ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HOMOLOGIE VON GRUPPEN, BLATT 8, 11.7.2018

JOHANNES EBERT

Aufgabe 1. Es sei wie in der Vorlesung $X_\bullet(\underline{n})$ die semisimpliziale Menge, deren p-Simplizes die injektiven Abbildungen $[p] \to \underline{n}$ sind. Stärker, als in der Vorlesung bewiesen wurde, gilt, dass $\|X_\bullet(\underline{n})\|$ sogar $(n-2)$-zusammenhängend ist.

In der Vorlesung wurde ferner gezeigt, dass die Operation der symmetrischen Gruppe auf $X_\bullet(\underline{n})$ die folgenden Eigenschaften hat: Die zweite Spektralsequenz der Wirkung erfüllt $E^1_{pq} = H_q(\Sigma_{n-p-1})$, und das Differential $d^1_{p,q}$ ist $\sum_{j=0}^p (-1)^j)\mathrm{st}_*$, wobei $\mathrm{st}_* : H_*(\Sigma_k) \to H_*(\Sigma_{k+1})$ die Stablisierungsabbildung ist.

Man benutze das bekannte Wissen über $H_*(\Sigma_3)$, um die Homologie $H_*(\Sigma_4; C_*(X_\bullet(\underline{n})))$ zu berechnen. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass die Homologie von $X_\bullet(\underline{n})$ in einem gewissen Bereich verschwindet.

Welche Information über $H_*(\Sigma_4)$ lässt sich darus extrahieren?

Aufgabe 2 (Ein Hilfssatz für die nächste Aufgabe)**.** Sei I eine total geordnete Menge, und es sei $\Delta_\bullet(I)$ die semisimpliziale Menge, deren p-Simplizes gerade die injektiven und monotonen Abbildungen $f : [p] \to I$ sind. Zeigen Sie, dass $\|\Delta_\bullet(I)\| \simeq *$, falls $I \neq \emptyset$. Hinweis: am einfachsten ist es, zuerst einen endliche Menge $I = [q] = \{0 < \ldots < q\}$ zu betrachten, und $\|\Delta_\bullet([q])\| \cong \Delta^q$ direkt zu beweisen.

Aufgabe 3 (Die Mayer-Vietoris-Spektralsequenz)**.** Es sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir setzen voraus, dass I total geordnet ist. Zunächst sei etwas Notation eingeführt. Wie in der Topologie I definiert man $\mathrm{Sing}^{\mathfrak{U}}_\bullet(X) \subset \mathrm{Sing}_\bullet(X)$ als die Unter-semisimpliziale Menge aller singulären Simplizes σ von X, deren Bild $\mathrm{Im}(\sigma)$ ganz in einer der Mengen U_i enthalten ist. Aus der Topologie I ist der Satz bekannt, dass die Inklusion $\mathrm{Sing}^{\mathfrak{U}}_\bullet(X) \to \mathrm{Sing}_\bullet(X)$ einen Isomorphismus in Homologie induziert.

Für $f = (i_0, \ldots, i_p) \in \Delta_p(I)$ (siehe letzte Aufgabe) sei $U_f := \cap_{j=0}^p U_{i_j} \subset X$, und für $\sigma \in \mathrm{Sing}_q(X)$ sei $I_\sigma \subset I$ die Menge aller i mit $\mathrm{Im}(\sigma) \subset U_i$. Nun sei

$$A^{\mathfrak{U}}_{p,q}(X) := \{(f,\sigma) | f \in \Delta_p(I), \sigma \in \mathrm{Sing}_q(U_f) \subset \mathrm{Sing}_q(X)\}.$$

Diese bilden offensichtlich die Mengen von (p,q)- Simplizes einer bisemisimplizialen Menge $A^{\mathfrak{U}}_{\bullet,\bullet}(X))$ (nämlich wie?). Nun analysiere man die beiden Spektralsequenzen. Die zweite liefert

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} H_p(X) & q = 0 \\ 0 & q \neq 0, \end{cases}$$

woraus $H_*(A^{\mathfrak{U}}_{\bullet,\bullet}(X)) = H_*(X)$ folgt (hier ist die vorige Aufgabe und der Satz über kleine Simplizes zu verwenden). Die erste Spektralsequenz hat den E^1-Term

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{f\in\Delta_p(I)} H_q(U_f).$$

Wie sieht die Spektralsequenz aus, wenn $I = [1]$? Und wie für $I = [2]$?

Aufgabe 4. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung wie in der letzten Aufgabe. Es sei vorausgesetzt, dass für $f \in \Delta_p(I)$ gelte: $U_f = \emptyset$ oder $H_*(U_f) = H_*(*)$. Es sei $N_\bullet\mathfrak{U}$ der *Nerv* der Überdeckung $\mathfrak{U}$, also die semisipliziale Menge $N_p\mathfrak{U} = \{f \in \Delta_p(I) | U_f \neq \emptyset\}$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$H_*(N_\bullet\mathfrak{U}) \cong H_*(X).$$

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland