Übungen zur Algebraischen Topologie I

— Blatt 9 —

Arthur Bartels, Tilman Bauer 10. Juni 2008

Übung 1. Sei

$$\cdots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

ein Kettenkomplex. Dabei seien alle C_n freie abelsche Gruppen. Zeigen Sie: id_{C_*} ist genau dann kettenhomotop zur Nullabbildung, wenn $H_n(C_*, \partial_*) = 0$ für alle n ist.

Übung 2. Sei X ein topologischer Raum. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$H_n(X \times S^1) \cong H_n(X) \oplus H_{n-1}(X).$$

Übung 3. Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung $f\colon S^2 \to S^1 \times S^1$ gibt, so dass $f_*\colon H_2(S^2) \to H_2(S^1 \times S^1)$ ein Isomorphismus ist.

(*Anmerkung*: $H_2(S^2) \cong H_2(S^1 \times S^1) \cong \mathbf{Z}$.)

Übung 4. Sei $0 \to K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} Q \to 0$ eine kurze exakte Folge abelscher Gruppen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $s\colon A \to K$ mit $s \circ i = \mathrm{id}_K$.

(b) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $t\colon Q \to A$ mit $p \circ t = \mathrm{id}_Q$.

(c) Es gibt einen Gruppenisomorphismus $f\colon A \to K \oplus Q$, so dass $p_Q \circ f = p$ für die kanonische Projektion $p_Q\colon K \oplus Q \to Q$ und $f^{-1} \circ i_K = i$ für die kanonische Inklusion $i_K\colon K \to K \oplus Q$.

Sind diese äquivalenten Aussagen erfüllt, so sagt man, dass die Folge *zerfällt*. Zerfällt jede kurze exakte Folge abelscher Gruppen?

Abgabe bis Mo, 16. Juni in den Übungsgruppen