ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HOMOLOGIE VON GRUPPEN, BLATT 5, 6.6.2018

JOHANNES EBERT

Aufgabe 1. Es sei R ein (der Einfachheit halber kommutativer) Ring und M, N R-Moduln. Bekanntlich ist $\mathrm{Tor}_p^R(M;N)$ definiert als die p-te Homologie des Kettenkomplexes $P_* \otimes_R N$, wobei $P_* \to M$ eine freie Auflösung ist (nach dem Fundamentallemma der homologischen Algebra hängt $\mathrm{Tor}_p^R(M;N)$ bis auf kanonischen Isomorphismus nicht von der Wahl von P_* ab). Zeigen Sie mit einem Spektralsequenzenargument, dass

$$\mathrm{Tor}_p^R(M;N) \cong \mathrm{Tor}_p(N;M)$$

gilt. Hinweis: als Ansatz wähle man eine freie Auflösung $Q_* \to N$ und betrachte den Doppelkomplex $P_* \otimes Q_*$, mit seinen beiden Spektralsequenzen.

Aufgabe 2. Es sei wieder R ein kommutativer Ring und C_* ein Kettenkomplex von *freien* R-Moduln, sowie M ein R-Modul. Man konstruiere eine Spektralsequenz mit

$$E^2_{pq} = \mathrm{Tor}_p^R(H_q(C_*);M) \Rightarrow H_{p+q}(C_* \otimes M).$$

Nun sei R ein Hauptidealring. Es gilt $\mathrm{Tor}_p^R(\_,\_) = 0$ wenn $p \geq 2$, denn jeder R-Modul besitzt eine freie Auflösung $0 \to P_1 \to P_0 \to M$. Leiten Sie die Existenz von exakten Sequenzen

$$0 \to H_p(C_*) \otimes M \to H_p(C_* \otimes M) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{p-1}(C_*);M) \to 0$$

her, also das universelle Koeffiziententheorem.

Aufgabe 3. In der Vorlesung werden wir die Lyndon–Hochschild–Serre-Spektralsequenz konstruieren: es sei $1 \to K \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen und M ein G-Modul. Dann gibt es eine Spektralsequenz

$$E^2_{pq} = H_p(Q; H_q(K;M)) \Rightarrow H_{p+q}(G;M),$$

welche natürlich bezüglich aller Variablen ist. Erklärung: K ist eine normale Untergruppe von G, und G operiert durch Konjugation auf K. Somit ist $H_q(K;M)$ ein G-Modul, und weil K durch Konjugation auf sich selbst operiert, ist die K-Wirkung auf $H_q(K;M)$ trivial. Mit anderen Worten, $H_q(K;M)$ ist ein $G/K = Q$-Modul.

Leiten Sie aus der Spektralsequenz die Existenz einer kurzen exakten Sequenz

$$H_2(G) \to H_2(Q) \to H_1(K)_Q \to H_1(G) \to H_1(Q) \to 0$$

her.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe soll die Natürlichkeit der Lydon–Hochschild–Serre-Spektralsequenz ausgenutzt werden. In der Situation der letzten Aufgabe (der Einfachheit halber nur für den Modul $\mathbb{Z}$ mit trivialer Wirkung) gibt es Abbildungen

$$H_p(G) \to E^\infty_{p,0} \to \ldots \to E^2_{p,0} = H_q(Q)$$

sowie

$$H_q(K) \to H_q(K)_Q = E^2_{0,q} \to \ldots \to E^\infty_{0,q} \subset H_q(G)$$

(nämlich welche?). Zeigen Sie, dass diese Abbildungen mit den von $\pi : G \to Q$ beziehungsweise $\iota : K \to G$ identifiziert werden können.

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT MÜNSTER, EINSTEINSTRASSE 62, 48149 MÜNSTER, BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND