ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HOMOLOGIE VON GRUPPEN, BLATT 3, 16.5.2018

JOHANNES EBERT

Aufgabe 1. Benutzen Sie die Bar-Auflösung, um einen Isomorphismus $H_1(G;\mathbb{Z}) \cong G^{ab}$ zu konstruieren.

Aufgabe 2. Bekanntlich definiert jedes Objekt c einer Kategorie $\mathcal{C}$ einen kontravarianten Funktor $\mathcal{Y}_c : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, der auf Objekten durch $\mathcal{Y}(d) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(d,c)$ und auf Morphismen durch $\mathcal{Y}(f) := \_ \circ f$ gegeben ist. Man betrachte das Objekt $[n]$ von Δ_{inj}. Der Funktor $\mathcal{Y}_{[n]} : \Delta_{inj} \to \mathbf{Set}$ ist (nach Definition) eine semisimpliziale Menge, welche mit $\Delta^n_\bullet$ bezeichnet und das *semisimpliziale n-Simplex* genannt wird. Man rechtfertige diese Terminologie, indem man einen Homöomorphismus $\|\Delta^n_\bullet\| \cong \Delta^n$ konstruiert.

Aufgabe 3. In der Vorlesung wurde die Wirkung von G auf $E_\bullet G$ durch Linksmultiplikation betrachtet. Es gibt aber auch eine offensichtliche Wirkung durch Rechtsmultiplikation: für $g \in G$ sei $R_g(g_0, \ldots, g_p) := (g_0 g, \ldots, g_p g)$. Diese induziert eine stetige Abbildung $R_g : EG \to EG$. Zeigen Sie, dass eine Homotopie $H : [0,1] \times EG \to EG$ von R_g zur Identität existiert, welche G-äquivariant (bezüglich der Linkswirkung von G!) ist.

Hinweis: man konstruiere zunächst geeignete Abbildungen $[0,1] \times E_p G \times \Delta^p \to E_{2p+1} G \times \Delta^{2p+1}$.

Folgern Sie: die durch den Konjugationshomomorphismus $C_g : h \mapsto ghg^{-1}$ induzierte Selbstabbildung $BG \to BG$ ist homotop zur Identität.

Aufgabe 4 (Eine interessante zentrale Erweiterung)**.** Es sei G eine zusamenhängende Liegruppe und $\pi : \tilde{G} \to G$ ihre universelle Überlagerung. Man wähle einen Grundpunkt $e \in \pi^{-1}(1)$.

(1) Man konstruiere eine Gruppenmultiplikation $\mu : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$, so dass π ein Gruppenhomomorphismus ist. Hinweis: Überlagerungstheorie.
(2) Die Untergruppe $C := \ker(\pi) \subset \tilde{G}$ ist offenbar eine normale diskrete Untergruppe. Zeigen Sie, dass C zentral in $\tilde{G}$ ist.
(3) Es ist folgendes über die Fundamentalgruppe der (zusammenhängenden) Liegruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ bekannt: die Inkklusion $S^1 \cong SO(2) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ induziert einen Isomorphismus auf π_1; es gilt $\pi_1(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2$ falls $n \geq 3$; die Inklusion $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ ist surjektiv auf π_1, wenn $n = 2$, und ein π_1-Isomorphismus, wenn $n \geq 3$. Mit dem ersten Teil der Aufgabe ergibt sich die Existenz einer zentralen Erweiterung $\widetilde{\mathrm{SL}_n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ mit Kern $\mathbb{Z}/2$.
(4) Finden Sie eine möglichst kleine Untergruppe $K \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, um zu zeigen, dass diese Erweiterung nicht spaltet.

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT MÜNSTER, EINSTEINSTRASSE 62, 48149 MÜNSTER, BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND