SEMINAR: HÖHERE ALGEBRAISCHE K-THEORIE, SOMMERSEMESTER 2012

JOHANNES EBERT, ARTHUR BARTELS

Algebraische K-Theorie hat ihren Ursprung in der Gruppe $K_0(R)$ eines Ringes, die aus den Äquivalenzklassen projektiver R-Moduln gebildet wird. Durch die Arbeiten zahlreicher Mathematiker, darunter Quillen und Waldhausen, ist algebraische K-Theorie zu einer ausgereiften mathematischen Theorie geworden, die in viele Bereiche (darunter algebraische Geometrie, Homotopietheorie, Topologie der Mannigfaltigkeiten, Operatoralgebren) hineinwirkt.

Quillen definierte die höheren K-Gruppen $K_n(R)$ eines Ringes als Homotopiegruppen eines Raumes $BGL_\infty(R)^+$. In dem Seminar werden wir zwei Verallgemeinerungen von Quillens Konstruktion kennenlernen, die es erlauben, allgemeineren Objekten als Ringen einen K-Theorie-Raum zuzuordnen, nämlich Segal's Γ-Räume und Waldhausens $S_\bullet$-Konstruktion. Der Vorzug von Segals Methode ist die Einfachheit, der Vorzug von Waldhausens Methode die große Allgemeinheit. Am Schluß des Seminares werden wir die algebraische K-Theorie eines topologischen Raumes X und einige der Beziehungen zur geometrischen Topologie kennenlernen.

Vorkenntnisse: gute Kenntnisse in algebraischer Topologie. Bekanntschaft mit algebraischer K-Theorie (etwa im Umfange des Seminars von C. Ausoni, M. Joachim und J. Ebert) ist nützlich, aber nicht unbedingt erforderlich.

- Termin: Mi 16-18 **s.t**, SR 1C. Die erste Sitzung ist am 4. April; das Seminar wird bei Bedarf auf Englisch abgehalten.
- Anmeldung in der Vorbesprechung oder per e-mail

1. Quillen's Plus-Konstruktion als unendlicher Schleifenraum

Vortrag 1. (Klassifizierende Räume kleiner Kategorien, Jan Spakula)
Klassifizierende Räume kleiner Kategorien, Quillen's Theoreme A und B. Quellen: [6] §1, [14], Chapter IV, §3, [10].

Vortrag 2. (Γ-Räume I, Fabian Hebestreit)
Γ-Räume nach Segal, I. [8]. §1 und §2. Außerdem passt Proposition 3.2 auch schon hierhin. Beispiele: In §2 diskutiert Segal einige Beispiele. Für uns das wichtigste ist der Γ-Raum, welcher algebraische K-Theorie eines Ringes liefert, Seite 305, Zeilen 2-4. Weitere Beispiele sind topologische K-Theorie, [9], §1. Es lohnt sich, den einfachsten Γ-Raum, der durch die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ gegeben ist, im Detail zu untersuchen und Segal's Konstruktionen explizit anzugeben. Weitere Tatsachen über Γ-Räume finden sich in [2], Ch. II. sowie [3] und einen guten, nicht-technischen Überblick verschafft Adams [1].

Vortrag 3. (Γ-Räume II, Dmitri Pavlov)
Γ-Räume nach Segal, II. [8], §3 und §4. Das Hauptresultat ist, dass die Kategorie der projektiven R-Moduln mittels Segal's Maschine den Raum $K_0(R) \times BGL_\infty(R)^+$ liefert. Hierfür konsultiere man [7], [1], [3] und [5].

2. Abstrakte K-Theorie von Waldhausen-Kategorien

Vortrag 4. (Waldhausen-Kategorien, Eva Höning)
Definition einer Waldhausen-Kategorie. Quellen: [13], §1.1 und 1.2 (hier "Categories with cofibrations and weak equivalences" genannt). Ferner: [14], Ch II, §9, [2], I.2.1. Des weiteren soll $K_0(\mathcal{C})$ einer Waldhausen-Kategorie $\mathcal{C}$ eingeführt werden. Natürlich sollen auch Beispiele diskutiert werden; davon finden sich in den angegebenen Quellen mehrere. Davon sollen die Beispiele [14], 9.1.3, 9.1.4. und 9.1.5., diskutiert werden und in diesen Fällen K_0 ausgerechnet werden.

Vortrag 5. (K-Theorie einer Waldhausen-Kategorie, Martin Brandenburg)
Die $S_\bullet$-Konstruktion, [13], §1.3; [14], ch IV §8. In diesem Vortrag wird die Definition des K-Theorie-Raumes einer Waldhausen-Kategorie definiert.

Vortrag 6. (Die Fundamentalsätze I, Daniel Kasprowski)
Der Additivitätssatz und seine Konsequenzen, [13], §1.4 und 1.5, außerdem Prop 1.3.2. Einen einfacheren Beweis gibt es in [14], Ch V, §1 oder [4]. Folgerungen: Proposition 1.5.5 in [13] (=Proposition V.1.7. in [14]); als Konsequenz ist $K(\mathcal{C})$ ein unendlicher Schleifenraum.

Vortrag 7. (Die Fundamentalsätze II, Christoph Winges)
Lokalisierung und Approximation; [13], §1.6. Man konsultiere auch [4] und [11] sowie die entsprechenden Passagen aus [14] für Beweise.

3. K-Theorie von Räumen und Beziehung zur geometrischen Topologie

Vortrag 8. (K-Theorie eines Raumes, Adam Mole)
Definition von $A(X)$, verschiedene Definitionen, Homotopieinvarianz [13], §2.1

Vortrag 9. (Ein Blick zurück auf den ersten Teil, Ulrich Pennig)
Vergleich mit Segals Konstruktion; [13], §1.8.

Vortrag 10. (K-Theorie durch "Matrizen")
$A(X)$ über Räume von "Matrizen", [13] §2.2.

Vortrag 11. (Assembly)
Zunächst allgemeine Diskussion von Assembly-Abbildungen [15]. Definition (Approximation von Homotopiefunktoren durch ausschneidende Funktoren. Vielleicht ein Beispiel diskutieren, etwa den Funktor $X \mapsto K(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$. Im zweiten Teil des Vortrages soll die Assembly-Abbildung des Funktors $X \mapsto A(X)$ konkreter beschrieben werden, [13] §3. Definiere die Kategorien, welche die Faserfolge aus Theorem 3.3.1 [13] liefern und gebe den Beweis, von Theorem 3.3.1.

Vortrag 12. Überblick über das stabile parametrisierte h-Kobordismustheorem [12], welches die Faser der Assembly-Abbildung mit einem Raum von h-Kobordismen identifizert.

Literatur

[1] J.F. Adams: *Infinite Loop Spaces.*
[2] B. Dundas, T. Goodwillie, R. McCarthy: *The local structure of algebraic K-theory*, http://www.uib.no/People/nmabd/b/b.pdf.
[3] G. Carlsson: *Deloopings in Algebraic K-Theory.* Handbook of KK-theory. Vol. 1, 337, Springer, Berlin, 2005.
[4] R. McCarthy: *On fundamental theorem of Algebraic K-Theory*, Topology 32 (1993), 325–328.
[5] Mac Duff, Segal: *Homology fibrations and the "group completion theorem"*, Inventiones MAth. 31, 279-284 (1976).
[6] D. Quillen: *Higher algebraic K-theory.*
[7] D. Quillen: *The group completion of a simplicial monoid.* Anhang zu: Friedlander, Mazur, *Filtrations on the homology of algebraic varieties.* Mem. Amer. Math. Soc. 110 (1994).
[8] G. Segal: *Categories and cohomology theories*, Topology 13 (1974), 293–312.
[9] G. Segal: *K-homology and algebraic K-theory.* K-theory and operator algebras (Proc. Conf., Univ. Georgia, Athens, Ga., 1975), pp. 113127. Lecture Notes in Math., Vol. 575, Springer, Berlin, 1977.
[10] G. Segal: *Classifying spaces and spectral sequences.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 34 (1968) 105112.
[11] R. Staffeldt: *On fundamental theorems in algebraic K-theory*, K-Theory 1 (1989), 511-532.
[12] F. Waldhausen, B. Jahren, J. Rognes: *Spaces of PL-manifolds and categories of simple maps*; Ann. of Math. Studies, to appear, http://folk.uio.no/rognes/papers/plmf.pdf.
[13] F. Waldhausen: *Algebraic K-theory of topological spaces*, Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983), 318419, Lecture Notes in Math., 1126, Springer, Berlin, 1985. http://www.math.uni-bielefeld.de/ fw/.
[14] C. Weibel: Introduction to Algebraic K-theory, http://www.math.rutgers.edu/ weibel/Kbook/Kbook.pdf
[15] M. Weiss, B. Williams: *Assembly.* Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2 (Oberwolfach, 1993), 332352, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 227, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

Mathematisches Institut, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster
E-mail address: johannes.ebert@uni-muenster.de, bartelsa@uni-muenster.de