§7. Die Konstruktion von $\mathbb{R}$

Literatur: Hewitt-Ross, Real and abstract analysis, I.6

(→ Bibliothek)

Wir brauchen etwas Algebra.

1. Def Sei R ein Ring, sei $I \subseteq R$ nicht leer.
Wir nennen I ein Ideal in R, wenn gilt

(I_1) $x, y \in I \Rightarrow x \pm y \in I$ (d.h. $(I,+)$ ist Untergruppe von $(R,+)$)

(I_2) $x \in I, r \in R \Rightarrow r \cdot x \in I$ (I absorbiert R)

Der Quotientenring R/I besteht aus den Nebenklassen

$r + I = \{r + x \mid x \in I\}$ für $r \in R$, also

$R/I = \{r + I \mid r \in R\}$. Das ist wieder ein Ring,

mit Verknüpfung $(r+I) + (s+I) = r+s+I$

$(r+I) \cdot (s+I) = r \cdot s + I$

mit Neutralelementen $0 + I = I$ (Addition)

sowie $1 + I$ (Multiplikation)

Beispiel $R = \mathbb{Z}$, $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ gerade}\} = 2 \cdot \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/2\cdot\mathbb{Z} = \{\underbrace{0 + 2\mathbb{Z}}_{\text{gerade}}, \underbrace{1 + 2\mathbb{Z}}_{\text{ungerade}}\} \cong \mathbb{F}_2 \quad (\text{vgl } §1.2)$$

Zahlen

$(1+2\mathbb{Z})+(1+2\mathbb{Z}) = 2+2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$

2. <u>Lemma</u> Sei $I \subseteq R$ ein Ideal, mit $I \neq R$. Falls es zu jedem $r \in R-I$ ein $s \in R$ gibt mit $r \cdot s - 1 \in I$, so ist $R/_I$ ein Körper.

<u>Beweis</u> Wegen $I \neq R$ ist $1 \notin I$ (denn sonst wäre $r = 1 \cdot r \in I$ für alle $r \in R$), also $0+I \neq 1+I$.
Sei $r+I \neq I$, d.h. sei $r \in R-I$. Dann gibt es $s \in R$ mit $r \cdot s - 1 \in I$, d.h.
$(r+I)(s+I) = r \cdot s + I = 1+I \Rightarrow r+I$ hat Inverses in $R/_I \Rightarrow R/_I$ Körper. $\square$

3. Im Beispiel $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$: r ungerade $\Rightarrow r^2$ ungerade $\Rightarrow r^2-1 \in 2\mathbb{Z}$, also ist $\underbrace{\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}}_{\cong \mathbb{F}_2}$ Körper (vgl §1.2)

4. Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{(q_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid q_i \in \mathbb{Q} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$ aller <u>rationalen Folgen</u>, mit Addition

$$(q_0, q_1, q_2, \ldots) + (r_0, r_1, r_2, \ldots) = (q_0+r_0, q_1+r_1, \ldots)$$

und Multiplikation

$$(q_0, q_1, q_2, \ldots) \cdot (r_0, r_1, r_2, \ldots) = (q_0 r_0, q_1 r_1, \ldots)$$

Neutralelemente $\underline{0} = (0,0,0,0,\ldots)$

$\underline{1} = (1,1,1,1,\ldots)$

Wir nennen $(q_i)_{i\in I}$ Nullfolge, wenn gilt: zu jedem $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$ gibt es $m\in\mathbb{N}$ so, dass

$$|q_i| \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } i \geq m.$$

Wir nennen $(q_i)_{i\in I}$ Cauchyfolge, wenn gilt: zu jedem $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$ gibt es $m\in\mathbb{N}$ so, dass $|q_i - q_j| \leq \frac{1}{k}$ für alle $i,j \geq m$.

Seien N und C die Mengen der Nullfolgen bzw. Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Dann ist $C\subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ein Teilring und $N \subseteq C$ ist ein Ideal (denn: jede Cauchyfolge ist beschränkt und damit sind Produkte von Cauchyfolge und Nullfolge wieder Nullfolgen).

Wir definieren die reellen Zahlen durch

$$\mathbb{R} = C/N$$

Dann ist $\mathbb{R}$ ein Ring mit $\underline{0}+N \neq \underline{1}+N$

5. Satz $\mathbb{R}$ ist ein Körper.

Beweis Sei $(q_i)_{i\in\mathbb{N}} \in C - N$ (Cauchyfolge, aber keine Nullfolge)

Dann gibt es $k\geq 1$ so, dass $|q_i| \geq \frac{1}{k}$ für unendlich viele $i\in\mathbb{N}$. Weiter gibt es $m\in\mathbb{N}$

so, dass $|q_i - q_j| \leq \frac{1}{2k}$ für alle $i,j \geq m$.

OE ist $|q_m| \geq \frac{1}{k}$ (siehe oben), es folgt

$\frac{3}{2k} \geq |q_i| \geq \frac{1}{2k}$ für $i \geq m$. Definiere $r_i = \begin{cases} 0 & i < m \\ \frac{1}{q_i} & i \geq m \end{cases}$

$\Rightarrow r_i \cdot q_i = 1$ für alle $i \geq m$ und $|r_i - r_j| = \left| \frac{q_j - q_i}{q_i q_j} \right|$

$\leq |q_i - q_j| \frac{1}{(2 \cdot k)^2}$ für $i,j \geq m \Rightarrow (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C$

mit $(q_i)_{i \in \mathbb{N}} \cdot (r_i)_{i \in \mathbb{N}} - \underline{1} \in N$. $\square$

5. Wir setzen $X = \{(q_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C \mid q_i \geq 0 \text{ für alle } i\}$

sowie $P = \{(q_i)_{i \in \mathbb{N}} + N \mid (q_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X\} \subseteq C/N$

und <u>definieren</u> für $(q_i)_{i \in \mathbb{N}} + N$, $(r_i)_{i \in \mathbb{N}} + N$

$(q_i) + N \leq (r_i)_{i \in \mathbb{N}} + N \iff$

$(r_i)_{i \in \mathbb{N}} - (q_i)_{i \in \mathbb{N}} + N \in P \iff$

es gibt eine Nullfolge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so, dass

$(r_i)_{i \in \mathbb{N}} - (q_i)_{i \in \mathbb{N}} + (p_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X \iff$

d.h. $r_i - q_i + p_i \geq 0$ <u>und</u> $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Nullfolge

6. <u>Satz</u> $\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet bezgl "$\leq$" wie oben.

<u>Beweis</u> Die Axiome (AR1) und (AR2) aus §1.5 sowie (A1), (A2), (A3) rechnet man leicht nach.
Jede Cauchyfolge in C ist beschränkt, d.h. es gibt $l \in \mathbb{N}$ so, dass $q_i \leq l$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\Rightarrow$ $(q_i)_{i \in \mathbb{N}} + N \leq \underline{l} + N$

mit $\underline{l} = (l, l, l, \dots)$ $\Rightarrow$ archimedisch. $\square$

7. <u>Theorem</u> $\mathbb{R}$ hat die Supremumseigenschaft.

Idee des Beweises: Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt nach oben. Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ wähle $q_k \in \mathbb{Q}$ so, dass gilt: (a) $\underline{q_k} + N$ ist obere Schranke von A

(b) es gibt $a \in A$ mit

$$\underline{q_k} + N - a \leq \underline{\tfrac{1}{k}} + N$$

$\underline{q_k} = (q_k, q_k, q_k, \dots)$

$\underline{\tfrac{1}{k}} = (\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}, \dots)$

Zeige jetzt: $(0, q_1, q_2, q_3, \dots) + N$ ist kleinste obere Schranke von A. $\square$

Damit ist $\mathbb{R}$ konstruiert: ein archimedisch angeordneter Körper mit der Supremumseigenschaft.

8. Theorem Seien E, F zwei archimedisch angeordnete Körper mit der Supremumseigenschaft. Dann gibt es (genau) einen Isomorphismus $\tau : E \xrightarrow{\cong} F$.
"Alle solchen Körper sehen gleich aus".

Beweisidee definiere
$$\tau(0_E) = 0_F$$
$$\tau(1_E) = 1_F$$

Für $k, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0$ $\tau\left(\frac{k}{l} 1_E\right) = \frac{k}{l} 1_F$

Für $x \in E$ beliebig setze
$$A_x = \left\{ \frac{k}{l} 1_E \;\middle|\; \frac{k}{l} 1_E \leq x \text{ und } k, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0 \right\}$$
$\Rightarrow x = \sup(A_x)$ definiere $\tau(x) = \sup(\tau(A_x))$
und zeige, das ist eine Bijektion, mit
$$\tau(x \cdot y) = \tau(x)\tau(y) \qquad \tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$$
$$x \leq y \Leftrightarrow \tau(x) \leq \tau(y)$$
$\square$