}_2)$ mit $\lim_k f_k = f$ $\Rightarrow$ $0 \le f_0 \circ h \le f_1 \circ h$, $\lim_k f_k \circ h = f \circ h$

Dann folgt die Gleichheit aus § 3.15 □

(b) folgt mit $(f \circ h)_+ = f_+ \circ h$, $(f \circ h)_- = f_- \circ h$ □

3. Def Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, sei $\varrho : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar mit $\varrho \ge 0$. Das Maß μ mit Dichte ϱ ist definiert durch

$$(\varrho \cdot \mu)(E) = \int_\Omega \chi_E \cdot \varrho \, d\mu$$

4. Lemma Seien Ω, ϱ wie oben, sei $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar.

(a) Falls $f \ge 0$, so gilt

$$\int_\Omega f \, d(\varrho \cdot \mu) = \int_\Omega f \cdot \varrho \, d\mu$$

(b) f ist genau dann $(\varrho \cdot \mu)$-integrierbar, wenn $f \cdot \varrho$ μ-integrierbar ist.

Beweis (a) ist wahr, wenn $f = \chi_E$, also gilt (a) für alle $f \in E_+(\mathcal{A})$

Für allgemeines $f \geq 0$ sei $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$, $f_k \in E_+(\mathcal{A})$

$\lim_k f_k = f \Rightarrow \lim_k f_k \cdot g = f \cdot g$, die Beh (a)

folgt mit Satz von Beppo Levi § 4.11

Für (b) beachte $f_+ \cdot g = (f \cdot g)_+$, $f_- \cdot g = (f \cdot g)_-$ $\square$

5. Beobachtungen

(a) Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$ abg. Dann ist die Abbildung $d_E(u) = \inf\{\|u-w\|_2 \mid w \in E\}$ stetig auf $\mathbb{R}^m$ und $d_E(u) = 0 \Leftrightarrow u \in E$.

⌜ $\|u-w\|_2 \leq \|u-v\|_2 + \|v-w\|_2 \Rightarrow d_E(u) \leq \|u-v\|_2 + d_E(v)$

$\Rightarrow |d_E(u) - d_E(v)| \leq \|u-v\|_2$ ⌟

(b) Sind $E, F \subseteq \mathbb{R}^m$ abg, $E \cap F = \emptyset$, $E, F \neq \emptyset$, so ist $d_{E,F}(u) = \dfrac{d_E(u)}{d_E(u) + d_F(u)}$ stetig,

$0 \leq d_{E,F} \leq 1$. Für $u \in E$ ist $d_{E,F}(u) = 0$

für $u \in F$ ist $d_{E,F}(u) = 1$

(c) Ist $U \subsetneq \mathbb{R}^m$ offen, $E = U^c$,

$F_k = \{u \in \mathbb{R}^m \mid d_E(u) \geq \frac{1}{1+k}\}$, so gilt

$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots$ abg, $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$. Mit

$f_k = d_{E,F_k}$ folgt $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$ und

$\lim_k f_k = \chi_U$.

6. <u>Lemma</u> Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, sei $W_k \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots$ und $\mathbb{R}^m = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$, so dass $\mu(W_k), \mu(W_k) < \infty$ für alle k. Dann sind äquivalent:

(i) $\mu = \nu$

(ii) Für alle stetig $f: \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} f \, d\nu.$$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\chi_{\mathbb{R}^m}$ ist stetig, also $\mu(\mathbb{R}^m) = \nu(\mathbb{R}^n)$.

Ist $U \subsetneqq \mathbb{R}^m$ offen, so gibt es nach §7.5(c) stetig $f_k: \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ mit $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$ und $\lim_k f_k = \chi_U$. Es folgt

$$\mu(U) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_U \, d\mu \overset{\circledast}{=} \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\nu$$

$$\overset{\circledast}{=} \int \chi_U \, d\nu = \nu(U).$$

$\circledast$ = Beppo Levi §4.11

Insbesondere gilt $\mu(W_k) = \nu(W_k) < \infty$ für alle k. Da die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^m$

ein $\cap$-stabiles EZS von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ sind, folgt mit dem Identitätssatz §2.9 $\mu = \nu$ $\square$

7. **Def** Sei $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sei $l \geq 1$.
Eine l-mal stetig diff'bare Abbildung $\varphi : U \to V$ heißt C^l-Diffeomorphismus, falls es $\psi : V \to U$ l-mal stetig diff'bar gibt mit $\psi \circ \varphi = id_U$, $\varphi \circ \psi = id_V$

Dann sind ψ, φ bijektiv und für die Ableitungen gilt $D\varphi \circ D\psi = id$ $D\psi \circ D\varphi = id$.

8. **Theorem** (Der Transformationssatz)
Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi : U \to V$ ein C^l-Diffeomorphismus ($l \geq 1$) mit Inversem $\psi : V \to U$. Schreibe $\lambda^m_U = \chi_U \cdot \lambda^m$, $\lambda^m_V = \chi_V \cdot \lambda^m$, λ^m Lebesgue-Maß.

Dann gilt folgendes.

(a) $\varphi_* \lambda^m_V = |\det(D\varphi)| \cdot \lambda^m_U$, d.h.

für jedes messbare $E \subseteq U$ gilt

$$\lambda^m(\varphi(E)) = \int_U \chi_E \cdot |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m$$

(b) Ist $f: V \to [-\infty, \infty]$ messbar, so gilt

$$\int_V f \, d\lambda^m = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m$$

wenn $f \geq 0$ oder wenn f integrierbar ist.

<u>Beweis</u> Mit §7.2, §7.4 folgt (a) $\Rightarrow$ (b).

Wir beweisen jetzt (a) in Einzelschritten. #

<u>Lemma A</u> Wenn $\varphi(u_1, \ldots, u_m) = (u_{\pi_1}, u_{\pi_2}, \ldots, u_{\pi_m})$ eine Permutation der Koordinaten ist, dann ist (a) wahr.

<u>Beweis</u> Dann ist φ eine lineare Abbildung, $D\varphi(u) = \varphi$, $\det(\varphi) = \operatorname{sign}(\pi) = \pm 1$, also $|\det(D\varphi)| = 1$.

Für jeden Quader Q gilt $\lambda^m(Q) = \lambda^m(\varphi(Q))$

Mit dem Identitätssatz § 2.9 folgt

$$\lambda^m = \varphi_* \lambda^m \qquad \square$$

<u>Lemma B</u> Wenn es zu jedem $u \in U$ einen offenen Quader $Q \subseteq U$ gibt mit $u \in Q$ so, dass für die Einschränkung $\varphi|_Q : Q \to \varphi(Q)$ (a) wahr ist, dann gilt (a).

<u>Beweis</u> Zu jedem $u \in U$ gibt es dann einen Quader Q, dessen Ecken rationale Koordinaten haben, wo (a) gilt. Also ist $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$, Q_k offene Quader, auf denen (a) wahr ist.

Sei $E \subseteq U$ messbar, setze $E_0 = E \cap Q_0$, $E_1 = (E \cap Q_1) - E_0$, $E_2 = (E \cap Q_2) - (E_0 \cup E_1)$ usw.

Es gilt $\lambda^m(\varphi(E_k)) = \int_{Q_k} \chi_{E_k} \cdot |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m$

nach Voraussetzung, also

$$\lambda^m(\varphi(E)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^m(\varphi(E_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_k} \chi_{E_k} \cdot |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{E_k} \cdot |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m \underset{\substack{\uparrow \\ \S 4.12}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{E_k} \cdot |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \chi_E \cdot |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m \qquad \square$$

<u>Lemma C</u> Wenn $m=1$, so gilt (a).

<u>Beweis</u> Nach Lemma B reicht es, den Fall zu betrachten, wo $U=(\alpha,\beta)$ ein (kleines) offenes Intervall ist. Dann ist $V=\varphi(U)$ auch ein offenes Intervall (Zwischenwertsatz), OE $\lambda^1(V)<\infty$ (sonst verkleinere U). Zu zeigen ist

$$\varphi_* \lambda^1_V = |\varphi'| \cdot \lambda^1_U, \quad \text{benutze dazu § 7.6.}$$

Sei $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ stetig, mit Stammfunktion F, also $(F\circ\varphi)' = (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ (Kettenregel)

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt$$

Da $\varphi'(t)\neq 0$ für alle t folgt $\varphi'>0$ oder $\varphi'<0$ (Zwischenwertsatz) und damit

$$\int_U f\circ\varphi \, |\varphi'| \, d\lambda^m = \int_V f \, d\lambda^m \qquad \tilde{f} = f\circ\varphi$$

$$\Rightarrow \int_U \tilde{f}\cdot|\varphi'|\,d\lambda^m = \int_V \tilde{f}\circ\psi \, d\lambda^m \qquad \square$$

<u>Lemma D</u> Die Behauptung (a) ist wahr,

wenn $\varphi(x_1,\dots,x_m) = (x_1, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$
und wenn sie in Dimension kleiner als m wahr ist

<u>Beweis</u> Nach Lemma B können wir annehmen, dass U ein offener Quader ist. Wir schreiben

$$\tilde{\varphi}_t(x_2,\dots,x_m) = (\varphi_1(t,x_2,\dots,x_m), \dots, \varphi_m(t,x_2,\dots,x_m))$$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ * & \\ \vdots & \boxed{D\tilde{\varphi}_t} \\ * & \end{pmatrix} \Rightarrow \det(D\varphi) = \det(D\tilde{\varphi}_t)$$

Sei $E \subseteq U$ messbar. Dann gilt mit

$$\varphi(E)_t = \{(y_2,\dots,y_m) \mid (t,y_2,\dots,y_m) \in \varphi(E)\}$$
$$E_t = \{(x_2,\dots,x_m) \mid (t,x_2,\dots,x_m) \in E\}$$

$$\lambda^m(\varphi(E)) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{m-1}(\varphi(E)_t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{m-1}(\tilde{\varphi}_t(E_t))\, dt$$ und nach Annahme

$$\lambda^{m-1}(\tilde{\varphi}_t(E_t)) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \chi_{E_t} \cdot |\det(D\tilde{\varphi}_t)|\, d\lambda^{m-1}$$

Einsetzen ergibt

$$\lambda^m(\varphi(E)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \chi_{E_t} \cdot \underbrace{|\det(D\tilde{\varphi}_t)|}_{=|\det(D\varphi)|} \, d\lambda^{m-1} \, dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tonelli}}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_E \, |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m \qquad \square$$

<u>Lemma E</u> Wenn (a) gilt für Diffeomorphismen $U \xrightarrow{\varphi} V$ und $V \xrightarrow{\eta} W$, dann auch für $\eta \circ \varphi : U \to W$.

<u>Beweis</u> Sei $E \subseteq U$ messbar. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} \chi_E \cdot |\det(D(\eta\circ\varphi))| \, d\lambda^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_E \cdot |\det(D\eta)\circ\varphi| \cdot |\det(D\varphi)| \, d\lambda^m$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\varphi(E)} \cdot |\det(D\eta)| \, d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\varphi(E)} \circ \eta^{-1} \, d\lambda^m$$

$$= \lambda^m(\eta \circ \varphi(E)) \qquad \square$$

Jetzt beenden wir den Beweis im allgemeinen Fall, für $m \geq 2$. Sei $u \in U$. Es gibt ein j mit

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(u) \neq 0 .$$

Nach Lemma A und Lemma E können wir annehmen, dass $j = 1$. In einer kleinen Umgebung von u gilt dann $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \neq 0$.

Betrachte $\xi(x_1, \dots, x_m) = (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_m)$. Nach dem Satz vom lokalen Inversen ist ξ nahe u ein Diffeomorphismus. Damit ist auch

$\eta = \varphi \circ \xi^{-1}$ nahe $\xi(u)$ ein Diffeomorphismus und

$$\begin{aligned} \eta \circ \xi(x) &= \eta(\varphi_1(x), x_2, \dots, x_m) \\ &= (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)) \end{aligned}$$

d.h. $\eta_1(y) = y_1$.

Mit Induktion und Lemma D folgt, dass (a) wahr ist für ξ und η, nach Lemma E also auch für $\varphi = \eta \circ \xi$ auf einem kleinen offenen Quader um u. Nach Lemma B gilt (a) dann für φ.

$\square$

Korollar Sei $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear.

Dann gilt für jede messbare Menge $E \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\lambda^m(T(E)) = |\det(T)| \cdot \lambda^m(E).$$

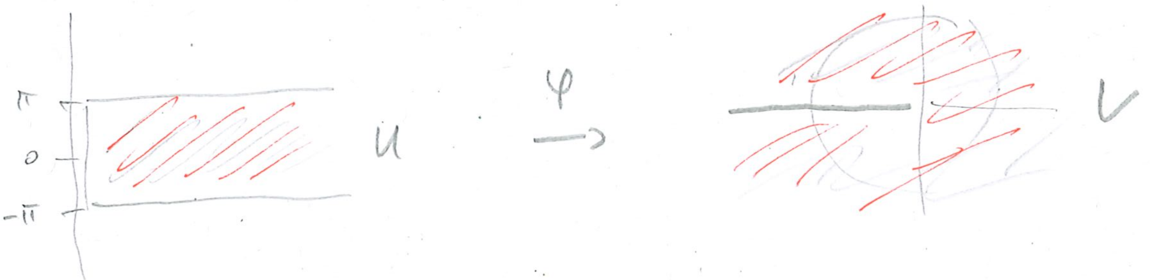
Beweis Wenn T nicht injektiv ist, dann ist $T(E)$ in einem echten Untervektorraum $H \subsetneq \mathbb{R}^m$ und $\lambda^m(H) = 0$ (ÜA). und $\det(T) = 0$.

Wenn T bijektiv ist, dann ist $T = \varphi$ ein Diffeomorphismus mit $D\varphi = T$. $\square$

9. **Beispiel** Sei $U = (0,\infty) \times (-\pi, \pi)$

$V = \mathbb{R}^2 - H \qquad H = \{(x,0) \mid x \le 0\}$

$$\varphi: U \to V, \quad (r, \alpha) \mapsto (r \cdot \cos(\alpha), r \cdot \sin(\alpha)).$$



φ ist stetig diff'bar und bijektiv. Es gilt

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -r \cdot \sin(\alpha) & r \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \det(D\varphi) = r \neq 0$$

Nach dem Satz von lokalen Inversen ist φ ein C^l-Diffeomorphismus $(l \geq 1)$

$\mathbb{R}^2 \setminus V$ ist eine Nullmenge!

Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = \int_V f \, d\lambda^2 = \int_U (f \circ \varphi) \cdot r \, d\alpha \, dr$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{U} f(r \cdot \cos(\alpha), r \cdot \sin(\alpha)) \cdot r \, d\alpha \, dr$$

vgl. § 6.12. Das ist Integration in Polarkoordinaten.

10. Def Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir sagen, f hat kompakten Träger, wenn es eine kompakte (= abg + beschränkt) Menge $K \subseteq \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $f(u) = 0$ für alle $u \in K^c$.

Diese Funktion bilden ein Vektorraum

$$C_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Beachte: jedes $f \in C_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist f beschränkt. Denn $f(\mathbb{R}^m) \subseteq \underbrace{f(K) \cup \{0\}}_{\text{kompakt}}$.

11. <u>Def</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Eine Abbildung $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ heißt <u>Vektorfeld</u>. Die <u>Divergenz</u> eines diff'baren Vektorfeldes ξ ist die Funktion

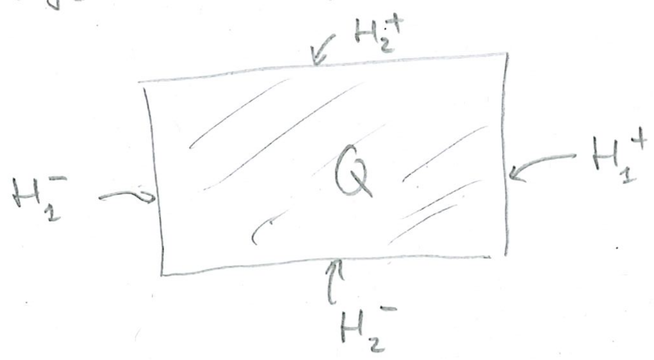
$$\mathrm{div}(\xi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} .$$

12. <u>Lemma</u> (<u>Satz von Gauß für Quader</u>)

Sei $\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \subseteq \mathbb{R}^m$ ein beschränkter abgeschlossener Quader. Für $j = 1, \dots, m$ seien

$$H_j^+ = [a_1, b_1] \times \dots \times \{a_j\} \times \dots \times [a_m, b_m]$$
$$H_j^- = [a_1, b_1] \times \dots \times \{b_j\} \times \dots \times [a_m, b_m]$$

die Seitenflächen



Dann gilt

$$\int_Q \mathrm{div}(\xi)\, d\lambda^m = \int_{\partial Q} \langle \xi, \nu \rangle \, d\lambda^{m-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{H_j^\varepsilon} \langle \xi_j, \varepsilon \cdot e_j \rangle \, d\lambda^{m-1}$$

Dabei ist $e_1, \dots, e_m$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^m$,

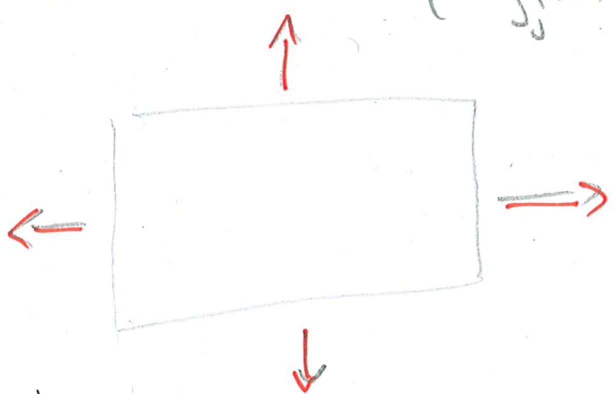
$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{m} u_j \cdot v_j$ das Standard-Skalarprodukt

auf $\mathbb{R}^m$ und ν ist definiert durch

$$\nu(u) = \begin{cases} e_j & \text{wenn } u \in H_j^+ \\ -e_j & \text{wenn } u \in H_j^- \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m$$

(nicht definiert auf den Kanten / Ecken, das macht nichts)

also $\langle \xi(u), \nu(u) \rangle = \begin{cases} \xi_j(u) & \text{wenn } u \in H_j^+ \\ -\xi_j(u) & \text{wenn } u \in H_j^- \end{cases}$



<u>Beweis</u> $\displaystyle\int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}(u_1, \dots, \underset{j}{t}, \dots u_m)\, dt = \xi_j(u_1, \dots, b_j, \dots, u_m) - \xi_j(u_1, \dots, a_j, \dots u_m)$ $\square$

Physikalische Interpretation: eine Flüssigkeit / ein Gas strömt so durch den Raum, dass $\xi(u)$ die Strömungsgeschwindigkeit im Punkt u angibt. Falls $\operatorname{div} \xi = 0$, so strömt durch die Oberfläche ∂Q gleich viel ein wie aus.

13. Korollar. Sei $\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein stetig diff'bares Vektorfeld mit kompaktem Träger.

Dann gilt

(a) $$\int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div}(\xi)\, d\lambda^m = 0$$

(b) Für $E_j = \{ (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_j \leq 0 \}$

gilt $$\int_{E_j} \operatorname{div}(\xi)\, d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \xi_j(u_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{0}, \dots u_m)\, du_1 \dots du_{j-1}\, du_{j+1} \dots du_m$$

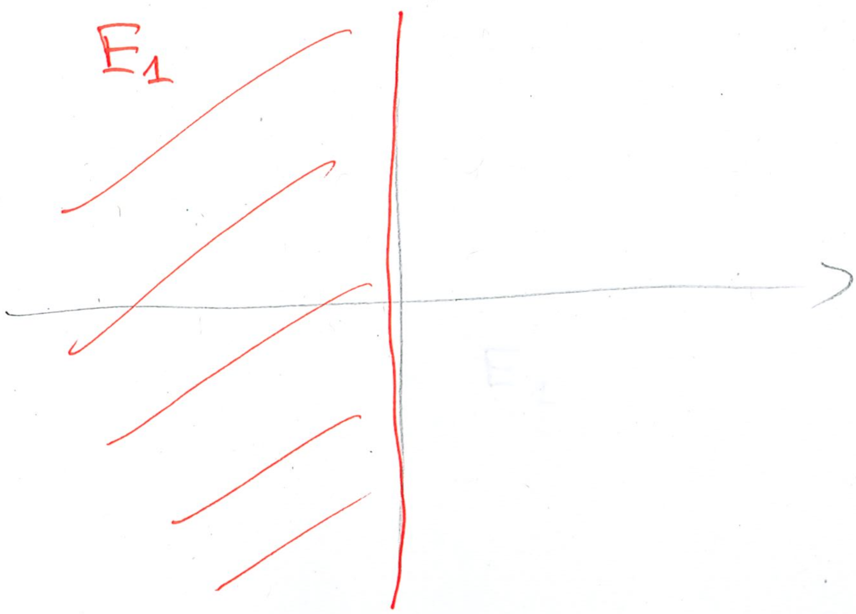
Bew: Wir wählen $r > 0$ so dass für $K = [-r, r]^m$ gilt

$u \in K^c \Rightarrow \xi(u) = 0$.

(a) $$\int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div}(\xi)\, d\lambda^m = \int_K \operatorname{div}(\xi)\, d\lambda^m \underset{\substack{\uparrow \\ \S 7.12}}{=} 0 .$$

(b) Wende §7.12 an auf $Q = [-r, r] \times \dots \times \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{[-r, 0]} \times \dots \times [-r, r]$

$\square$



14. <u>Notation</u> Sei $h: \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, $m \geq 2$, mit Gradient $\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_{m-1}}\right)$

Setze $E = \{(w,t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \mid t \leq h(w)\}$.

Definiere $\nu(u) = \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}(u), \dots, -\frac{\partial h}{\partial x_{m-1}}(u), 1\right)$

sowie $\hat{\nu}(u) = \frac{1}{\|\nu(u)\|_2} \cdot \nu(u)$. Einheitsnormalenfeld

<u>Satz</u> Sei $\xi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein stetig diff'bares Vektorfeld mit kompaktem Träger. Dann gilt mit den Bezeichnungen oben

$$\int_E \operatorname{div}(\xi)\, d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \langle \xi(w,h(w)), \nu(w,h(w)) \rangle \, dw_1 \dots dw_{m-1}$$

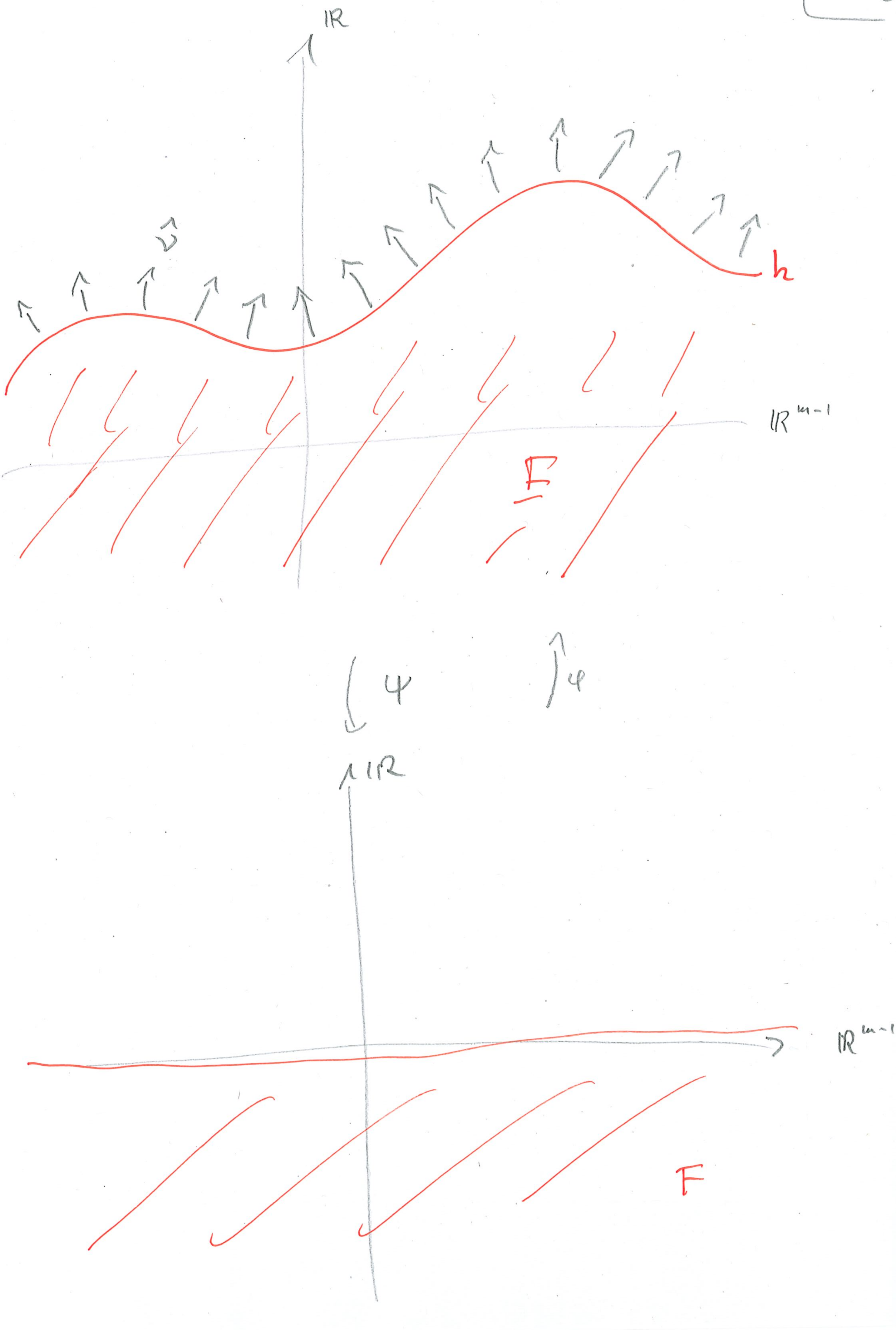
$$= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \langle \xi((w),h(w)), \hat{\nu}(w,h(w)) \rangle \, d(\underbrace{\|\nu\| \cdot \lambda^{m-1}}_{\text{Maß mit Dichte}})$$

#

<u>Beweis</u> Setze $U = V = \mathbb{R}^m$ sowie
$F = \{(w,t) \in \mathbb{R}^m \mid t \leq 0\}$

$\varphi(w,t) = (w, t + h(w))$ $\psi(w,t) = (w, t - h(w))$

$\leadsto \varphi^{-1} = \psi$, $U \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} V$ C^1-Diffeomorphismen



ℝ
ν
h
ℝ^{n-1}
F
ψ
ψ
ℝ
ℝ^{n-1}
F

Nach §7.8 (Transformationssatz)

$$\int_E \operatorname{div}(\xi)\,d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_E \operatorname{div}(\xi)\,d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_F (\operatorname{div}(\xi))\circ\varphi\,|\det(D\varphi)|\,d\lambda^m$$

$$\chi_F = \chi_E \circ \varphi$$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & & 1 & \frac{\partial h}{\partial x_{m-1}} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(D\varphi) = 1$$

Setze $\eta = \xi \circ \varphi$, $\eta_j(w,t) = \xi_j(w, t+h(w))$

$$\Rightarrow \frac{\partial \eta_m}{\partial x_m}(w,t) = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m}(w, t+h(w)) \qquad \text{und}$$

für $1 \leq j < m$: $$\frac{\partial \eta_j}{\partial x_j}(w,t) = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}(w, t+h(w)) + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m}(w, t+h(w))\frac{\partial h}{\partial x_j}(w)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m}(w, t+h(w))\,dt = \xi_m(w, h(w))$$

$$\Rightarrow \int_E^{0} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m}(w, t+h(w))\,d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \xi_m(w, h(w))\,dw_1 \cdots dw_{m-1}$$

Für $1 \leq j < m$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta_j(w,t)}{\partial x_j} dw_j = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}(w, t+h(w))\, dw_j$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m}(w, t+h(w)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(w)\, dw_j$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}(w, t+h(w))\, dw_j\, dt = - \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m}(w, t+h(w)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(w)\, dw_j\, dt$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\overset{\uparrow}{=}} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m}(w, t+h(w))\, dt \right) \frac{\partial h}{\partial x_j}(w)\, dw_j$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \xi_j(w, h(w)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(w)\, dw_j$$

$$\Rightarrow \int_E \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\, d\lambda^m = - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \xi_j(w, h(w)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(w)\, dw_1 \ldots dw_{m-1}$$

$\square$

Der Satz von Gauß verallgemeinert diese Formel

15. Ein Baukasten glatter Funktionen

(glatt $\hat{=}$ C^∞ $\hat{=}$ beliebig oft stetig diff'bar)

(1) Es gibt glatte Funktion $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit $f(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0$.

Zum Beispiel $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \exp(\frac{-1}{t}) & t > 0 \end{cases}$

⌜ Sei p ein Polynom, Dann gilt für

$h(t) = \exp(\frac{-1}{t}) \cdot t^{-m} \cdot p(t)$, dass $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} h(t) = 0$.

Denn $\frac{\exp(y)}{y^m} \geq \frac{y}{(m+1)!} \Rightarrow \lim\limits_{y \to \infty} \frac{\exp(y)}{y^m} = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\exp(\frac{-1}{t})}{t^m} = 0$. Die Ableitung von h

ist $h'(t) = \exp(\frac{-1}{t}) \cdot t^{-2} \cdot t^{-m} \cdot p(t)$

$+ \exp(\frac{-1}{t})(-m)\, t^{-m-1} \cdot p(t)$

$+ \exp(\frac{-1}{t})\, t^{-m} \cdot p'(t)$

$= \exp(\frac{-1}{t}) \cdot t^{-m-2} \cdot \underbrace{q(t)}_{\text{Polynom}}$ ⌟

(2) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. Dann gibt es $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ glatt mit $f(t) > 0 \Leftrightarrow a < t < b$

Denn: wähle $g(t)$ wie in (1), betrachte

$f(t) = g(t-a) \cdot g(b-t)$

$f(t) > 0 \Leftrightarrow t-a > 0$ und $b-t > 0$

$\Leftrightarrow t > a$ und $b > t$

(3) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a < b$. Dann gibt es $f: \mathbb{R} \to [0,1]$ glatt mit

$f(t) = 1 \Leftrightarrow t \geq b$

$f(t) = 0 \Leftrightarrow t \leq a$

und f monoton.

Denn: Sei $h(t)$ wie in (2), setze

$$f(t) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{t} h(t)\,dt.$$

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt < \infty = \int_{a}^{b} h(t)\,dt$$

(4) Sei $p \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$. Dann gibt es $f: \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ glatt mit

$f(u) > 0 \Leftrightarrow \|u-p\|_2 < r$

Denn: Wähle $h: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ glatt mit $h(t) > 0 \Leftrightarrow |t|^2 < r$ und betrachte $f(u) = h(\|u-p\|_2^2)$. □

Der Träger einer stetigen Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ ist $\mathrm{supp}(\alpha) = \overline{\{u \in \mathbb{R}^m \mid \alpha(u) > 0\}} \subseteq \mathbb{R}^m$

(engl. support ≙ Träger, beachte den Unterschied zwischen support und supremum, supp ≠ sup !)

16. **Theorem** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt, sei $\mathcal{U}$ eine Menge von offenen Mengen in $\mathbb{R}^m$ mit $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

(a) Dann gibt es $U_1, \dots, U_\ell \in \mathcal{U}$ mit $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m$

(b) Es gibt glatte Funktion mit kompaktem Träger $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $\alpha_j : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ so, dass für jedes $u \in K$ gilt $\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j(u) = 1$ und mit Trägern $\mathrm{supp}(\alpha_j) \subseteq U_j$.

Beweis OE $K \neq \emptyset$, sonst ist alles trivial.

(a) Zu jedem $u \in K$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $u \in U$, sowie ein offenen Quader Q mit $u \in Q \subseteq U$, dessen Ecken rationale Koordinaten haben. Die Anzahl solcher Quader ist abzählbar, also gibt es $U_k \in \mathcal{U}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ mit $K \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$.

Setze $W_k = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$. Angenommen, $K \not\subseteq W_k$ für alle $k \geq 0$. Dann gibt es zu jedem k ein $x_k \in K - W_k = A_k$. Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen $x \in K$ konvergiert. Da A_k abg. ist, gilt $x \in A_k$ für alle k, also $\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k \neq \emptyset$ ↯ #

(b) Zu jedem $v \in U_j \cap K$ gibt es ein $r = r_v > 0$ so, dass $B_{2r}(v) \subseteq U_j$ gilt. Wähle $\beta_{v,r} : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ glatt mit $\beta_{v,r}(u) > 0 \iff \|u - v\|_2 < r$.

Mit (a) folgt: es gibt für jedes $j = 1, \dots, l$ endlich viele $v_{j,1}, \dots, v_{j,n_j} \in U_j$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} \left(B_{r_{j,1}}(v_{j,1}) \cup \dots \cup B_{r_{j,n_j}}(v_{j,n_j}) \right)$$

Setze $\beta_j = \beta_{v_{j,1}} + \dots + \beta_{v_{j,n_j}}$. Dann gilt

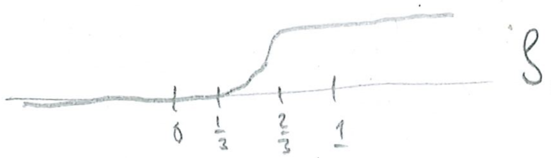
$$\operatorname{supp}(\beta_j) \subseteq \operatorname{supp}(\beta_{v_{j,1}}) \cup \dots \cup \operatorname{supp}(\beta_{v_{j,n_j}}) \subseteq U_j$$

sowie $\sum_{j=1}^{l} \beta_j(u) > 0$ für alle $u \in K$.

Sei $s = \min\{ \sum_{j=1}^{l} \beta_j(u) \mid u \in K \} > 0$, ersetze β_j durch $\frac{1}{s} \cdot \beta_j$ $\leadsto$ OE $\sum_{j=1}^{l} \beta_j(u) \geq 1$ für alle $u \in K$. Wähle $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ glatt mit

$g(t) = 0 \iff t \leq \frac{1}{3}$

$g(t) = 1 \iff t \geq \frac{2}{3}$



sowie $\sigma(t) = g(t) \cdot \frac{1}{t}$. Für

$$\alpha_j(u) = \sigma\left(\sum_{k=1}^{l} \beta_k(u) \right) \cdot \beta_j(u)$$

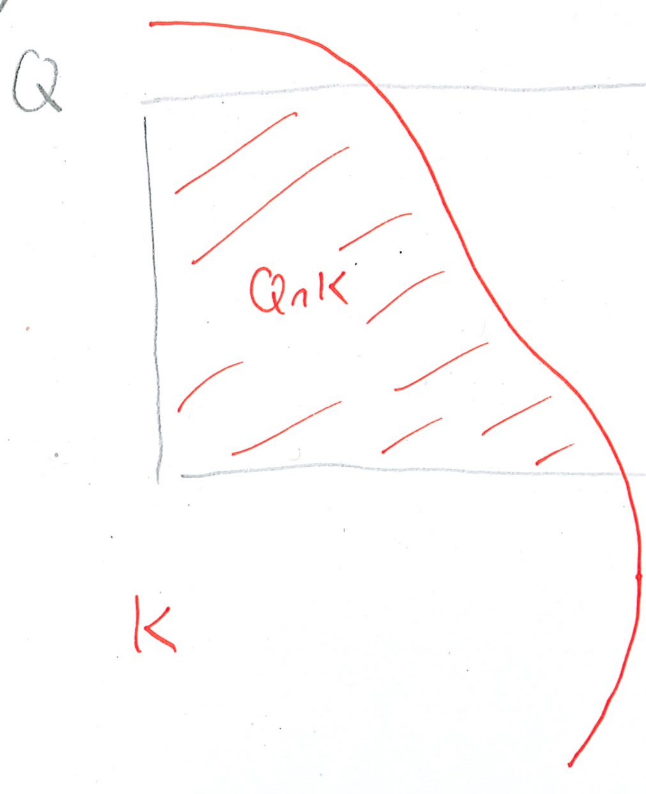
gilt dann $\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j(u) = 1$ für alle $u \in K$. $\square$

17. Def Der Rand einer Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$. Wenn $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt ist, so ist also $\partial K \subseteq K$ auch kompakt.

Wir sagen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand, wenn es zu jedem $u \in K$ einen offenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ gibt mit $u \in Q$, so dass folgendes gilt: es gibt ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ und eine glatte Funktion h (in $m-1$ Variablen) so, dass gilt

∂K $$Q \cap K = \{(w_1, \ldots, w_m) \in Q \mid w_k \leq h(w_1, \ldots, w_m)\}$$

w_k auslassen



(vgl §7.14)

Beispiel Sei $r > 0$, betrachte den abg. r-Ball

$\overline{B}_r(0) = K = \{ u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\|_2 \le r \}$. Hier genügen

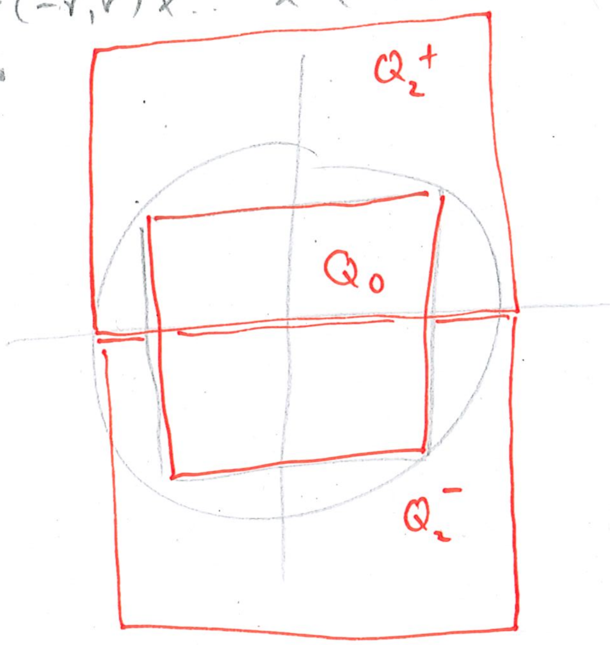
$2m+1$ Quader $Q_0, Q_1^\pm, \dots, Q_m^\pm$

$Q_0 = (-s, s)^m \qquad s = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot r$

$Q_1^+ = (0, 2r) \times (-r, r) \times \dots \times (-r, r)$

$Q_1^- = (-2r, 0) \times (-r, r) \times \dots \times (-r, r)$

usw.



18. Beobachtung Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ Kompaktum mit glattem Rand.
Nach § 7.16 gibt es dann offene Quader $Q_1, \dots, Q_e$ mit ∂K so, dass $K \subseteq Q_1 \cup \dots \cup Q_e$ gilt.
Weiter gibt $\alpha_j : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ glatt mit $\mathrm{supp}(\alpha_j) \subseteq Q_j$ so, dass $\sum_{j=0}^{e} \alpha_j(u) = 1$ für alle $u \in K$.
Ist also $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt mit $F_j = \alpha_j \cdot F$, dass

$\int_K F\,d\lambda^m = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{Q_j \cap K} F_j\,d\lambda^m$. Ist insbesondere $\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein stetig diffbares Vektorfeld, so gilt mit $\xi_j = \alpha_j \cdot \xi$, dass

$$\mathrm{div}(\xi)(u) = \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{div}(\xi_j)(u) \quad \text{für alle } u \in K$$

und $\mathrm{supp}(\xi_j) \subseteq Q_j$. Insbesondere

$$\int_K \mathrm{div}(\xi)\,d\lambda^m = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{Q_j} \mathrm{div}(\xi_j)\,d\lambda^m$$

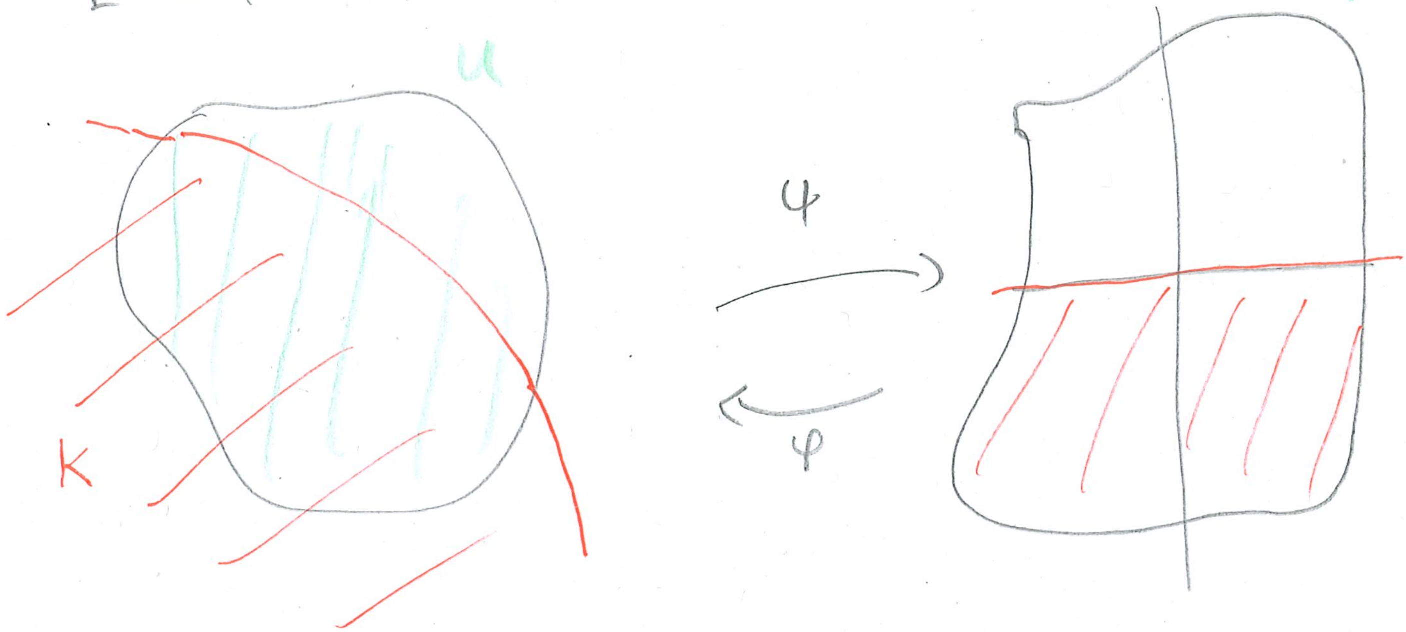
und auf die Summanden rechts können wir § 7.14 anwenden.

Jetzt wollen wir die rechte Seite als ein <u>Flächenintegral</u> schreiben.

19. Def Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Kompaktum mit glattem Rand, sei $u \in K$. Eine Karte oder ein Koordinatensystem nahe K besteht aus einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $u \in U \cap K$ und einem Diffeomorphismus $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(U \cap K) = E^- \cap V$. Dann ist $\varphi(U \cap \partial K) = E^0 \cap V$.(*)

$E^- = \{(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_m \leq 0\}$

$E^0 = \{(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_m = 0\}$



Bsp: $Q = U$ offener Quader wie in Bedingung (∂K) in §7.17, $U \cap K = \{(w_1, \dots, w_m) \in Q \mid w_k \leq h(w_1, \dots, w_m)\}$
w_k auslassen

$\varphi(w_1, \dots, w_m) = (w_1, \dots, w_{m-1}, w_k - h(w_1, \dots, w_m))$

Insbesondere gibt es Karten!

(*) Denn: $u \in \partial K \Leftrightarrow u \in K$ und es gibt Folge in K^c mit Grenzwert u.

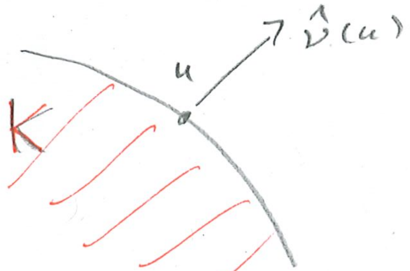
20. Def Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ Kompaktum mit glattem Rand, sei $u \in \partial K$. Dann gibt es genau einen Vektor $\hat{\nu}(u) \in \mathbb{R}^m$ mit

(1) $\|\hat{\nu}(u)\|_2 = 1$

(2) $\langle \hat{\nu}(u), \dot{c}(0) \rangle = 0$ für jede glatte Kurve
$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial K$ mit $c(0) = u$ $(\varepsilon > 0)$

(3) $u + s \cdot \hat{\nu}(u) \in K^c$ für alle $s > 0$ hinreichend klein.

Man nennt $\hat{\nu}(u)$ Einheitsnormale in u



Denn: sei Q Quader wie in ∂K, OE
$Q \cap K = \{(w_1, \dots, w_m) \in Q \mid w_m \leq h(w_1, \dots, w_{m-1})\}$

Definiere $\nu(u) = \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}(u), \dots, -\frac{\partial h}{\partial x_{m-1}}(u), 1 \right)$ (vgl. §7.14)

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial K$ glatt, $c(0) = u$

$\leadsto h(c_1(t), \dots, c_{m-1}(t)) = c_m(t)$ ableiten

$$\leadsto \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial h}{\partial x_j}(u_1, \dots, u_{m-1})\, c_j'(0) = c_m'(0)$$

$\leadsto \langle \nu(u), \dot{c}(0) \rangle = 0.$

Die Kurve $c(t) = (u_1, \dots, u_j + t, \dots u_{m-1}, h(\dots))$

hat $\dot c(t) = (0, \dots, 1, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_j}(u_1 \dots u_{m-1}))$

$(m-1)$ linear unabhängige Vektoren, also ist $\hat\nu(u)$ eindeutig festgelegt. $\square$

21. <u>Def</u> Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Kompaktum mit glattem Rand, sei $\psi: U \to V$ eine Karte, mit $\varphi: V \to U$ Inverse zu ψ. Sei $V^0 = \{(v_1, \dots, v_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid (v_1, \dots, v_{m-1}, 0) \in V\}$

sowie $\varphi^0 : V^0 \to \partial K$, $(v_1, \dots, v_{m-1}) \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_{m-1}, 0)$

Für $w \in V^0$ ist $D\varphi^0(w) : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ linear Abbildung. Dann ist $D\varphi^0(w)^T \cdot D\varphi^0(w)$ eine positiv definite symmetrische $(m-1)\times(m-1)$-Matrix, denn $D\varphi^0(w)$ ist injektiv (weil $D\varphi(w,0)$ injektiv ist).

Setze $g(w) = \sqrt{\underbrace{\det(D\varphi^0(w)^T \cdot D\varphi^0(w))}_{>0}} > 0$

Angenommen, $\tilde\psi : \tilde U \to \tilde V$ ist eine andere Karte.

Setze $W = \psi(U \cap \tilde U) \subseteq V$, $\tilde W = \tilde\psi(U \cap \tilde U) \subseteq \tilde V$

$$\begin{tikzcd} U \cap \tilde U \arrow[d, equal] & W \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "F"] \\ U \cap \tilde U & \tilde W \arrow[l, "\tilde\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \varphi = \tilde\varphi \circ F$$

F Diffeomorphismus

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} \partial K \cap U \cap \tilde U \arrow[d, equal] & W_0 \arrow[l, "\varphi_0^0"'] \arrow[d, "F^0"] \\ \partial K \cap U \cap \tilde U & \tilde W_0 \arrow[l, "\tilde\varphi_0"'] \end{tikzcd} \qquad \varphi^0 = \tilde\varphi^0 \circ F^0$$

F^0 Diffeomorphismus

$$D\varphi^0 = D\tilde{\varphi}^0 \circ DF^0$$

$$\leadsto g(w) = \det\left(\left(D\tilde{\varphi}^0 \circ DF^0(w)\right)^T \cdot \left(D\tilde{\varphi}^0 \circ DF^0(w)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\det(DF^0(w))| \cdot \tilde{g}(F^0(w))$$

22. **Def + Satz** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ Kompaktum mit glattem Rand, sei $f : \partial K \to [-\infty, \infty]$ messbar. Nach §7.16 gibt es Karten $U_j \underset{\varphi_j}{\overset{\psi_j}{\rightleftarrows}} V_j$, $j = 1, \dots, l$ mit $\partial K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_l$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ glatt, $\alpha_j : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ mit $\operatorname{supp}(\alpha_j) \subseteq U_j$ und $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j(u) = 1$ für alle $u \in \partial K$. Insbesondere ist $f = \sum_{j=1}^{l} f_j$ mit $f_j(u) = \alpha_j(u) \cdot f(u)$.

Das Oberflächenintegral von f auf ∂K ist

$$\int_{\partial K} f \, dS = \sum_{j=1}^{l} \int_{\partial K} f_j \, dS \quad \text{mit}$$

$$\int_{\partial K} f_j \, dS = \int_{V_j^0} f_j(\varphi_j^0(w)) \cdot g(w) \, d\lambda^{m-1}$$

(sofern die Integrale existieren; etwa wenn $f \geq 0$ oder wenn f stetig und damit beschränkt ist.)

<u>Satz</u> Das Oberflächenintegral ist <u>unabhängig</u> von den gewählten Karten.

<u>Beweis</u> Notation wie oben mit Karten $U_j \underset{\varphi_j}{\overset{\psi_j}{\rightleftarrows}} V_j$,

$\operatorname{supp}(\alpha_j) \subseteq U_j$, $f: \partial K \to [-\infty, \infty]$ messbar.

Sei $\tilde{U}_j \underset{\tilde{\varphi}_j}{\overset{\tilde{\psi}_j}{\rightleftarrows}} \tilde{V}_j$ ein weiterer Atlas, $j = 1, \dots, \tilde{\ell}$,

$\tilde{\alpha}_j \subseteq \tilde{U}_j$ usw. Betrachte $f_j = \alpha_j \cdot F$ und

$$F_j = \sum_{k=1}^{\tilde{\ell}} \tilde{\alpha}_k \cdot f_j \,,$$

$$\int_{\partial K} f_j \, dS = \int_{V_j^0} f_j(\varphi_j^0(\omega)) \cdot \rho(\omega) \, d\lambda^{m-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\tilde{\ell}} \int_{V_j^0} \tilde{\alpha}_k(\varphi_j^0(\omega)) \cdot f_j(\varphi_j^0(\omega)) \rho(\omega) \, d\lambda^{m-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\tilde{\ell}} \int_{V_j^0} \tilde{\alpha}_k(\underset{\substack{\uparrow \\ \S 7.21}}{\tilde{\varphi}_k^0 \circ F_k^0(\omega)}) \cdot f_j(\underset{\substack{\uparrow \\ \S 7.21}}{\tilde{\varphi}_k^0 \circ F_k^0(\omega)}) \tilde{\rho}(F_k^0(\omega)) \, d\lambda^{m-1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transformations-Satz}}}{=} \sum_{k=1}^{\tilde{\ell}} \int_{\tilde{V}_k^0} \tilde{\alpha}_k(\tilde{\omega}) \cdot f_j(\tilde{\omega}) \cdot \tilde{\rho}(\tilde{\omega}) \, d\lambda^{m-1}$$

$\square$

23. Lemma Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor. Dann gilt $\det(\mathbb{1} + v^T \cdot v) = 1 + \langle v, v\rangle$

Beweis Betrachte die lineare Abbildung $A(w) = v^T v w$

($w \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektor) $A(w) = 0 \iff vw = 0$

also $\ker(A) = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid vw = 0 \}$

$$A(v^T) = \langle v, v\rangle v^T$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbb{1} + A)(w) = w \quad \text{wenn } vw = 0 \\ (\mathbb{1} + A)(v^T) = (1 + \langle v, v\rangle) v^T \end{array}\right\} \quad \mathbb{1} + A \sim \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & & & 1 + \langle v, v\rangle \end{pmatrix}$$

$\square$

24. Theorem (Integralsatz von Gauß)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glattem Rand, sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subseteq W$, sei $\xi : W \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{div}(\xi)\, d\lambda^n = \int_{\partial K} \langle \xi, \hat{\nu} \rangle\, dS$$

wobei $\hat{\nu} : \partial K \to \mathbb{R}^n$ das Einheitsnormalenfeld ist.

Beweis Wir überdecken K mit endlich vielen offenen Quadern $Q_1, \ldots, Q_l$ mit ∂K wie in §7.17, $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} Q_j$

$\alpha_j : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ glatt mit $\operatorname{supp}(\alpha_j) \subseteq Q_j \cap W$

$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j(u) = 1$ für alle $u \in K$. Setze $\xi_j = \alpha_j \cdot \xi$

Berechne $\int_{Q_j} \xi_j \, d\lambda^m$ (wie in §7.14)

$$= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \langle \xi(\omega, h(\omega)), \hat{\nu}(\omega, h(\omega)) \rangle \sqrt{1 + (Dh)^2} \, d\omega_1 \ldots d\omega_{m-1}$$

$\varphi_j^0(\omega) = (\omega, h(\omega)) \rightsquigarrow D\varphi_j^0(\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ \nabla h \end{pmatrix}$

$g(\omega) = \left(\det(1 + \nabla h^T \cdot \nabla h) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + (Dh)^2}$ $\square$

<u>Beispiel</u> $K = \{ u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| \leq r \}$ für $r > 0$

$\xi(u) = u \rightsquigarrow \operatorname{div} \xi = m = \text{const}$

$$\int_K \operatorname{div}(\xi) \, d\lambda^m = r^m \cdot \underbrace{\omega_m}_{\substack{\text{Volumen der} \\ \text{Einheitskugel}}} \cdot m \qquad \omega_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \quad \text{vgl §6.16}$$

$$= \int_{\partial K} r \cdot dS = r \underbrace{\int_{\partial K} dS}_{\text{Oberfläche der Kugel vom Radius } r} \qquad \langle u, \hat{\nu}(u) \rangle = \|u\|_2$$

$$\Rightarrow \int_{\partial K} dS = m \cdot r^{m-1} \cdot \omega_m = r^{m-1} \frac{2 \cdot \pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

Insbesondere für $m = 3$, $r = 1$: $\frac{2 \cdot \pi^{3/2}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2})} = 4 \frac{\pi^{3/2}}{\pi^{1/2}} = 4\pi$ //

Abschließende Bemerkung. Der Gaußsche Integralsatz ist ein Spezialfall des Satzes von Stokes.

Eine k-Form ist eine k-linear alternierende Abbildung, $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Die k-Formen ein Vektorraum $\Lambda^k \mathbb{R}$. Schließlich $C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^k \mathbb{R}) = \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ (glatte k-Formen auf $\mathbb{R}^n$). Für $\alpha : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k \mathbb{R}$ gibt es ein Differential $d\alpha : \mathbb{R}^n \to \Lambda^{k+1} \mathbb{R}$, das das Differential aus Analysis II ($f \mapsto df$) fortsetzt. Der Satz von Stokes besagt als Spezialfall

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha$$

⌈Für Physikerinnen und Physiker: Arnold, Mathematical methods of classical mechanics⌉

⌊Abraham-Marsden, Foundations of mechanics⌋