ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HOMOLOGIE VON GRUPPEN, BLATT 1, 18.4.2018

JOHANNES EBERT

Leseaufgabe 1. Man vergegenwärtige sich den Satz von Seifert-van Kampen, dessen Formulierung hier wiedergegeben wird, siehe siehe [1, p. 43]. Es sei X ein wegzusammenhängender Raum, $x_0 \in X$, und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, wobei $x_0 \in U_i$ für alle $i \in I$ angenommen sei. Bezeichne $U_{ij} := U_i \cap U_j$ und $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. Ferner seien $\mu_i : U_i \to X$ sowie $\lambda_{ij}^j : U_{ij} \to U_j$ die Inklusionen; man bemerke, dass $\mu_i \circ \lambda_{ij}^i = \mu_j \circ \lambda_{ij}^j$ gilt.

Satz 1. *Sei G eine Gruppe, es seien $f_i : \pi_1(U_i, x_0) \to G$ Homomorphismen und es gelte $f_i \circ (\lambda_{ij}^i)_* = f_j \circ (\lambda_{ij}^j)_*$ für alle $i, j \in I$. Dann gilt:*

(1) *Wenn alle U_i und alle Durchschnitte U_{ij} wegzusammenhängend sind, so gibt es höchstens einen Gruppenhomomorphismus $f : \pi_1(X, x_0) \to G$ mit $f \circ (\mu_i)_* = f_i$ für alle $i \in I$.*
(2) *Sind darüber hinaus alle Durchschnitte U_{ijk} wegzusammenhängend, so existiert ein solches f.*

Leseaufgabe 2. Man lese, z.B. in [2, p. 343-346], über die Konstruktion einer freien Gruppe auf einer Menge S und Gruppenpräsentierungen.

Aufgabe 3. Sei S eine Menge und $X_S = \vee_{s \in S} S_s^1$. Dies ist ein CW-Komplex mit $X_S^{(0)} = *$. Zeigen Sie, dass $\pi_1(X_S, *)$ isomorph zur freien Gruppe $F(S)$ ist. Berechnen Sie die Homologie der freien Gruppe $F(S)$.

Aufgabe 4. Sei Y ein 1-dimensionaler zusammenhängender nichtleerer CW-Komplex (also ein *Graph*). Ein *Baum* ist ein einfach-zusammenhängender Graph. Zeigen Sie, dass ein Baum $T \subset Y$ genau dann maximal bezüglich der Inklusion ist, wenn $Y^{(0)} \subset T$. Zeigen Sie, dass Y einen maximalen Baum T enthält. Hinweis: Lemma von Zorn.

Der Quotient Y/T ist homöomorph zu X_S für eine Menge S, und die Quotientenabbildung $Y \to Y/T$ ist eine Homotopieäquivalenz. Folgern Sie: die Fundamentalgruppe eines Graphen ist frei.

Aufgabe 5. Zeigen Sie: eine Untergruppe einer freien Gruppe ist wieder frei. Hinweis: Klassifikation der Überlagerungen.

Aufgabe 6. Beweisen Sie den Satz von Nielsen-Schreier: ist F_n die freie Gruppe auf n Erzeugern, und $G \subset F_n$ eine Untergruppe vom Index $k \in \mathbb{N}$, so ist G eine freie Gruppe auf $1-k+kn$ Erzeugern. Hinweis: Eulercharakteristik!

References

[1] Hatcher, Algebraic Topology, first edition.
[2] Rotmann: An introduction to the theory of groups, fourth edition.

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland