§ 2 Die reellen Zahlen und etwas Kombinatorik

1. <u>Def</u> Sei R ein Ring oder Körper, sei $x_0, x_1, \ldots, x_n \in R$. Wir schreiben kurz

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$$

↑ Summenzeichen "Sigma"

<u>Satz</u> (Die geometrische Summe) Ist R ein Ring oder Körper mit $x \in R$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x^{n+1} - 1 = (x-1)\sum_{j=0}^{n} x^j$$

Falls R ein Körper ist und falls $x \neq 1$ gilt, so ist

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \sum_{j=0}^{n} x^j$$

$$\boxed{\text{Konvention: } x^0 = 1 \text{ für jedes } x \in R}$$

<u>Beweis</u> $(x-1)\cdot\sum_{j=0}^{n} x^j \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=1}^{n+1} x^j - \sum_{j=0}^{n} x^j = x^{n+1}-1$ $\square$

Distributivgesetz

(Ein <u>Lemma</u> ist ein Hilfsergebnis.)

2. <u>Lemma</u> (Die Bernoullische Ungleichung)

Sei R ein angeordneter Ring, sei $x\in R$ mit $x\geq -1$. Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$$

<u>Beweis</u> mit Induktion nach n.

<u>$n=0$</u>: $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0$ (✓)

<u>$n=1$</u>: $(1+x) \geq 1+x$ (✓)

<u>Induktionsschritt</u> Angenommen, das stimmt für n.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}\cdot(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+n\cdot x) \\ &= 1+x+n\cdot x+\underbrace{n\cdot x^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(n+1)\cdot x\end{aligned}$$ $\square$

3. <u>Def</u> Ist X eine <u>endliche</u> Menge, so schreiben wir $\# X$ für die <u>Anzahl ihrer Elemente</u>.

<u>Lemma</u> Ist X eine endliche Menge mit $\# X = n$ Elementen, so gilt

$$\# P(X) = 2^n$$

<u>Beweis</u> mit Induktion nach n.

<u>$n=0$:</u> $\# X = 0 \Rightarrow X = \emptyset$

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\quad \# P(\emptyset) = 1$

$2^0 = 1$ stimmt. ($\checkmark$)

<u>Induktionsschritt:</u> $X = A \cup \{z\}$ $\quad ; z \notin A$

$\# A = n$ $\quad , \# X = n+1$. Sei $Y \subseteq X$.

<u>1. Fall:</u> $z \notin Y \Leftrightarrow Y \subseteq A$, es gibt 2^n solche Teilmengen

<u>2. Fall</u> $z \in Y$, $Y = (Y \cap A) \cup \{z\}$

Für $(Y \cap A)$ gibt es 2^n Möglichkeiten.

Insgesamt also $\underbrace{2^n + 2^n}_{= 2^{n+1}}$ Teilmengen $Y \subseteq X$

$\square$

4. Binomialkoeffizienten Wir definieren rekursiv

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad (n+1)! = n!\,(n+1)$$

(Lies $n!$ als "n Fakultät") $= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter definieren wir die

Binomialkoeffizienten, für $0 \le k \le n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad \left(\text{lies: "n über k"}\right)$$

also $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, allgemein $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ $\boxed{\text{ÜA}}$

Satz Ist X eine n-elementige Menge, so hat X genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen. Insbesondere ist $\binom{n}{k}$ immer eine natürliche Zahl.

Beweis mit Induktion nach n.

$n = 0$ $\binom{0}{0} = 1$, stimmt: es gibt in der leeren Menge genau eine leere Teilmenge.

<u>Induktionsschritt, $n \to n+1$</u> Schreibe $X = A \cup \{z\}$

$\# A = n$, $z \notin A$, $\# X = n+1$. Sei $Y \subseteq X$ eine k-elementige Teilmenge.

<u>1. Fall</u> $z \notin Y$. Dann ist $Y \subseteq A$, es gibt also $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten für solche Y.

<u>2. Fall</u> $z \in Y$. Dann hat $Y \cap A$ genau $k-1$ Elemente, es gibt $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten solche Y.

Insgesamt gibt es also $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ Möglichkeiten. $\square$

(Ein "Korollar" ist eine direkte Folgerung aus einem <u>Satz</u>.)

<u>Korollar</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

<u>Denn</u>: rechts steht die Anzahl aller Teilmengen einer n-elementigen Menge nach § 2.3. $\square$

5. Die binomische Formel

Sind $a, b \in R$ Elemente eines (kommutativen) Rings R, $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Beweis Induktion nach n.

$\underline{n=0}$ $(a+b)^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \qquad (\checkmark)$$

$\underline{n=1}$ $(a+b) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$

$= a+b$

$\underline{n=2}$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$

Induktionsschritt $n \to n+1$

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$

$(a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k +$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} a^{n-j} b^{j+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^{j} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^{j} \qquad \square$$

6. Def Sei $(X, <)$ eine angeordnete Menge, sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Element $s \in X$ heißt untere Schranke (bzw obere Schranke) von A, falls für alle $a \in A$ gilt $s \leq a$ (bzw $a \leq s$).

Falls zusätzlich gilt $s \in A$, so heißt s Minimum (bzw Maximum) von A, schreib $s = \min(A)$ (bzw $s = \max(A)$).

Beispiel $X = \mathbb{Q}$, $A = \{ q \in \mathbb{Q} \mid -2 < q \leq 3 \}$

untere Schranken sind z.B. $-10, -100, -2$

obere Schranken sind z.B. $5, 55, 3$

A hat 3 als Maximum, aber A hat kein Minimum! $(-2 \notin A)$.

7. Def Eine kleinste obere Schranke heißt (wenn es sie gibt) Supremum von A, $\sup(A)$. Eine größte untere Schranke heißt Infimum von A, $\inf(A)$.

<u>Bsp</u> $X = \mathbb{Q}$, $A = \{ q \in \mathbb{Q} \mid -2 < q \leq 3 \}$

Dann ist 3 das Supremum von A,

$$3 = \sup(A) = \max(A)$$

$$-2 = \inf(A)$$

<u>Beachte:</u> • Wenn ein Supremum oder Infimum existiert, dann ist es <u>eindeutig</u>.

• Wenn ein Maximum oder Minimum existiert, dann ist es auch ein Supremum bzw Infimum.

8. <u>Beispiel</u> $X = \mathbb{Q}$, $B = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2 \}$

B hat eine obere Schranke in $\mathbb{Q}$ (z.B. 2) aber <u>keine</u> kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$, weil es kein $x \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x^2 = 2$.

9. <u>Def</u> Eine angeordnete Menge $(X, <)$ hat die <u>Supremumseigenschaft</u>, falls jede nichtleere Teilmenge $B \subseteq X$, die eine obere Schranke hat, eine kleinste obere Schranke, ein Supremum, hat.

Wir haben gerade gesehen: $(\mathbb{Q}, <)$ hat nicht die Supremumseigenschaft.

10. <u>Def</u> Ein angeordneter Ring R heißt <u>archimedisch</u>, falls es zu jedem $x \in R$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$x \leq n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$$

<u>Bsp</u> $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind archimedisch.

<u>Satz</u> Ein angeordneter Ring R, der die Supremumseigenschaft hat, ist archimedisch. #

<u>Beweis</u> Wir zeigen: wenn R nicht archimedisch ist, dann hat R <u>nicht</u> die Supremumseigenschaft.

Wenn R nicht archimedisch ist, dann gibt es ein $x \in R$ so, dass $n \cdot 1 < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Betrachte also $B = \{ n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Wenn a eine obere Schranke für B ist, dann ist auch $a - 1$ eine

Nachtrag zur Supremumseigenschaft.

Wenn eine angeordnete Menge $(X,<)$ die Supremumseigenschaft hat, dann hat sie auch die Infimumseigenschaft: jede nicht leere Teilmenge $B \subseteq X$, die eine untere Schranke hat, hat ein Infimum

$\boxed{\to \text{ÜA}}$

ohne Schranke für B. <u>Denn</u>: wäre

$n \cdot 1 \geq a - 1$, so wäre $(n+1)\cdot 1 \geq a$ $\lightning$.

Insbesondere hat B keine kleinste obere Schranke, d.h. R hat nicht die Supremumseigenschaft. $\square$

11. <u>Lemma</u> Sei R ein archimedisch angeordneter Körper, sei $\varepsilon \in R$ mit $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

<u>Beweis</u> Wähle $n \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n}$ $\square$

<u>Beispiele</u> • $\mathbb{Z}$ ist archimedisch angeordneter Ring und hat die Supremumseigenschaft.

• $\mathbb{Q}$ ist archimedisch angeordneter Körper und hat <u>nicht</u> die Supremumseigenschaft.

Das ist ein <u>Nachteil</u> von $\mathbb{Q}$.

Den folgenden Satz beweisen wir jetzt nicht, benutzen ihn aber.

12. Theorem Es gibt einen angeordneten Körper, der die Supremumseigenschaft hat, der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Jeder andere angeordnete Körper K, der die Supremumseigenschaft hat, ist isomorph zu $\mathbb{R}$, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung

$f: K \to \mathbb{R}$ mit

- $f(x+y) = f(x)+f(y)$
- $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$
- $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

für alle $x,y \in K$.

13. Def (Folgen reeller Zahlen) Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge (z.B. $I=\mathbb{N}$, oder $I=\{1,2,3,\dots\}=\mathbb{N}-\{0\}$. Eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Indexmenge I ist eine Abbildung

$$c: I \to \mathbb{R}$$

Schritt $c_i = c(i)$, die c_i heißen

<u>Folgeglieder</u> von c. Schreibe auch $c = (c_i)_{i \in I}$

Die Folge c <u>konvergiert</u> gegen eine reelle Zahl r, falls es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k \geq n$ gilt

$$|c_k - r| \leq \varepsilon$$

<u>Beispiele</u> (a) die <u>konstante Folge</u> $c_i = r$ für alle $i \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen r

(b) Die Folge $c_i = \frac{1}{i}$ $\quad i = 1, 2, 3, \ldots$

konvergiert gegen $r = 0$, denn: für $\varepsilon > 0$ und $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ gilt: wenn $k \geq n$ ist,

so folgt $k \geq n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, also $\varepsilon \geq \frac{1}{k} = |c_k - 0|$

c) $c_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \text{ gerade} \\ \frac{1}{i} & \text{wenn } i \text{ ungerade} \end{cases}$

Diese Folge konvergiert nicht gegen 0 und nicht gegen 1 (tatsächlich konvergiert sie gegen keine reelle Zahl)

d) $c_i = i \qquad i = 0, 1, 2, 3,$

konvergiert gegen keine reelle Zahl.

14. Satz Eine reelle Folge c konvergiert gegen höchstens eine reelle Zahl r. Diese Zahl heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge c, man schreibt

$$r = \lim_{i \in I} c_i$$

Beweis Wir nehmen an, das ist falsch. Dann konvergiert c gegen zwei verschiedene Zahlen r, s, $r \neq s$. Setze $\varepsilon = \frac{|r-s|}{4} > 0$

Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geq n$ gilt

$k \geq n_1 \Rightarrow |c_k - r| \leq \varepsilon$

$k \geq n_2 \Rightarrow |c_k - s| \leq \varepsilon$

Ist also $k \geq n_1, n_2$, so ist

$$|r-s| = |r - c_k + c_k - s| \leq |r-c_k| + |s-c_k|$$
$$\leq 2\varepsilon = \frac{|r-s|}{2} \quad ⚡$$

denn $|r-s| \neq 0$ $\square$

Eine Folge c, die nicht konvergiert, heißt **divergent**.

15. Def Eine Folge c in $\mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|c_i| \leq s \quad \text{für alle } i \in I \text{ gilt.}$$

Satz Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.

Beweis Sei $r = \lim\limits_{i \in I} c_i$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass $|c_i - r| \leq 1$ für alle $i \geq n$.

Wähle nun $s \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

(1) $s \geq |c_i|$ für alle $i \leq n$.
(es gibt nur endlich viele solche $i \leq n$!)

(2) $s \geq 1 + |r|$

Für $i \leq n$ ist also $|c_i| \leq s$. Für $i \geq n$ ist $|c_i| = |c_i - r + r| \leq |c_i - r| + |r|$

$$\leq 1 + |r| \leq s \quad \square$$

<u>Bemerkung</u> Jede nicht leere <u>endliche</u> Menge von reellen Zahlen hat ein Minimum / Maximum (Beweis mit Induktion nach Anzahl → ÜA)

16. <u>Def</u> Eine reelle Folge c heißt

<u>monoton fallend</u>, wenn $c_i \geq c_j$ für alle $i \leq j$

<u>streng monoton fallend</u>, wenn $c_i > c_j$ für alle $i < j$

Analog: <u>monoton wachsend</u>, <u>streng monoton wachsend</u>.

<u>Bsp</u> $c_i = i$ $\quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ist streng monoton wachsend (und divergent)

\#

<u>Satz</u> Jede monoton fallende (bzw monoton wachsende) beschränkte Folge ist konvergent.

<u>Bew</u> Sei $(c_i)_{i\in I}$ monoton wachsend, mit $|c_i| \le 1$ für alle $i \in I$. Setze $r = \sup\{c_i \mid i \in I\}$ (→ Supremumseigenschaft)

<u>Beh</u>: $r = \lim\limits_{i\in I} c_i$.

<u>Denn</u>: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $r - \varepsilon$ <u>keine</u> obere Schranke von $\{c_i \mid i \in I\}$, also gibt es $n \in I$ mit $c_n > r - \varepsilon$. Für $k \ge n$ ist

$r \ge c_k \ge c_n > r - \varepsilon$, also $|r - c_k| \le \varepsilon$. □

Für monoton fallende Folgen betrachte das Infimum. □

<u>Beispiel</u> Rekursiv definierte Folgen.

$$c_0 = 0, \quad c_{k+1} = \sqrt{6 + c_k}$$

<u>Beh</u> $|c_k| \le 3$ für alle k.

Mit Induktion nach k

<u>$k = 0$</u>: (✓)

<u>$k \to k+1$</u>: $c_{k+1}^2 = 6 + c_k \le 6 + 3 = 9 \Rightarrow |c_k| \le 3$

Weiter gilt: $0 = c_0 \leq c_1 = \sqrt{6}$. Ist $c_{k-1} \leq c_k$, so folgt $c_{k+1} = \sqrt{6+c_k} \geq \sqrt{6+c_{k-1}} = c_k$.

Also ist die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt. Aber was ist der Grenzwert?

$\rightarrow$ später.

17. Definition Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ unendliche Teilmenge. Die Menge aller reellen Folgen mit Indexmenge I bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^I$. Für Folgen $a, b \in \mathbb{R}^I$ definieren wir neue Folgen $a+b$ und $a \cdot b$ durch

$$(a+b)_i = a_i + b_i \qquad i \in I$$

$$(a \cdot b)_i = a_i \cdot b_i$$

Damit wird $\mathbb{R}^I$ ein Ring, mit Nullelement

$$(0)_{i\in I} = (0,0,0,0,\dots)$$ und Einselement

$$(1)_{i\in I} = (1,1,1,\dots)$$

Gleichzeitig ist $\mathbb{R}^I$ ein (unendlichdimensionaler) reeller Vektorraum, wenn wir für $r \in \mathbb{R}$

definier $(r\cdot a)_i = r\cdot a_i$.

Es sei $c(I) \subseteq \mathbb{R}^I$ die Menge aller <u>konvergenten</u> reellen Folgen.

18. <u>Theorem</u> Seien $a, b \in c(I)$ und sei $r \in \mathbb{R}$.

Dann gilt: (i) $a+b \in c(I)$

(ii) $a\cdot b \in c(I)$

(iii) $r\cdot a \in c(I)$

d.h. Summen, Produkte und skalare Vielfache von konvergenten Folgen sind wieder konvergent.

<u>Kurz:</u> $c(I)$ ist ein Ring und ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^I$.

Weiter gilt (iv) $\lim\limits_{i\in I}(a_i+b_i) = \lim\limits_{i\in I} a_i + \lim\limits_{i\in I} b_i$

(v) $\lim\limits_{i\in I}(a_i\cdot b_i) = \lim\limits_{i\in I} a_i \cdot \lim\limits_{i\in I} b_i$

(vi) $\lim\limits_{i\in I}(r\cdot a_i) = r\cdot \lim\limits_{i\in I} a_i$

Kurz: die Abbildung $c(I) \to \mathbb{R}$, die jeder konvergenten Folge a_i ihren Grenzwert $\lim\limits_{i\in I} a_i$ zuordnet, ist ein <u>Homomorphismus</u>.

Bevor wir den Beweis führen, machen wir eine nützliche <u>Vorüberlegung</u>. Angenommen, c ist eine reelle Folge, $r \in \mathbb{R}$ und $K > 0$. Wenn es für jedes $\varepsilon >$ ein k gibt so, dass für alle $i \geq k$ gilt $|c_i - r| \leq K \cdot \varepsilon$, dann konvergiert die Folge c gegen r.

<u>Denn</u> zu $\tilde{\varepsilon} > 0$ setze $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{K}$, dann ist $K \cdot \varepsilon = \tilde{\varepsilon}$!

Beweis von Theorem 18. Wir setzen $s = \lim_{i \in I} a_i$ und $t = \lim_{i \in I} b_i$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_i - s| \leq \varepsilon$ und $|b_i - t| \leq \varepsilon$ für alle $i \geq k$ gilt.

Zu (i) und (iv): Es gilt für $i \geq k$, dass

$$|a_i + b_i - (s+t)| \leq |a_i - s| + |b_i - t| \leq 2 \cdot \varepsilon \quad \square$$

Zu (ii) und (v): Wir dürfen annehmen, dass $\varepsilon \leq 1$. Für $i \geq k$ gilt dann

$$|a_i \cdot b_i - s \cdot t| = |a_i (b_i - t) + t(a_i - s)|$$

$\leq |a_i| \cdot |b_i - t| + |t| \cdot |a_i - s|$

$\leq (|s|+1) \cdot \varepsilon + |t| \cdot \varepsilon$

$\leq (|s| + |t| + 1) \cdot \varepsilon$ $\square$

Genauso folgt (iii) und (vi). $\square$

<u>Addendum zum Theorem</u> Falls $s \neq 0$ und falls $a_i \neq 0$ für alle $i \in I$ gilt, so gilt auch

$\lim_{i \in I} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{s}$.

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$, ohne Einschränkung $\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot |s|$.

Ist $|a_i - s| \leq \varepsilon$, so folgt $|a_i| \geq \frac{1}{2} \cdot |s| > \varepsilon$.

$|s| - |a_i| \leq |a_i - s|$

Nun gilt

$$\left| \frac{1}{a_i} - \frac{1}{s} \right| = \left| \frac{s - a_i}{a_i \cdot s} \right| = \frac{1}{|a_i| \cdot |s|} |s - a_i|$$

$$\leq \frac{2}{|s|^2} |s - a_i| \leq \frac{2}{|s|^2} \cdot \varepsilon$$ $\square$

Anwendungen • Sei $I = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$a_i = \frac{1}{i^l} \qquad l \geq 1 \text{ fest}$$

$$\Rightarrow a_i = \underbrace{b_i \cdots b_i}_{l\text{-mal}} \qquad b_i = \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow \lim_{i \in I} \frac{1}{i^l} = 0$$

• $$c_i = \frac{i + i^5}{3i^7 + 4i^9 + 1} = \frac{1/i^8 + \frac{1}{i^4}}{3/i^2 + 4 + 1/i^9}$$

$$\Rightarrow \lim_{i \in I} c_i = \frac{0 + 0}{0 + 4 + 0} = 0$$

#

19. Def Eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $(c_i)_{i \in I}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge

$$J = \{ i \in I \mid |c_i - t| \leq \varepsilon \}$$ unendlich ist.

Bsp $$c_i = \begin{cases} 1 & i \text{ gerade} \\ \frac{1}{i} & i \text{ ungerade} \end{cases} \qquad I = \mathbb{N}$$

Dann sind 0 und 1 Häufungspunkte der Folge, denn die Menge

$\{i \in I \mid |c_i - 1| \leq \varepsilon\}$ und

$\{i \in I \mid |c_i - 0| \leq \varepsilon\}$ sind beide für jedes

$\varepsilon > 0$ unendlich.

<u>Def</u> Ist c eine Folge mit Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ und ist $J \subseteq I$ eine unendliche Teilmenge, dann heißt die Folge $(c_j)_{j \in J}$ <u>Teilfolge</u>.

<u>20. Satz</u> Eine reelle Zahl t ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(c_i)_{i \in I}$, wenn es eine Teilfolge $(c_j)_{j \in J}$ gibt, $J \subseteq I$, mit $\lim\limits_{j \in J} c_j = t$.

<u>Beweis</u> Angenommen, $\lim\limits_{j \in J} c_j = t$. Sei $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|c_j - t| \leq \varepsilon$ für alle $j \in J$ mit $j \geq k$. Insbesondere ist

$\{j \in J \mid |c_j - t| \leq \varepsilon\}$ unendlich, also auch

$\{i \in I \mid |c_i - t| \leq \varepsilon\}$, denn $J \subseteq I$.

Angenommen, t ist ein Häufungspunkt. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei $I_n = \{ i \in I \mid |c_i - t| \leq \frac{1}{n} \}$

$\Rightarrow$ I_n unendlich und $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$

Setze $i_1 = \min I_1$. Wähle jetzt rekursiv $i_{k+1} \in I_{k+1}$ mit $i_{k+1} > i_k$. Das geht immer, weil I_{k+1} unendlich ist. Setze $J = \{ i_1, i_2, i_3, \ldots \} \subseteq I$. Dann ist J unendlich, weil $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$.

Ist $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, so folgt für alle $j \in J$ mit $j \geq i_n$, dass $|c_j - t| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

Also gilt $\lim\limits_{j \in J} c_j = t$ $\square$

21. Theorem (Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte reelle Folge hat einen kleinsten Häufungspunkt.

Beweis: Sei $(c_i)_{i \in I}$ eine beschränkte Folge, $|c_i| \leq s$ für alle $i \in I$. Sei

$X = \{ x \in \mathbb{R} \mid$ es gibt nur endlich viele $i \in I$ mit $c_i < x \}$

Es folgt $-s \in X \Rightarrow X \neq \emptyset$. Ist $x \in X$ und $y \leq x$, so folgt $y \in X$. Weiter ist s eine obere Schranke von X. Wir setzen

$$t = \sup(X) \qquad \text{Supremum von } X$$

Beh: t ist ein Häufungspunkt der Folge c.

Denn: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $x \in X$ mit $x > t - \varepsilon \Rightarrow t - \varepsilon \in X$. Also gibt es nur endlich viele $i \in I$ mit $c_i < t - \varepsilon$.

Wäre andererseits $J = \{ j \in I \mid c_j \leq t + \varepsilon \}$ auch endlich, so wäre $t + \varepsilon \in X$ ↯

Also ist J unendlich, damit auch die Menge

$J' = \{ j \in I \mid t - \varepsilon \leq c_j \leq t + \varepsilon \}$, das heißt,

t ist ein Häufungspunkt der Folge c.

Angenommen, $t' < t$ ist ein weiterer Häufungspunkt der Folge. Dann gäbe es unendlich viele j mit $c_j < \frac{t+t'}{2}$, und $\frac{t+t'}{2} < t$

$\Rightarrow \frac{t+t'}{2} \in X$ ↯ $\square$

22. Man nennt den kleinsten Häufungspunkt auch <u>limes inferior</u> und schreibt

$$t = \liminf_{i \in I} c_i = \varliminf_{i \in I} c_i$$

Ganz analog hat dann $(c_i)_{i \in I}$ auch einen größten Häufungspunkt, den <u>limes superior</u>

$$\limsup_{i \in I} c_i = \varlimsup_{i \in I} c_i$$

23. Bemerkung. Wenn man eine reelle Folge an endlich vielen Stellen abändert, dann ändert sich nichts an ihren Grenzwerten und Häufungspunkten.

Genauer: Ist $J \subseteq I$ und ist $I - J$ endlich, dann hat die Teilfolge $(c_j)_{j\in J}$ die gleichen Grenzwerte und Häufungspunkte wie die Folge $(c_i)_{i\in I}$.