SEMINAR ÜBER KLASSISCHE HOMOTOPIETHEORIE

PAUL BUBENZER, JOHANNES EBERT, SVENJA KNOPF

Bemerkungen. Die Schwierigkeit der Vorträge ist durch die Zahl der Sterne gekennzeichet.

- Vorträge ohne Stern lassen sich mit den Mitteln der einführenden Topologievorlesungen bestreiten, und die angegebenen Literaturstellen sind im weitgehend lokal lesbar. Zu beachten ist, dass die Ergebnisse der vorangehenden Vorträge benutzt werden, und dass auch hier das wesentliche geometrische Argument nicht immer leicht zu erkennen ist.
- Vortrag 1 sollte nur übernehmen, wer mit den Grundbegriffen bereits vertraut ist. Ab Vortag 8 wird durchwegs Kenntnis der Kohomologie vorausgesetzt. Alle Vorträge nach 9 erfordern überdies selbständige Literaturrecherche.
- Die doppelt-gesternten Vorträge sind für Anfänger ungeeignet. Entweder werden tiefere Kenntnisse der homologischen Algebra vorausgesetzt 11 12 **??**, oder man muss einen gewissen Beispielvorrat kennen, um die Vorträge mit Leben zu füllen 7 10 13 14 **??**. Vortragstechnisch anspruchsvoll sind ferner 11 12 15 **??** (der rote Faden darf nicht verlorengehen).

Elementare Homotopietheorie. Die folgenden Vorträge sind der Grundbestand der Homotopietheorie und eignen sich für Anfänger, abgesehen davon, dass der erste Vortrag eine besonders gute Organisation voraussetzt.

***-Vortrag 1.** (Raphael Reinauer) **Grundlegende Konstruktionen:** Homotopiegruppen, relative Homotopiegruppen [15, S.340 ff]. Höhere Homotopiegruppen sind abelsch. Lange exakte Sequenz eines Raumpaares [15, S.344]. Serre-Faserungen. Lange exakte Homotopiesequenz für Faserungen [2, Theoreme VII.6.6, VII.6.7, VII.6.11]. Ersetzen einer beliebigen Abbildung durch eine Faserung. Pfad-Schleifenfaserung.

Vortrag 2. (Julius Rahaus) **Homotopietheorie von CW-Komplexen:** CW-Komplexe sind eine technisch bequeme Klasse von Räumen. Wichtige Resultate sind der *zelluläre Approximationssatz* (jede Abbildung von CW-Komplexen ist homotop zu einer zellulären) und der *CW-Approximationssatz* (zu jedem Raum X gibt es einen CW-Komplex K und eine n-zusammenhängende Abbildung $f : K \to X$. Literatur: [15], [6], [2].

Vortrag 3. (Timo Siebenand) **Schwache Homotopieäquivalenzen** sind Abbildungen, welche Isomorphismen auf allen Homotopiegruppen induzieren. Der *Satz von Whitehead* besagt, dass schwache Homotopieäquivalenzen zwischen CW-Komplexen Homotopieäquivalenzen sind. Ein weiterer, sehr zentraler Satz ist, dass eine n-zusammenhängende Abbildung von Räumen homologisch n-zusammenhängend ist, [2, Cor VII.10.6], [6, S 9.5].

Vortrag 4. (William Gollinger) **Der Satz von Blakers und Massey,** auch Homotopieausschneidungssatz genannt, ist ein Ersatz für den Ausschneidungssatz in Homologie, dessen naive Verallgemeinerung auf Homotopiegruppen falsch ist. Als Anwendung ergibt sich zum Beispiel die Berechnung von $\pi_n(S^n)$ und der *Freudenthal-Einhängungssatz.* Der Beweis des Ausschneidungssatz benutzt ein delikates Approximationsargument.

