SEMINAR ZUR TOPOLOGIE: KOHOMOLOGIETHEORIE UND POINCARÉ-DUALITÄT

JOHANNES EBERT

Talk 1 (Kokettenkomplexe und das universelle Koeffiziententheorem in Kohomologie)**.** Dualisieren von Kettenkomplexen. Universelles Koeffiziententheorem und Ext-Funktoren. Es gibt ein universelles Koeffiziententheorem für Kohomologie. Statt der Tor-Funktoren wie im Fall der Homologie treten hier die sogenannten Ext-Gruppen auf. Einige erhellende Beispiele für die Berechnung der Ext-Gruppen sollen ebenfalls gegeben werden. Literatur: [2, §3.1S. 190-197].

Talk 2 (Singuläre Kohomologie)**.** Hier soll die Definition der singulären Kohomologie eingeführt werden, sowie die Version der Eilenberg-Steenrod-Axiome für Kohomologie diskutiert werden. Die Beweise werden durch homologische Algebra auf den Fall der singulären Homologie zurückgeführt. [2, S. 197-204]. Ein interessantes Beispiel einer Kohomologieklasse ist die Klasse einer 2-blättrigen Überlagerung [1].

Talk 3 (Produkte auf der Kohomologie, Jens Gönner)**.** Ein wesentliche neue Struktur auf der singulären Kohomologie ist das Cup-Produkt $H^k(X) \otimes H^l(X) \to H^{k+l}(X)$, welches die Kohomologie zu einem Ring macht. In diesem Vortrag soll das Cup-Produkt konstruiert werden und außerdem das Cap-Produkt $H^k(X) \otimes H_l(X) \to H_{l-k}(X)$, welches die Kohomologie mit der Homologie paart. Ein Spezialfall ist das Kronecker-Produkt $H^k(X) \otimes H_k(X) \to R$. Die wesentliche Arbeit ist mit dem Satz von Eilenberg-Zilber bereits in der Topologie I geschehen. Konstruktion des Cup- und Cap-Produktes. Paarung mit der Homologie. [3, §VI.3-VI.5]. Als erstes Beispiel bietet sich eine Berechnung der Kohomologie des Torus an [1].

Talk 4 (Direkte Limiten und Kohomologie mit kompaktem Träger, Lukas Stöveken)**.** Die Formulierung des Poincaré-Dualitätssatz benutzt die *Kohmologie mit kompaktem Träger*, und für diese Begriffsbildung benötigt man den Begriff eines gerichteten Limes (auch als direkter Limes oder gerichteter Kolimes bekannt). Literatur: [4, §6.10, §8.3], [2, 242 ff] und [1].

Talk 5 (Formulierung der Poincaré-Dualität, Fabian Thiel)**.** Wiederholung: Orientierung und Fundamentalklasse aus Topologie I. Literatur: [4, 8.4]. Aussage der Poincaré-Dualität. Spezialfall für kompakte Mannigfaltigkeiten. Als Anwendung ergibt sich, dass die Homologiegruppen $H_k(M;\mathbb{Z})$ alle endlich erzeugt sind [1]. Wichtig ist auch die Version der Poincaré-Dualität für Mannigfaltigkeiten mit Rand [4, 8.35], ohne Beweis.

Talk 6 (Beweis der Poincaré-Dualität)**.** Der Beweis der Poincaré-Dualität wird in [4, §8.4] geführt.

Talk 7 (Eulercharakteristik und Signatur)**.** Anwendungen der Poincaré-Dualität: Eulercharakteristik und Signatur, [4, §8.6], [3, §VI.10].

Talk 8 (Thom-Isomorphismus und Schnitttheorie)**.** Orientierungen von Vektorbündeln und der Thom-Isomomorphismus. Das Cupprodukt hat für orientierte Mannigfaltigkeiten eine geometrische Interpretation. [3, §VI.11].

Talk 9 (Eulerklasse und Euler-Charakteristik)**.** Es soll die Eulerklasse eines orientierten Vektorbündels eingeführt und folgender schöner Satz bewiesen werden: sei M^n eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit. Dann gilt $\langle e(TM); [M] \rangle = \chi(M)$. [3, Theorem VI.12.4].

Talk 10 (Die Gysin-Sequenz)**.** Dies ist eine exakte Sequenz für die Kohomologie von Spärenbündeln, [3, VI.13], mit der beispielsweise die Kohmologie von $U(n)$ berechnet werden kann.

Date: February 9, 2017.

References

[1] J. Ebert: *mündliche Mitteilung*
[2] A. Hatcher: *Algebraic Topology*
[3] Bredon: *Topology and Geometry*
[4] W. Lück: *Algebraische Topologie*

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland