ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HOMOLOGIE VON GRUPPEN, BLATT 7, 20.6.2018

JOHANNES EBERT

Aufgabe 1. Es seien G und H Gruppen und $X \simeq K(G,1)$, $Y \simeq K(H,1)$. Man zeige, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} H^*(G;\mathbb{Z}) \otimes H^*(H;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\cong"] & H^*(G \times H;\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"] \\ H^*(X;\mathbb{Z}) \otimes H^*(Y;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\times"] & H^*(X \times Y;\mathbb{Z}). \end{tikzcd}$$

Hierbei sind die horizontalen Pfeile die Kreuzprodukte in der Gruppenkohomologie bzw. singulären Kohomologie und die vertikalen Pfeile die Isomorphismen der Gruppenkohomologie mit der singulären Kohomologie der Eilenberg-Mac-Lane-Räume. Hinweis: was verrät der Satz von Eilenberg-Zilber über die Eilenberg-Zilber-Abbildung

$$C_*^{\mathrm{sing}}(\tilde{X} \times \tilde{Y}) \to C_*^{\mathrm{sing}}(\tilde{X}) \otimes C_*^{\mathrm{sing}}(\tilde{Y})\,??$$

Aufgabe 2. Es sei G die Gruppe aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $x \mapsto \epsilon x + m$, mit $\epsilon \in \pm$ und $m \in \mathbb{Z}$. Man berechne die Homologie $H_*(G;\mathbb{Z})$. Hinweise:

(1) man konstruiere eine exakte Sequenz
$$1 \to \mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\pi} 1$$
und einen Homomorphismus $\sigma : \mathbb{Z}/2 \to G$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$.
(2) Man benutze die Berechnung von $H_*(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}_\omega)$ vom letzten Übungsblatt, um den E^2-Term der Spektralsequenz dieser Erweiterung zu berechnen.
(3) Die Spektralsequenz kollabiert, und das Erweiterungsproblem ist leicht zu beantworten.

Aufgabe 3. Es sei G eine Gruppe und $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots \subset G$ eine Folge von Untergruppen von G, so dass $G = \cup_n G_n$ gilt und es sei M ein G-Modul. Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung

$$\mathrm{colim}_n H_p(G_n;\mathbb{Z}) \to H_p(G;\mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus ist. Hinweis: psychologisch am einfachsten ist es, die Bar-Auflösung zu verwenden. Folgern Sie, dass

$$H_p(\mathbb{Q};\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ \mathbb{Q} & p = 1 \\ 0 & p \geq 2 \end{cases}$$

und nutzen Sie die Künneth-Formel, um $H_*(\mathbb{Q}^n;\mathbb{Z})$ zu berechnen. Beweisen Sie ferner, dass die Multiplikation $\mu_\lambda : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$ mit $\lambda \in \mathbb{Q}$ auf $H_p(\mathbb{Q}^n;\mathbb{Z})$ die Multiplikation mit λ^p induziert.

Aufgabe 4 (Ein Trick von Quillen)**.** Es sei $G \subset \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q})$ die Untergruppe aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}),\, v \in \mathbb{Q}^n,$$

und es sei $\pi : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ der Homomorphismus $\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A$. Offenbar ist $\ker(\pi) \cong \mathbb{Q}^n$. In dieser Aufgabe soll der sehr überraschende Satz bewiesen werden, dass $\pi_* : H_*(G;\mathbb{Z}) \to H_*(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q});\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist.

(1) Für $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$ sei
$$B(\lambda) := \begin{pmatrix} 1_n & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in G.$$
Das kommutative Diagramm
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}^n \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & \mathbb{Q}^n \arrow[d] \\ G \arrow[r, "C_{B(\lambda)}"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$
induziert einen Morphismus $A^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p,q}$ der Spektralsequenz.

(2) Es gilt: $A^2_{p,q} = \lambda^q$ und daher $A^r_{p,q} = \lambda^q$ für $2 \leq r \leq \infty$.

(3) Somit gilt $(1 - \lambda^{r-1})d^r_{pq} = d^r_{pq}$ für alle p, q, r, λ, und also folgt $d^r = 0$ für $r \geq 2$. Mit anderen Worten: die Spektralsequenz kollabiert bei E^2.

(4) Weil $(C_{B(\lambda)})_* = \mathrm{id}$, muss $A^\infty_{pq} = \mathrm{id}$ für alle p, q gelten.

(5) Folgerung: $E^\infty_{pq} = 0$ wenn $q > 0$.

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland