SEMINAR: DER UNIFORMISIERUNGSSATZ

JOHANNES EBERT, MICHAEL JOACHIM

- Ort: SR 5, Zeit: donnerstags, 14-16 Uhr

Zwei Steilkurse

Vortrag 1. (Steilkurs Topologie, Michael Joachim) Fundamentalgruppe und Überlagerungen. De-Rham-Kohomologie. Poincaré-Dualität und Eulerzahl. H^1 versus π_1.

Vortrag 2. (Steilkurs Funktionentheorie, Johannes Ebert) Riemannsche Flächen, holomorphe und harmonische Funtionen auf Riemannschen Flächen. Die Modellflächen und ihre Automorphismengruppen. Überlagerungen Riemannscher Flächen. Aussage des Riemannschen Uniformisierungssatzes.

Der Beweis des Riemannschen Uniformisierungssatzes

Vortrag 3. (Das Dirichletsche Randwertproblem, Yvonne Protzek) Harmonische und subharmonische Funktionen. Quellen: [5], 1.2, 1.5 enthält, was später benötigt wird, abgesehen davon, dass eine wichtige Aussage ("Harnack principle") unbewiesen bleibt. Vollständige Beweise sind in [4], §22 zu finden.

Vortrag 4. (Normale Familien und der 1/4-Satz, Annika Bürger) Normale Familien, Wiederholung des Satzes von Montel und Koebe's 1/4-Satz, Letzteres mit ausführlichem Beweis. Quellen: beliebige Funktionentheoriebücher für den Satz von Montel; [7], [6], 14.14 für den 1/4-Satz (Ersteres ist als umfassende Übungsaufgabe zu verstehen).

Vortrag 5. (Schluss des Beweises, Sonja Hannibal) Beweis des Uniformisierungssatzes; [5]; alle Argumente aus §1.4, §1.6, §1.7 sollten besprochen werden. "Rado's theorem" (§1.3) besagt, dass das zweite Abzählbarkeitsaxiom für Riemannsche Flächen redundant ist, worauf wir aber nicht eingehen wollen.

Fast-Komplexe Struktur und Klassifikation der Flächen

Vortrag 6. (Fast-komplexe Strukturen, Gregor Pinno) Fast-komplexe Strukturen versus komplexe Strukturen auf Flächen; [2], §13.1. Eine fast-komplexe Struktur auf einer (bloß differenzierbaren) Fläche ist eine linear-algebraische Version einer komplexen Struktur. Der zentrale Existenzsatz Theorem 23 wird in Vortrag 7 gezeigt.

Vortrag 7. (Der Integrabilitätssatz, Jonas Köster) Beweis des Existenzsatzes für komplexe Strukturen, siehe [2], §13.3. Es läuft darauf hinaus, eine partielle Differentialgleichung zu lösen, also ist der Beweis rein analytisch.

Vortrag 8. (Klassifikation der differenzierbaren Flächen, Jay Schneider) Hier wird gezeigt, dass zwei orientierte kompakte Flächen genau dann diffeomorph sind, wenn sie dieselbe Eulercharakteristik haben. Das (topologische) Argument [3], erste Hälfte von Lecture 33, reduziert das Problem auf den Fall, dass die Eulerzahl 2 ist. In diesem Falle wählt man eine Riemannsche Metrik, welche eine fast-komplexe Struktur induziert, die wiederum, nach dem Integrabilitätssatz, von einer komplexen Struktur herrührt. Der Uniformisierungssatz erledigt dann diesen Fall.

Fuchssche Gruppen

Vortrag 9. (Fuchssche Gruppen, Tobias Fiele) Aus dem Uniformisierungssatz erhalten wir für jede Fläche X, welche von der oberen Halbebene überlagert wird, einen injektiven Homomorphismus $\rho : \pi_1(X) \to \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, eben eine "Fuchssche Gruppe". Die grundlegenden Eigenschaften werden in diesem Vortrag diskutiert. Auch auf die Klassifikation von Möbiustransformationen soll eingegangen werden. Quellen: [1], §2.3, §2.4

Vortrag 10. (Der Fricke-Raum, Raphael Reinauer) Wir beschränken uns jetzt auf kompakte Fläche von Geschlecht $g \geq 2$. Die Menge aller Homomorphismen $\rho : \pi_1(\Sigma_g) \to \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, so dass $\mathbb{H}/\mathrm{im}(\rho)$ eine kompakte Fläche ist, liefert den sogenannten Fricke-Raum. Wir geben hier eine konkretere Beschreibung, welche zeigen wird, dass der Fricke-Raum eine Mannigfaltigkeit der Dimension $6g - 6$ ist. Außerdem: Formale Definition des Teichmüllerraumes. Quellen [1], §2.5. und [8].

Vortrag 11. (Einführung in die hyperbolische Geometrie, Julia Heller) Um im nächsten Vortrag beweisen zu können, dass der Fricke-Raum homöomorph zu $\mathbb{R}^{6g-6}$ ist, werden Grandlagen der hyperbolischen Geometrie in zwei Dimensionen benutzt. Diese sollen hier bereitgestellt werden. Quelle [1], §3.1.

Vortrag 12. (Fenchel-Nielsen-Koordinaten, Fabian Hebestreit) Einführung der Fenchel-Nielsen-Koordinaten. Quelle [1], §3.2.

Vortrag 13. (evtl. Johann Janzen) Ausblick

References

[1] Imayoshi-Tanigushi: *An Introduction to Teichmüller Spaces.* Springer Verlag
[2] S. Donaldson: *Riemann surfaces.* Oxford Graduate texts in Mathematics
[3] J. Lurie: *Topics in geometric topology.* Vorlesungsskript, http://www.math.harvard.edu/ lurie/937.html
[4] Forster: *Riemannsche Flächen.* Springer Verlag
[5] Hubbard: *Teichmüller Theory.* Matrix Editions
[6] W. Rudin: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill
[7] Wikipedia Eintrag "Koebe quarter theorem". http://en.wikipedia.org/wiki/Koebe_quarter_theorem
[8] Wikipedia Eintrag "Teichmüller-Raum". http://de.wikipedia.org/wiki/Teichmüller-Raum

Mathematisches Institut, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster
E-mail address: johannes.ebert@uni-muenster.de, joachim@uni-muenster.de