ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HOMOLOGIE VON GRUPPEN, BLATT 5, 13.6.2018

JOHANNES EBERT

Aufgabe 1. Von Blatt 4 ist die Heisenberggruppe $\mathfrak{H}_3$ bekannt. Diese passt in eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{H}_3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}^2 \to 1,$$

welche eine zentrale Erweiterung ist. In dieser Aufgabe soll die Homologie von $\mathfrak{H}_3$ mit Hilfe der Spektralsequenz berechnet werden. Folgende Schritte sind wesentlich:

(1) Der $\mathbb{Z}^2$-Modul $H_q(\mathbb{Z})$ hat die triviale Wirkung (die Erweiterung ist zentral).
(2) Man verwende die bekannte Homologie von $\mathbb{Z}^2$, um den E^2-Term zu berechnen.
(3) Das einzig mögliche Differential ist $d^2_{2,0} : E^2_{2,0} \to E^2_{0,1}$.
(4) Nun gilt: ist $T \in \mathbb{Z}$ der Erzeuger, so ist $\iota(T) \in \mathfrak{H}_3$ ein Kommutator. Aus diesem Grund ist $\iota_* :_1 (\mathbb{Z}) \to H_1(\mathfrak{H}_3)$ die Nullabbildung.
(5) Nutzen Sie diese Information, um zu schließen, dass $d^2_{2,0}$ surjektiv ist. Aus elementarer Algebra folgt, dass $d^2_{2,0}$ ein Isomorphismus ist.
(6) Aufsammeln der Information.

Aufgabe 2. Es sei C_* ein Kettenkomplex von freien G-Moduln (und $C_* = 0$ für $* \ll 0$). Zeigen Sie, dass $H_n(G; C_*) \cong H_n((C_*)_G)$ gilt. Hinweis: ein freier G-Modul ist von der Form $\mathrm{Ind}_1^G F$ für eine freie abelsche Gruppe F).

Aufgabe 3. Es operiere G frei auf dem Raum Y, und es sei angenommen, dass die Quotientenabbildung $Y \to Y/G =: X$ eine Überlagerung ist. Zeigen Sie, dass $H_n(G; C_*^{\mathrm{sing}}(Y)) \cong H_n(X)$ gilt und konstruieren Sie eine Spektralsequenz

$$E^2_{pq} = H_p(G; H_q(Y)) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

Aufgabe 4. In der Situation der letzten Aufgabe betrachte den Fall $G = \mathbb{Z}/2$, $Y = S^n$ mit der Wirkung durch die Antipodenabbildung. Berechnen Sie alle Differentiale in der Spektralsequenz in diesem Fall.

Hinweis: als Vorarbeit ist folgendes zu erledigen: ist G eine Gruppe und $\omega : G \to \pm 1$ ein Homomorphismus, so operiert G auf $\mathbb{Z}$ durch $g \cdot n := \omega(g)n$. Der resultierende G-Modul werde mit $\mathbb{Z}_\omega$ bezeichnet. Die Lösung der Aufgabe erfordert die Kenntnis von $H_*(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}_\omega)$, wobei $\omega : \mathbb{Z}/2 \to \pm$ die "Identität" ist. Der schnellste Weg dahin führt über eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_\omega \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2] \to \mathbb{Z} \to 0$$

von $\mathbb{Z}/2$-Moduln und Shapiro's Lemma.

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT MÜNSTER, EINSTEINSTRASSE 62, 48149 MÜNSTER, BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND