ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HOMOLOGIE VON GRUPPEN, BLATT 4, 30.5.2018

JOHANNES EBERT

Aufgabe 1. Es sei G eine endliche Gruppe und A eine abelsche Gruppe. Wir setzen voraus, dass die Multiplikation mit $|G|$ auf A einen Isomorphismus $A \to A$ induziert (zum Beispiel, wenn A ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, oder wenn A eine endliche abelsche Gruppe mit $\mathrm{ggt}(|G|, |A|) = 1$ ist). Zeigen Sie, dass jede zentrale Erweiterung von G mit A zerfällt.

Aufgabe 2. Die 3-dimensionale ganzzahlige *Heisenberg-Gruppe* ist die Untergruppe

$$\mathfrak{H}_3 := \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}).$$

Die Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{H}_3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}^2 \to 1$, wobei

$$\iota(k) := \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} ; \ \pi(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ist eine zentrale Erweiterung. Zeigen Sie, dass durch

$$f(\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) := -a_0 b_1$$

ein die charakteristische Klasse $\chi(\pi) \in H^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ repräsentierender Kozykel gegeben ist.

Aufgabe 3. Man betrachte die Gruppe $\mathbb{Z}^2$ mit den beiden Erzeugern

$$T_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ T_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Element $(T_1, T_0) - (T_0, T_1) \in \mathbb{Z}\{G \times G\} = C_2(G)$ (Bar-Auflösung) ist ein Zykel und repräsentiert eine Klasse $\alpha \in H_2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (letzterer Isomorphismus ist durch die topologische Interpretation der Gruppenhomologie klar). Zeigen Sie, dass $\chi(\pi)$ sowie α Erzeuger der Gruppen $H^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z})$ sowie $H_2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z})$ sind, indem Sie die Kronecker-Paarung $\langle \chi(\pi), \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ berechnen.

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT MÜNSTER, EINSTEINSTRASSE 62, 48149 MÜNSTER, BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND