Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 6 J. Ebert / L. Buggisch

Abgabetermin: 14.7.2017

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2. Seien $M^n \xrightarrow{g} N^n \xrightarrow{f} L^n$ zwischen orientierten zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Zeigen Sie, dass $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$ gilt.

Aufgabe 3. Sei N^n eine orientierte Mannigfaltigkeit und $M^m, L^l \subset M$ kompakte und orientierte Untermannigfaltigkeiten ohne Rand, und es gelte $m + l = n$. Die Inklusionen werden mit $f : M \to N$ und $g : L \to M$ bezeichnet.

a) Wir sagen, dass M und L transversal sind, wenn f transversal zu L ist (und das ist äquivalent dazu, dass g transversal zu M ist). In diesem Fall definiert man die Schnittzahl $[M \bullet L] := [f \bullet L]$. Zeigen Sie, dass

$$[M \bullet L] = (-1)^{lm}[L \bullet M]$$

gilt.

b) Wenn M und L nicht transversal sind, so gibt es nach dem Transversalitätssatz eine Homotopie $h : M \times [0,1] \times M \to N$ mit $h_0 = f$ und so dass $h_1 \pitchfork L$. Man definiert dann $[M \bullet L] := [h_1 \bullet L]$, und nach der Bordismusinvarianz der Schnittzahl hängt das nicht von der Wahl von h ab. Zeigen Sie, dass auch in dieser Situation

$$[M \bullet L] = (-1)^{lm}[L \bullet M]$$

gilt. Hinweis: natürlich ist der erste Aufgabenteil zu nutzen, aber die Reduktion ist nicht trivial, und benutzt folgende Resultate. Man kann zeigen, dass man die Homotopie so wählen kann, dass jedes h_t, $t \in [0,1]$ eine Einbettung ist, und mehr noch, dass eine Homotopie $H : [0,1] \times N \to N$ existiert, so dass jedes H_t ein Diffeomorphismus ist, $H_0 = \mathrm{id}$ und $h_t(x) = H_t(f(x))$ ("Isotopiefortsetzungssatz").

Aufgabe 4. Die *Eulerzahl* einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit ohne Rand M^n ist definiert als Schnittzahl eines Vektorfeldes $V : M \to TM$, welches transversal zum Nullschnitt ist, mit dem Nullschnitt in TM (man kann zeigen, dass dies mit der homologisch definierten Eulerzahl $\chi(M) := \sum_{k=0}^{n} \dim H_k(M; \mathbb{Q})$ übereinstimmt). Zeigen Sie:

a) Wenn die Orientierung von M umgekehrt wird, bleibt die Eulerzahl gleich.

b) Die Eulerzahl einer ungerade-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist 0.

c) $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$.

d) Berechnen Sie die Eulerzahl von S^n mittels eines geschickt gewählten Vektorfeldes.

Aufgabe 5.

Aufgabe 6. Es seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ teilerfemde Polynome vom Grad n bzw. m. Die meromorphe Funktion $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ lässt sich eindeutig zu einer glatten Abbildung $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ auf die Riemannsche Zahlenkugel fortsetzen. Nun ist $\mathbb{C}^+ \cong S^2$. Berechnen Sie den Abbildungsgrad der Abbildung f. Hinweis: es gilt $\deg(f) = d(m, n)$, wobei $d : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$. Um die richtige Formel zu raten, sind folgende Beispiele hilfreich:

a) Was ist das Ergebnis für $f = 1$, $g = z$?

b) Wie verhalten sich $\deg(\frac{f}{g})$ und $\deg(\frac{g}{f})$ zueinander?

c) Welches Ergebnis erhält man wenn $n = m = 1$? In diesem Falle ist $\frac{f}{g}$ sogar ein Diffeomorphismus.