# Übungen zur Algebraischen Topologie I

## — Blatt 12 —

Arthur Bartels, Tilman Bauer 1. Juli 2008

---

**Übung 1.** Sei $X$ ein CW-Komplex. Zeigen sie, dass $X^{(n)} \subseteq X$ abgeschlossen ist.

**Übung 2.** Seien $A$ und $B$ Unterkomplexe eines CW-Komplexes $X$. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Mayer-Vietoris-Sequenz für die Homologiegruppen von $A$, $B$, $A \cap B$ und $A \cup B$ gibt.

**Übung 3.** Seien $n \geq 1$ und $k \in \mathbf{Z}$. Zeigen Sie, dass es eine stetige Abbildung $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ gibt, deren Abbildungsgrad $k$ ist.

**Übung 4.** Sei $M$ ein $\mathbf{Z}$-Modul und

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

eine kurze exakte Folge von $\mathbf{Z}$-Moduln. Was lässt sich über die Exaktheit der Folgen

$$0 \to A \otimes M \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_M} B \otimes M \xrightarrow{p \otimes \mathrm{id}_M} C \otimes M \to 0$$

und

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A, M) \xleftarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B, M) \xleftarrow{p^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(C, M) \leftarrow 0$$

sagen? (Dabei bezeichnet $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X, M)$ den $\mathbf{Z}$-Modul der $\mathbf{Z}$-linearen Abbildungen $X \to M$. Für eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $f \colon X \to Y$ ist $f^* \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(Y, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X, M)$ durch $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ definiert.)

Da manche von Ihnen das Tensorprodukt eventuell nicht kennen, können Sie die volle Punktzahl auch erreichen, indem Sie nur die Exaktheit der unteren Folge diskutieren.

---