

Seminar: Gruppenringe

Bartels / Kasprowski / Wings

Sommersemester 2012

Gegeben einen Ring R und eine Gruppe G kann man den Gruppenring $R[G]$ formaler R -Linearkombinationen von Gruppenelementen bilden. Es gibt sehr einfach zu formulierende Fragen über Gruppenringe, die bis heute offen sind. Ein Beispiel ist Kaplanskys Vermutung: für eine torsionsfreie Gruppe G sind 0 und 1 die einzigen Elemente in $\mathbb{C}[G]$ mit $p^2 = p$. Außerdem spielt die K - und L -theorie von Gruppenringen eine wichtige Rolle in der Topologie. Das Seminar soll eine Einführung zu diesen Fragen und partiellen Antworten geben.

Themen

- **Gruppenringe**

Definition von Gruppenringen als formale R -Linearkombinationen und alternativ als Funktionen $G \rightarrow R$ [3, S.129-131]. Universelle Eigenschaft [3, 3.2.7, Exercise 1]. Induzierte Abbildungen [3, 3.2.8, Exercise 2]. Augmentation [3, 3.2.9, 3.2.10, Exercise 2]. Involution [3, 3.2.11]. Augmentationsideale von $R[G]$ und Untergruppen von G [3, 3.3].

Literatur: [3, S.125-138].

- **Satz von Maschke**

Halbeinfache Ringe [3, S.91-93]. Satz von Maschke [3, 3.4.7, 3.4.8]. Satz von Wedderburn-Artin (ohne Beweis) [3, 2.6]. Wedderburn-Artin für Gruppenringe [3, 3.4.9, 3.4.10]. Konjugationsklassen und der Satz von Maschke [3, 3.6.3]

Literatur: [3, S.138-144, 151-152].

- **Noethersche Gruppenringe**

Noethersche Ringe und Moduln [3, 2.4.1, 2.4.9, 2.4.10]. Getwistete Gruppenringe [3, S.215]. Noethersche Gruppenringe [3, 6.6.2, 6.6.3, 6.6.4]. *Literatur:* [3, 2.4, 6.6].

- **Idempotente Elemente im Gruppenring**

Idempotente Elemente in Ringen [3, S.75, Exercise 9]. Triviale Idempotente im Gruppenring. Idempotente Elemente in Gruppenringen über endlichen Gruppen [3, 7.1.5]. Idempotente im ganzzahligen Gruppenring [3, 7.2.4]. Kaplanskys Vermutung über idempotente Elemente im komplexen Gruppenring über torsionsfreien Gruppen [1].

Literatur: [3, S.221-223], [2, S.31-38], [1].

- **Einheiten im Gruppenring**

Triviale Einheiten im Gruppenring [3, 8.1.1]. Beispiele nicht-trivialer Einheiten [3, 8.1.2, 8.1.4,]. Einheitenvermutung [3, 8.5.6]. Positive Resultate zur Einheitenvermutung [3, 8.5.1, 8.5.3, 8.5.4].

Literatur: [3, S.233-236, 263-265], [1].

- **UP-Gruppen**

Nullteiler Problem. Geordnete Gruppen. Rechtsgeordnete Gruppen. UP-Gruppen, tUP-Gruppen. Nullteiler und Einheiten in Gruppenringen über UP-Gruppen.

Literatur: [2, S. 582-591].

- **Geordnete Gruppen**

Untergruppen (rechts)-geordneter Gruppen. Matrizen und geordnete Gruppen. Freie Produkte (rechts)-geordneter Gruppen. Einbettung des Gruppenrings einer geordneten Gruppe in einen Schiefkörper.

Literatur: [2, S. 592-605].

- **K -Theorie: K_0**

Projective Moduln [4, 1.1.1]. Grothendieck-Gruppe [4, 1.1.3]. Definition von $K_0(R)$ [4, 1.1.5]. K_0 von \mathbb{Z} , Körpern [4, 1.1.6]. Eilenberg-Schwindel [4, 1.1.8]. K_0 und Idempotente Matrizen [4, 1.2.3]. \tilde{K}_0 [4, 1.3.2]. K_0 von Gruppenringen.

Literatur: [4, S. 1-12].

- **K -Theorie: K_1**

Definition von $K_1(R)$ [4, 2.1.5]. Eilenberg-Schwindel für K_1 [4, 2.1.7]. K_1 von Körpern [4, 2.2.2]. K_1 von Euklidischen Ringen [4, 2.3.2].

Literatur: [4, S. 59-75].

- **Whitehead-Gruppe und der s -Kobordismussatz** Definition von $\text{Wh}(G)$ [4, 2.4.1]. $\text{Wh}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ [4, 2.4.2]. s -Kobordismussatz [4, 2.4.4]. Whiteheadgruppe torsionsfreier Gruppen.

Literatur: [4, S. 59-75].

- **Der Satz von Bass-Heller-Swan**

K_0 für exakte Kategorien [4, 3.1.6]. $K_1(R[t])$, $K_1(R[\mathbb{Z}])$ [4, 3.2.22].

Literatur: [4, S.108-113, 148-151].

Vorbesprechung

Eine Vorbesprechung zur Themenvergabe findet am 24.1.2012 um 12:00 im Raum SR1D statt.

Ablauf des Seminars

Zum Bestehen des Seminars sind notwendig:

- Ein 80-minütiger Vortrag.
- Regelmässige und aktive Teilnahme am Seminar. (Stellen Sie Fragen!)
- Ein schriftliche Ausarbeitung des Vortrags.
- Bitte kommen Sie **spätestens zwei Wochen** vor Ihrem Vortrag zu mir um den Vortrag zu besprechen. Zu diesem Zeitpunkt sollten Sie schon eine konkrete Vorstellung vom Ablauf des Vortrages haben. Mit Fragen zu Ihrem Vortrag können Sie sich auch (möglichst frühzeitig!) an Daniel Kasprowski und Christoph Winges (Zimmer 130.021) wenden.

Bachelorarbeiten

Im Rahmen des Seminars können Bachelorarbeiten geschrieben werden. Sollten Sie daran interessiert sein, so setzen Sie sich bitte **so früh wie möglich** mit mir in Verbindung.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung des Vortrags. Nutzen Sie das Betreuungsangebot.
- Grundvoraussetzung für den Vortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.

- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie ihre Zuhörer nicht durch zuviele Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.
- Seien Sie kritisch gegenüber dem vorgeschlagenen Inhalt des Vortrages. Vielleicht gibt es einen weiteren wichtigen Begriff den Sie erklären müssen. Vielleicht erscheint ihnen der vorgeschlagene Inhalt zu umfangreich; dann sollten Sie Kürzungen mit mir besprechen.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren.
- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.
- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

LITERATUR

- [1] A. Bartels. Topologische Starrheit und Gruppenringe. *Mitt. Dtsch. Math.-Ver.*, 17(2):80–86, 2009.
- [2] D. S. Passman. *The algebraic structure of group rings*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1977. Pure and Applied Mathematics.

- [3] C. Polcino Milies and S. K. Sehgal. *An introduction to group rings*, volume 1 of *Algebras and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [4] J. Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*. Springer-Verlag, New York, 1994.

WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER, MATHEMATISCHES INSTITUT, EINSTEINSTR. 62,
D-48149 MÜNSTER, GERMANY

E-mail address: `bartelsa@math.uni-muenster.de`

URL: `http://www.math.uni-muenster.de/u/bartelsa`