Vortrag 5. (Sven Heydenreich) **Die Rolle der Fundamentalgruppe** besteht darin, alle Argumente zu verkomplizieren, wenn ein Raum nicht einfach-zusammenhängend ist. Die Fundamentalgruppe ist nicht abelsch und operiert auf den höheren Homotopiegruppen ein Raumes. Einfache Räume. H-Räume sind einfach. Fundamentalgruppoid. Zu jeder Gruppe gibt es einen speziellen Raum $K(G, 1)$, dessen einzige Homotopiegruppe $\pi_1(K(G, 1)) = G$ ist. Falls $\pi_1(X) \neq 1$, gibt es eine Erweiterung der (Ko)Homologietheorie auf sogenannte "lokale Koeffizientsysteme". Diese spielen im späteren Verlauf eine wichtige Rolle.

Date: April 7, 2015.

Vortrag 6. (Prasad Sivabalasingam) **Der Satz von Hurewicz** stellt eine enge Verbindung zwischen Homotopie und Homologie her und ist das wichtigste Hilfsmittel für Berechnungen. Er besagt, dass für ein $(n-1)$-zusammenhängendes Raumpaar (X, A) ein Isomorphismus $\pi_n(X, A) \cong H_n(X, A)$ besteht, falls A *einfach zusammenhängend ist.* Ist $\pi_1(A) \neq 1$, so treten zusätzliche Komplikationen auf. Alternative Beweise: [2] beweist den Satz in einem Aufwasch. Hatcher [15] strukturiert den Beweis in drei Stufen der Allgemeinheit; jede Stufe erfordert neue Ideen. Man konzentriere sich auf den Fall $\pi_1(A) = 1$.

***-Vortrag 7.** (NN) **Die Quillen-Plus-Konstruktion und azyklische Abbildungen** Hier geht es um eine geniale Konstruktion von Quillen. Ist X ein Raum und $P \subset \pi_1(X)$ eine normale perfekte Untergruppe, so gibt es einen neuen Raum X^+ und eine Homologieäquivalenz; aber die Fundamentalgruppe von X^+ ist $\pi_1(X)/P$. Die Konstruktion spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen K-Theorie, ist aber auch für sich genommen spektakulär. Literatur: [3, p. 266 f.], [15, p. 373 f.]

Hindernistheorie.

***-Vortrag 8.** (NN) **Eilenberg-Mac Lane Räume** sind Räume mit nur einer nichttrivialen Homotopiegruppe und elementare "Bausteine" von Homotopietypen. Konstruktion und Eindeutigkeit bis auf Homotopie. Beispiel $\mathbb{CP}^\infty$. Auch der Fall 1 sollte nicht zu kurz kommen, und verdient besondere Aufmerksamkeit, weil $\pi_1(X)$ nicht kommutativ zu sein braucht. Fundamental für die Hindernistheorie ist der Satz, dass für CW-Paare (X, A) ein Isomorphismus $[(X, A); (K(G, n))] \cong H^n(X, A; G)$ besteht. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Satz zu beweisen: [15] führt dafür Spektren ein, [2, VII.12] ist elementarer, aber mühseliger.

***-Vortrag 9.** (Michael Holl) **Postnikov-Türme** Der Postnikov-Turm eines Raumes X zerlegt X in Eilenberg-Mac Lane-Räume $K(\pi_n(X), n)$. Eine Verallgemeinerung ist der Moore-Postnikov-Turm einer Abbildung $E \to B$. Literatur [15, p. 410 ff.], [1].

****-Vortrag 10.** (Johannes Ebert) **Hindernistheorie** Der Moore-Postnikov-Turm erlaubt es, auf die grundlegende Frage der Hindernistheorie eine zumindest theoretische Antwort zu geben. Es sei ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "j"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B, \end{tikzcd}$$

gegeben, wobei B eine zelluläre Inklusion und p eine Faserung mit Faser F ist. Das Problem ist es, die diagonale Abbildung zu finden. Die Antwort ist, stark vereinfacht, dass eine solche Abbildung genau dann existiert, wenn eine Folge von Kohomologieklassen $o_n \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(F))$ verschwindet. Literatur: [15, p. 415-419], [1]. Des weiteren sollen Beispiele und Anwendungen der Hindernistheorie besprochen werden. Dafür siehe [2, p. 511]. Die Eulerklasse eines Vektorbündels ist ein einfaches, aber sehr instruktives Beispiel.

Spektralsequenzen.

****-Vortrag 11.** (Paul Bubenzer) **Homologische Algebra** In diesem Vortrag werden die Spektralsequenzen rein algebraisch eingeführt. Hauptergebnis ist die Spektralsequenz eines filtrierten Kettenkomplexes. Ein instruktives Beispiel ergibt sich, wenn man den singulären Kettenkomplex eines CW-Komplexes X als $C_*(X)^n = C_*(X^{(n)})$ filtiert. Der E_1-Term der resultierenden Spektralsequenz ist der zelluläre Kettenkomplex von X, und das d_1-Differential das zelluläre Differential (Beweis als Übungsaufgabe). [7], [16], [1].

****-Vortrag 12.** (Lukas Buggisch) **Die Leray-Serre Spektralsequenz** Konstruktion der Leray-Serre-Spektralsequenz einer Faserung. Auch hier gibt es verschiedene Zugänge. Dress [5] besticht durch Einfachheit und Eleganz. Alternativen sind die Originalarbeit von Serre [17] oder auch [1].

****-Vortrag 13.** (Robin Loose) **Berechnungen mit Spektralsequenzen**. Die Leray-Serre-Spektralsequenz öffnet die Schleusen für Berechnungen von Kohomologieringen. Aus der Vielzahl von Beispielen suche man sich passende heraus. $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{CP}^\infty$, Thom-Isomorphismus, Gysin-Sequenz, Wang-Sequenz, $U(n)$, $BU(n)$, ΩS^n, $K(\mathbb{Z}/n, 1)$, Leray-Hirsch Theorem etc.

****-Vortrag 14. Mehr Berechnungen mit Spektralsequenzen**. Fortsetzung des vorherigen Vortrages, in Absprache mit dem vorigen Sprecher. Die Berechnung von $H^*(K(G,n);\mathbb{Q})$ sollte auf jeden Fall vorgeführt werden.

****-Vortrag 15.** (Georg Frenck) **Rationale Homotopietheorie** Während die Berechnung der Homotopiegruppen $\pi_*(X)$ nur in Ausnahmefällen glückt (der einzige einfach-zusammenhängende endliche CW-Komplex, dessen Homotopiegruppen alle bekannt sind, ist der Ein-Punkt-Raum), ist es oft möglich, die rationalen Gruppen $\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}$ zu berechnen. Grundlage ist der rationale Satz von Hurewicz: ist $f : X \to Y$ eine Abbildung einfach-zusammenhängender Räume und ist $f_* : H_*(X;\mathbb{Q}) \to H_*(Y;\mathbb{Q})$ ein Isomorphismus, so ist auch $f_* : \pi_*(X)\otimes\mathbb{Q} \to \pi_*(Y)\otimes\mathbb{Q}$ ein Isomorphismus. Der Beweis funktioniert mit verschachtelten Spektralsequenzargumenten. Damit kann $\pi_*(S^n)\otimes\mathbb{Q}$ vollständig bestimmt werden. Literatur: [12], [11].

References

[1] Spanier: *Algebraic topology*
[2] Bredon: *Geometry and topology*
[3] Rosenberg: *Introduction to algebraic K-Theory*
[4] Wall: *Finiteness conditions for CW complexes*
[5] Dress: *Zur Spectralsequenz von Faserungen*
[6] Tom Dieck: *Algebraic topology*
[7] Cartan, Eilenberg: *Homological algebra*
[8] Mc Cleary: *A user's guide to spectral sequences*
[9] Stong: *Notes on cobordism theory*
[10] Milnor, Stasheff: *Characteristic classes*
[11] Bott, Tu: *Differential forms in algebraic topology*
[12] Griffiths, Morgan: *Rational homotopy theory and differential forms*
[13] Whitehead: *Elements of homotopy theory*
[14] Steenrod, Epstein: *Cohomology operations*
[15] Hatcher: *Algebraic topology*
[16] Weibel: *Homological algebra*
[17] Serre: *Homologie singuliere des espaces fibres*

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland