Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 2 J. Ebert / L. Buggisch

Abgabetermin: 17.5.2017

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Präsenzaufgabe 2 (Eigentliche Submersionen und Überlagerungen)**.** Es seien M^n und N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine eigentliche Submersion. Man zeige, dass f eine Überlagerung mit endlich vielen Blättern ist.

Präsenzaufgabe 3 (Die Riemannsche Zahlenkugel)**.** Wir betrachten die 1-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{C}^+$ von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Ein Atlas von $\mathbb{C}^+$ ist durch die zwei Karten $h_0 = \mathrm{id} : U_0 = \mathbb{C} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sowie

$$h_1 : U_1 = \mathbb{C}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, h_1(z) = \begin{cases} 0, & z = \infty \\ \frac{1}{z}, & z \in U_1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{cases}$$

gegeben. Es ist klar, dass dieser Atlas differenzierbar ist. Auf diese Art ist $\mathbb{C}^+$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, die *Riemannsche Zahlenkugel*, welche im übrigen diffeomorph zu S^2 ist und auch als $\mathbb{CP}^1$ bekannt ist. Sei nun f ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie:

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eigentlich (Wachstumslemma für Polynome!).

b) f kann zu einer stetigen Abbildung $f^+ : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ fortgesetzt werden.

c) Die Abbildung f^+ ist differenzierbar.

Aufgabe 4 (Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra)**.** In dieser Aufgabe werden die beiden Präsenzaufgaben zu einem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra kombiniert: Jedes normierte Polynom f vom Grad $n \geq 1$ hat eine Nullstelle. Zeigen Sie, dass die in Aufgabe 2 konstruierte Abbildung f^+ surjektiv ist. Hinweise: (a) f^+ hat nur endlich viele kritische Werte, (b) $U := \mathbb{C}^+ \setminus C(f^+)$ ist wegzusammenhängend, (c) die Einschränkung von f^+ auf $(f^+)^{-1}(U) \to U$ ist eine eigentliche Submersion.

Aufgabe 5 (Einfacher Zusammenhang von hochdimensionalen Sphären)**.** Es sei $f : S^n \to S^m$ eine differenzierbare Abbildung und $n < m$. Man zeige, dass f nullhomotop ist, mit anderen Worten, es gibt eine stetige Abbildung $F : [0,1] \times S^n \to S^m$, so dass $F(0,x) = f(x)$ und $F(1,x) = x_0$ gilt, wobei $x_0 \in S^n$ ein fest gewählter Punkt ist. Hinweis: f ist nicht surjektiv und $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 6 (Die Polarzerlegung)**.** Es sei $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der symmetrischen Matrizen und $\mathrm{Pos}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der positiv definiten Matrizen. Dies ist eine offene konvexe Teilmenge (siehe Analysis II). In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Pos}_n(\mathbb{R}) \times O(n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R});\ (P, G) \mapsto PG$$

ein Diffeomorphismus ist.

Sei $Q : \mathrm{Pos}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pos}_n(\mathbb{R})$ die Abbildung $Q(A) = A^2$. Offenbar ist Q (C^∞-) differenzierbar. Man zeige:

a) Q ist bijektiv. Hinweis: für die Surjektivität benutze man den Spektralsatz für symmetrische Matrizen. Zur Injektivität: Falls $A^2 = B$, so kommutieren A und B, und man verwende simultane Diagonalisierung.

b) Q ist ein Diffeomorphismus. Hinweis: der vorige Aufgabenteil und der Umkehrsatz reduzieren das Problem darauf, zu zeigen, dass die Ableitung $DQ(A) : \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ eine injektive lineare Abbildung ist, also auf folgendes Problem: sind A, X symmetrische Matrizen, A positive definit, und $AX + XA = 0$, so gilt $X = 0$. Man betrachte die Eigenvektoren von A.

c) Wir bezeichnen die Umkehrfunktion von Q mit $A \mapsto \sqrt{A}$.

d) Zeigen Sie, dass durch

$$\psi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pos}_n(\mathbb{R}) \times O(n);\ A \mapsto (\sqrt{AA^T}, \sqrt{AA^T}^{-1} A)$$

die Umkehrabbildung von φ gegeben ist.

Viel Erfolg