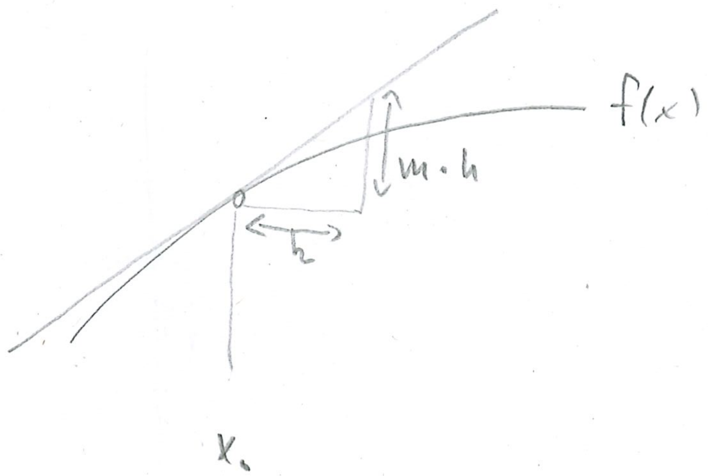
§6 Differentiation

Idee Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir wollen f "nahe x_0" durch eine Geradengleichung $y = m \cdot x + t$ approximieren, also

" $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + m \cdot h$ für h klein"



also Steigung $m \approx \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

1. Def Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen, wenn es zu jedem $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt so, dass gilt

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \} \subseteq U.$$

Beispiel
- $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sind offen
- $(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ ist offen für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- $\mathbb{R} - \{0\} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \}$ ist offen

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht offen.
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ist nicht offen.

2. Def Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, sei $x_0 \in U$, sei

$g : U - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

Wir schreiben $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c$, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) Für jede Folge $(t_n)_{n \in I}$ in $U - \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n \in I} t_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n \in I} g(x_n) = c$

(ii) Die Funktion $p(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq x_0 \\ c & x = x_0 \end{cases}$ ist stetig im Punkt x_0.

Beweis, dass (i) $\Leftrightarrow$ (ii):

Nach Definition folgt (ii) $\Rightarrow$ (i).

Angenommen, es gilt nicht (ii). Dann gibt es eine Folge $(t_n)_{n \in I}$ mit $\lim\limits_{n \in I} t_n = x_0$ in U und $\varepsilon > 0$ so, dass $K = \{n \in I \mid |g(t_n) - c| \geq \varepsilon\}$ unendlich ist.

Dann gilt $\lim\limits_{n \in K} t_n = x_0$, aber nicht $\lim\limits_{n \in K} g(t_n) = c$ $\square$

3. **Def** Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, sei $x_0 \in U$, sei $f: U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann heißt f differenzierbar im Punkt x_0 mit Ableitung $f'(x_0) = c$, falls gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c$$

[d.h. wenn für jede Folge $(t_n)_{n \in I}$ in $U - \{x_0\}$ mit $\lim_{n \in I} t_n = x_0$ gilt $\lim_{n \in I} \frac{f(t_n) - f(x_0)}{t_n - x_0} = c$]

Wir können das auch anders formulieren. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$ gilt. Setze für $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$p(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} & \text{für } h \neq 0 \\ c & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

Dann ist f diff'bar in x_0 genau dann, wenn gilt $\lim_{h \to 0} p(h) = c$ $\left(\text{d.h. } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = c\right)$.

oder äquivalent: p ist stetig in $h = 0$.

Andere Schreibweise für die Ableitung:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

Wir nennen f differenzierbar (auf U), wenn f in <u>jedem</u> $x_0 \in U$ diff'bar ist.

<u>Bemerkung</u> Wenn f in x_0 diff'bar ist, dann ist f stetig in x_0, denn

$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot p(h)$ ist stetig in $h=0$.

4. Beispiele $U = \mathbb{R}$, $x_0 \in U$

(a) $f(x) = c$ konstant

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \text{diff'bar}$$

(b) $f(x) = m \cdot x + t$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m \Rightarrow f'(x_0) = m \quad \text{diff'bar}$$

(c) $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

diff'bar

(d) $U = \mathbb{R} - \{0\}$, $x_0 \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x \cdot x_0} \cdot \frac{x_0 - x}{x - x_0} = -\frac{1}{x x_0}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2} \quad \text{diff'bar}$$

(e) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

(i) $x_0 > 0$ $\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ für $x > 0$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 1 \quad \text{diff'bar}$$

(ii) $x_0 < 0$ $\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -1$ für $x < 0$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -1 \quad \text{diff'bar}$$

(iii) $x_0 = 0$ betrachte die Folgen

$$t_n = \frac{1}{n}, \quad s_n = \frac{-1}{n} \qquad n \in I = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Es gilt $\lim\limits_{n\in I} t_n = 0 = \lim\limits_{n \in I} s_n$, aber

$$\frac{f(t_n) - f(0)}{t_n} = 1 \neq -1 = \frac{f(s_n) - f(0)}{s_n}$$

also ist $f(x) = |x|$ <u>nicht</u> diff'bar in $x_0 = 0$.

5. <u>Beobachtung</u> Eine Funktion f ist genau dann diff'bar in $x_0 \in U$, mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$, wenn es eine Abbildung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(0) = 0$, die stetig ist in $h = 0$, mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + h \cdot \varphi(h)$$

wobei $m = f'(x_0)$ (vgl. Einleitung!)

Wenn f stetig ist, so ist auch φ stetig.

Denn: setze $\varphi(h) = p(h) - p(0)$, also

$$\varphi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - m & \text{für } h \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

6. <u>Satz</u> (Rechenregeln für Ableitungen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, sei $x_0 \in U$, seien f und g Abbildungen auf U, die in x_0 diff'bar sind.

Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$, $r \cdot f$ (für $r \in \mathbb{R}$) diff'bar in x_0. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, so ist $\frac{f}{g}$ diff'bar in x_0. Es gilt dann

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$ (Summenregel)

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$ (Produktregel)

$$(r \cdot f)'(x_0) = r \cdot f'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$ (Quotientenregel)

Insbesondere $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

#

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$. Für $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ setze

$$p(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & h \neq 0 \\ f'(x_0) & h = 0 \end{cases}$$

$$q(h) = \begin{cases} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} & h \neq 0 \\ g'(x_0) & h = 0 \end{cases}$$

Dann sind p und q stetig in $h=0$

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = p(h)+q(h)$$

also $$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = p(0)+q(0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

Weiter

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} = f(x_0+h)\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + g(x_0)\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

also $$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} = f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0).$$

Mit $g(x)=r=$ const und $g'(x_0)=0$ folgt

$(rf)'(x_0) = r\cdot f'(x_0)$ (oder direkt Rechnung).

$$\frac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h\cdot g(x_0+h)\cdot g(x_0)}$$

$$= \frac{-q(h)}{g(x_0+h)\,g(x_0)}$$

also $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h}\right) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Mit der Produktregel folgt jetzt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$ $\square$

7. Beispiele

(a) $U = \mathbb{R}$, $m \geq 1$, $f(x) = x^m$. Dann gilt $f'(x) = m x^{m-1}$

Der Fall $m = 1$ ist Bsp. §6.4 (b), dann weiter mit Induktion: $\underline{m \to m+1}$, $m \geq 1$

$$f(x) = x^{m+1} = x^m \cdot x \leadsto f'(x) = m x^{m-1} \cdot x + x^m \cdot 1$$
$$= (m+1) x^m$$

(b) $U = \mathbb{R} - \{0\}$, $m \geq 1$, $f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$.

Dann gilt $f'(x) = -m \cdot x^{-m-1}$

Der Fall $m = 1$ ist Bsp §6.4 (d), nun Induktion

$m \geq 1$, $m \to m+1$

$$f(x) = \frac{1}{x^{m+1}} = \frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x} \leadsto f'(x) = \frac{-m}{x^{m+1}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^m} \cdot \frac{-1}{x^2}$$
$$= -(m+1) \frac{1}{x^{m+2}}$$

(c) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0) \cdot \underbrace{\frac{\exp(h) - 1}{h}}_{= g(h)}$$

$$g(h) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} h^k}_{\text{konvergiert absolut}}$$

(ähnlich §3.15 mit Quotientenkriterium)

Es gilt $g(0)=1$ und g ist stetig $\Rightarrow$ exp diff'bar mit $\lim\limits_{h\to 0} \exp(x_0)\, g(h) = \exp(x_0)$, d.h.

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

(d) Ähnlich zeigt man: $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$ $\boxed{\text{ÜA}}$

Allgemein: ist $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$, so ist $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} x^k$ ($\rightarrow$ später)

8. <u>Satz</u> (<u>Die Kettenregel</u>) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen, seien $f: U \to V$ sowie $g: V \to \mathbb{R}$ Abbildungen, $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ mit $f(x_0) = y_0$. Wenn f in x_0 diff'bar ist und g in y_0 diff'bar ist, dann ist $g\circ f: x \mapsto g(f(x))$ in x_0 diff'bar mit

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$$

Beweis
$$p(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & h \neq 0 \\ f'(x_0) & h = 0 \end{cases} \quad \text{stetig in } 0$$

$$q(\tilde{h}) = \begin{cases} \frac{g(y_0+\tilde{h})-g(y_0)}{\tilde{h}} & \tilde{h} \neq 0 \\ g'(y_0) & \tilde{h} = 0 \end{cases} \quad \text{stetig in } 0$$

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{=\tilde{h}}}{h} \cdot q(\underbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}_{=\tilde{h}})$$

$$= p(h) \cdot q(h \cdot p(h))$$

also $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = p(0) \cdot q(0)$ $\square$

9. Anwendung: lokale Extrema

Def Sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, sei $x_0 \in A$, mit
Dann hat f in x_0 ein lokales Maximum (ein lokales Minimum), wenn es $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in A$ (mit $|x - x_0| \leq \varepsilon$) (bzw $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in A$ (mit $|x - x_0| \leq \varepsilon$)).

Satz Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in U$, sei $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar in x_0. Wenn f in x_0 ein lokales Minimum oder Maximum hat, so gilt $f'(x_0) = 0$.

(Ein notwendiges Kriterium für Extrema ist $f' = 0$)

Beweis Lokales Maxim. in $x_0 \Rightarrow f(x_0+h) \leq f(x_0)$ für alle $|h| \leq \varepsilon$, also gilt für $p(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & h \neq 0 \\ f'(x_0) & h = 0 \end{cases}$

dass $p(h) \leq 0$ für $h > 0$ und $p(h) \geq 0$ für $h < 0$.

Da p in 0 stetig ist, folgt $p(0) = 0$ $\square$

Ist also $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar in allen $x_0 \in (a,b)$, so muss man zum Bestimmen der Extrema $f(a), f(b)$ sowie alle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ untersuchen $\to$ Schule.

10. **Lemma** (Satz von Rolle)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei f in allen $x \in (a,b)$ diff'bar. Wenn gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

<u>Beweis</u> 1. Fall: $f = \text{const} \Rightarrow f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$ fertig.

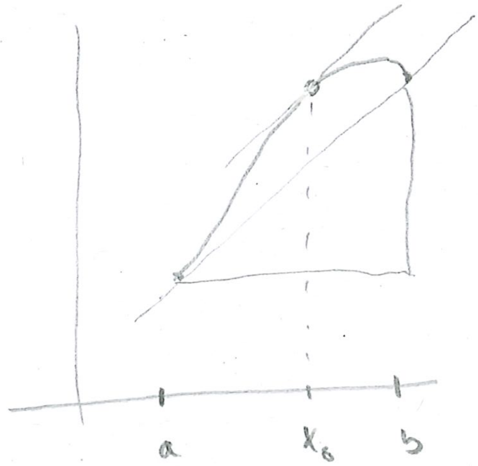
2. Fall: f nicht konstant. Nach dem Satz von Weierstraß gilt $f([a,b]) = [u,v]$ und $u \neq v$ (weil f nicht konstant). OE $u \neq f(a) = f(b)$, $f(x_0) = u$. Dann hat f ein lokales Extremum in x_0, $x_0 \neq a, b \Rightarrow f'(x_0) = 0$ nach §6.9.

11. <u>Theorem</u> (<u>Mittelwertsatz der Differentialrechnung</u>)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in allen $x_0 \in (a,b)$ diff'bar, sei $a < b$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

#



<u>Beweis</u> Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - m \cdot (x - a), \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dann ist g stetig, $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(a)$, g diff'bar in allen $x \in (a,b)$. Nach Rolle gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit $g'(x_0) = 0$

Nun ist $0 = g'(x_0) = f'(x_0) - m$, also $f'(x_0) = m$ $\square$

Korollar A Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar.

(i) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f monoton steigend

(ii) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f monoton fallend

(iii) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f konstant.

Beweis (i) Sei $a < u < v < b$. Dann ist f stetig auf $[u,v]$, es folgt $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \geq 0$, also $f(v) - f(u) \geq 0$.

(ii) genauso

(iii) folgt aus (i) und (ii). $\square$

Korollar B (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diff'bar, für $a < b$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit $(f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(b) - g(a))\, f'(x_0)$

Beweis Betrachte $\varphi(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$

$\varphi(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) g(b) = \varphi(b)$, jetzt Satz von Rolle. $\square$

Korollar C (Regel von de l'Hôpital)

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b]$ stetig und diff'bar auf (a,b) mit stetig Ableitungen f', g', und $g'(x) \neq 0 \neq g(x)$ für alle $x \neq a$, mit $f(a) = g(a) = 0$.

Falls für jede Folge $(t_n)_{n\in I}$ in (a,b) mit $\lim\limits_{n\in I} t_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\in I} \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} = c$, so gilt auch

$$\lim_{n\in I} \frac{f(t_n)}{g(t_n)} = c.$$

Kurz: aus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$ folgt $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.

Beweis Für jedes u mit $a < u < b$ gibt es $v \in (a,u)$ mit

$$f'(v)(g(u) - \cancelto{0}{g(a)}) = g'(v)(f(u) - \cancelto{0}{f(a)})$$

also $\frac{f'(v)}{g'(v)} = \frac{f(u)}{g(u)}$, also $\frac{f(t_n)}{g(t_n)} = \frac{f'(s_n)}{g'(s_n)}$

mit $a < s_n < t_n$, die rechte Seite konvergiert gegen c.

$\square$

Bsp $\frac{x}{\sin(x)}$ auf $(0,1)$ $\quad f(x) = x \quad f'(x) = 1$

$\quad g(x) = \sin(x) \quad g'(x) = \cos(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$ also $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$

12. <u>Def</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Wir sagen, $f: U \to \mathbb{R}$ ist <u>stetig differenzierbar</u>, wenn f differenzierbar ist auf U <u>und</u> wenn f' stetig ist. Schreib

$$C^1(U,\mathbb{R}) = \{ f: U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig diff'bar} \}$$
$$\subseteq C(U,\mathbb{R}) = \{ f: U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

Die Abbildung $f \longmapsto f'$

$$C^1(U,\mathbb{R}) \to C(U,\mathbb{R})$$

ist dann linear nach §5.6.

Allgemeiner heißt f k-mal stetig diff'bar, wenn f k-mal diff'bar ist <u>und</u> die k-te Ableitung stetig ist. Wir nennen f <u>glatt</u>, wenn f beliebig oft (stetig) diff'bar ist.

Schreib $C^k(U,\mathbb{R}) = \{ f: U \to \mathbb{R} \mid f \text{ } k\text{-mal stetig diff'bar} \}$

$$C^\infty(U,\mathbb{R}) = \{ f: U \to \mathbb{R} \mid f \text{ glatt} \}$$

All das sind reelle Vektorräume.

13. <u>Satz</u> Sei $a < b < c$ und sei $f \in R([a,c])$. Dann ist f auch eine Regelfunktion auf $[a,b]$ und auf $[b,c]$ und es gilt
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

<u>Beweis</u> Sei $g \in Step([a,c], \mathbb{R})$. Dann ist g Stufenfunktion auf $[a,b]$ und auf $[b,c]$, mit
$$\int_a^c g(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_b^c g(x)dx.$$

Wenn $\|f-g\|_\infty \le \varepsilon$ gilt, so gilt

$|f(x)-g(x)| \le \varepsilon$ für $x \in [a,b]$ und
$|f(x)-g(x)| \le \varepsilon$ für $x \in [b,c]$

$\Rightarrow$ f ist Regelfunktion auf $[a,b]$ und auf $[b,c]$

Weiter ist

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \right| \le$$

$$\underbrace{\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right|} + \underbrace{\left| \int_b^c f(x)\,dx - \int_b^c g(x)\,dx \right|} + \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx}\Bigg|$$

$$\le \varepsilon(b-a) + \varepsilon(c-b) + \varepsilon(c-a) = 2\varepsilon(c-a)$$

Solch ein g gibt es für <u>jedes</u> $\varepsilon > 0$, also ist

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = 0 \qquad \square$$

<u>Konvention:</u> für $u < v$ setze

$$\int_v^u f(x)\,dx = -\int_u^v f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_u^u f(x)\,dx = 0.$$

14. Theorem (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, setze für $a \le t \le b$

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx .$$

Dann ist F stetig auf $[a,b]$ und stetig diff'bar auf (a,b), mit $F' = f$.

Bew: Es gilt $F(t+h) - F(t) = \int_t^{t+h} f(x)\,dx$

$= f(u)\cdot h$ für ein $u \in [x, x+h]$ oder $u \in [x+h, x]$ nach § 5, 17.

Konsequenzen daraus:

(a) F ist stetig. Denn: (Falls) $\lim_{n\in I} t_n = t$

$$\Rightarrow F(t_n) - F(t) = f(u_n)\cdot(t_n - t)$$

$$|t_n - t| \ge |u_n - t|$$

$$\leadsto \lim_{n\in I} F(t_n) = F(t)$$

(b) <u>F ist diff'bar auf (a,b)</u>

Setze
$$p(h) = \begin{cases} \dfrac{F(t+h)-F(t)}{h} & h \neq 0 \\ f(t) & h = 0 \end{cases}$$

Ist $\lim\limits_{n\in I} h_n = 0$, so ist
$$p(h_n) = \begin{cases} f(u_n) & h_n \neq 0,\ |u_n - t| \leq |h_n| \\ f(t) & h_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\in I} p(h_n) = p(0) = f(t)$

also $F'(t) = f(t)$.

Damit ist F' auch stetig auf (a,b). $\square$

15. <u>Def</u> Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wenn $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar ist mit $F' = f$, so heißt F <u>Stammfunktion</u> von f.

Falls $\tilde{F}$ eine weitere Stammfunktion ist, so gilt $F - \tilde{F} = \text{const}$.

<u>Denn</u> $(F - \tilde{F})' = f - f = 0$, benutze nun § 6.11 Kor A (iii). $\square$

16. Theorem (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f: [a,b] \to$ stetig. Wenn $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist mit $F'(t) = f(t)$ für alle $t \in (a,b)$, so gilt für alle $u, v \in [a,b]$

$$\int_u^v f(x)\,dx = F(v) - F(u) = F(t)\Big|_{t=u}^{v}.$$

Beweis Setze $\tilde{F}(t) = \int_a^t f(x)\,dx$. Dann gilt

$\tilde{F}'(t) = f(t)$ für $a < t < b$ und

$$\int_u^v f(x)\,dx = \tilde{F}(v) - \tilde{F}(u) \quad \text{nach § 6.14}$$

und § 6.13. Also sind $\tilde{F}$ und F Stammfunktionen von f auf (a,b). Damit gilt

für alle $t \in [a,b]$ $\tilde{F}(t) = F(t) + r$ für ein $r \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_u^v f(x)\,dx = F(v) - F(u)$$

$\square$

17. Beispiele

(a) Für $n \neq -1$, $n \in \mathbb{Z}$ und $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ gilt

$F'(x) = x^n$, vgl § 6.7. Folglich ist

$$\int_u^v x^n \, dx = \frac{1}{n+1}\left(v^{n+1} - u^{n+1} \right) \quad \text{für } n \geq 0$$

und
$$\int_u^v x^n \, dx = \frac{1}{n+1}\left(v^{n+1} - u^{n+1} \right) \quad \text{für } n \leq -2,$$

wenn 0 nicht zwischen u und v liegt.

Problem: Was ist Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$?

(b)
$$\int_u^v \cos(x) \, dx = \sin(x) \Big|_{x=u}^{v} = \sin(v) - \sin(u)$$

$$\int_u^v \sin(x) \, dx = -\cos(x) \Big|_{x=u}^{v} = \cos(u) - \cos(v)$$

$$\int_u^v \exp(x) \, dx = \exp(x) \Big|_{x=u}^{v} = \exp(v) - \exp(u)$$

18. __Satz__ Sei $(f_n)_{n\in I}$ eine Folge von Regelfunktionen auf $[a,b]$, die gleichmäßig gegen $f: [a,b]$ konvergiert. Dann ist f eine Regelfunktion und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\in I} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

__Beweis__ Nach § 5.10 ist f eine Regelfunktion.

Ist $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$, so ist

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq (b-a)\cdot\varepsilon$$

nach § 5.16. Also ist $\lim_{n\in I} \left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = 0$ $\square$

__Korollar__ Ist $(f_n)_{n\in I}$ eine Folge von stetig diff'baren Funktionen auf (a,b), so dass die Folge $(f_n')_{n\in I}$ gleichmäßig gegen $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ konvergiert und die Folge $(f_n)_{n\in I}$ punktweise gegen

$G:(a,b)\to\mathbb{R}$ konvergiert, so ist G Stammfunktion von g (und g ist stetig).

<u>Beweis</u> Wähle $x_0\in(a,b)$. Für $u\in(a,b)$ gilt

$$\int_{x_0}^{u} g(x)\,dx = \lim_{n\in I}\int_{x_0}^{u} f_n'(x)\,dx = \lim_{n\in I}\left(f_n(u)-f_n(x_0)\right) = G(u)-G(x_0)$$

also ist G nach dem 1. Hauptsatz § 6.14 stetig diff'bar, mit $G'=g$. $\square$

19. <u>Lemma</u> Sei $s\geq 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{n+s}=1.$$

<u>Beweis</u> Setze $c_n=\sqrt[n]{n+s}-1$, dann ist $c_n\geq 0$ für alle $n\geq 1$. Weiter ist

$$n+s=(c_n+1)^n\geq 1+\binom{n}{2}c_n^2=1+\frac{n(n-1)}{2}c_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n+s-1}{n(n-1)}\cdot 2\geq c_n^2 \Rightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} c_n^2=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} c_n=0 \quad (\text{weil } \sqrt{\ } \text{ stetig ist!}) \quad \square$$

#

<u>Korollar</u> Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{sowie} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k$$

haben den gleichen Konvergenzradius R.

<u>Beweis</u> Sei R der Konvergenzradius der ersten Reihe und R' der Konvergenzradius der zweiten Reihe.

Benutze §4.16. $R = \frac{1}{L}$, $L = \limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|}$

falls $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, $L = \infty$ sonst.

Die zweite Reihe hat den gleichen Konvergenzradius $R' = \frac{1}{L'}$ wie die Reihe $x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k\, x^k$.

$$L' = \limsup_{n} \sqrt[n]{n \cdot |a_n|} = \lim_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

(falls beschränkt). Falls $L' = \infty$ (unbeschränkte Folge) ist auch $L = \infty$ $\square$

20. <u>Theorem</u> Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$ und $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ ist eine Stammfunktion.

Alle drei Reihen haben den gleichen Konvergenzradius R.

<u>Beweis</u> Die Konvergenzradien sind gleich nach §6.19.

Setze $p_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Für jedes $0 < r < R$ konvergiert die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $(-r, r)$ gleichmäßig gegen f und $(p_n')_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$ ⊛, also ist $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$ nach §6.18. Genauso folgt $F' = f$ auf $(-r, r)$.

Das stimmt für jedes $0 < r < R$, also auch auf $(-R, R) = \bigcup_{0<r<R} (-r, r)$ $\square$

⊛ nach §4.17

<u>Korollar</u> Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so ist f glatt (= beliebig oft diff'bar) auf $(-R, R)$.

21. <u>Beispiel</u>

(a) neue Beweise, dass $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

(b) <u>geometrische Reihe</u>: $R = 1$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$,

eine Stammfunktion von $\frac{1}{1-x}$ ist also $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}$ auf $(-1, 1)$.

Setzt man $z = 1-x$, also $x = 1-z$, so erhält man die Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ als

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} (1-z)^{k+1}$$

auf dem offenen Intervall $(0, 2)$

22. Exponentialfunktion und Logarithmus

Satz A Die Exponentialfunktion exp ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ ab. Weiter ist exp glatt, mit Ableitung $\exp' = \exp$.

Beweis Wir wissen schon: $\exp' = \exp$, also ist exp glatt. Weiter gilt $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ sowie $\exp(0) = 1$. Für $x \geq 0$ ist $\exp(x) \geq 1$, es folgt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, vgl. §2.18. Ist $h > 0$, so ist $\exp(h) \geq 1 + h > 1$, folglich ist

$$\exp(x+h) = \exp(x) \underbrace{\exp(h)}_{>1} > \exp(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ h > 0.$$

Damit ist exp streng monoton wachsend. Setze $\exp(1) = e \approx 2.71$, $\exp(1) > 1$. Es folgt für $m \in \mathbb{N}$, dass $\exp(m) = e^m \geq 1 + \underbrace{(e-1)}_{>0} \cdot m$

Für jedes $y \geq 1$ gibt es also $m \in \mathbb{N}$ mit $e^m > y$.

Da exp stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz: es gibt $x \in [0, m]$ mit $\exp(x) = y$.

Ist also $y \geq 1$, so gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$. Dann gilt auch $\exp(-x) = \frac{1}{y}$, folglich gibt es für jedes $z \in (0,1)$ auch genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = z$. $\square$

Für $x > 0$ definieren wir den <u>Logarithmus</u> $\ln(x)$ durch $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$. Es folgt direkt mit dem 1. Hauptsatz, dass $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, und $\ln(0) = 1$. Insbesondere ist $\ln$ <u>glatt</u> auf $\mathbb{R}_{>0}$.

<u>Satz B</u> Der Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist glatt, mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Für $x, y > 0$ gilt $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln(0) = 1$. Also ist $\ln$ ein <u>Homomorphism</u> $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\ln(\exp(x)) = x$

Für $y > 0$ gilt $\exp(\ln(y)) = y$

d.h. $\ln$ ist <u>Umkehrfunktion von $\exp$</u>.

Beweis: Betrachte $f(x) = \ln(\exp(x))$. Dann gilt $f'(x) = \frac{1}{\exp(x)} \exp(x) = 1$, folglich $f(x) = x + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Da $f(0) = \ln(1) = 0$ ist $c = 0$, d.h. $\ln(\exp(x)) = x$.

Ist $y > 0$, so gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$ (Satz A), also $\exp(\ln(y)) = \exp(\ln(\exp(x))) = \exp(x) = y$. Ist $x, y > 0$, so schreibe $x = \exp(u)$, $y = \exp(v) \Rightarrow \ln(x \cdot y) = \ln(\exp(u)\exp(v)) = \ln(\exp(u+v)) = u + v = \ln(\exp(u)) + \ln(\exp(v)) = \ln(x) + \ln(y)$. $\square$