SEMINAR ZUR TOPOLOGIE: K-THEORIE

JOHANNES EBERT, RUDOLF ZEIDLER

Grundlagen der K-Theorie.

Vortrag 1 (Vektorbündel, N.N.)**.** Grundlagen über Vektorbündel: Definition, Beispiele, Konstruktionen: direkte Summe, Tensorprodukt, Bündelmetriken. Literatur: [6, §1.1].

Vortrag 2 (Klassifikation von Vektorbündeln I, Annika Laschewski)**.** Pullback-Bündel, Homotopieinvarianz des Pullbacks [6, Theorem 1.6]. Bemerkung: der Beweis wird einfacher, wenn der Basisraum als kompakt vorausgesetzt wird, was hier geschehen soll. Siehe auch [1, Lemma 1.4.3]. Eine erste interessante Anwendung ist die Klassifikation von Vektorbündeln auf S^n durch Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $S^{n-1} \to O(k)$.

Vortrag 3 (Klassifikation von Vektorbündeln II, Benedikt Rips)**.** Universelle Bündel auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten. Klassifikation von Vektorbündeln auf kompakten Räumen. [6, p. 27-31]. Bemerkung: auch hier vereinfacht sich der Beweis, wenn man sich auf kompakte Basisräume beschränkt.

Vortrag 4 (Definition der K-Theorie, Jens Gönner)**.** Hier werden die Gruppen $K(X)$ für kompakte Räume definiert. Literatur: [6, p. 39-41]. Definition der (Hälfte der) langen exakten Sequenz [6, p. 51-53].

Vortrag 5 (Bott-Periodizität I, Maximilian Tönies)**.** Fundamentaler Produktsatz [6, Theorem 2.2] (ohne Beweis) und Folgerungen [6, Theorem 2.3] sowie [6, p. 53-58].

Vortrag 6 (Bott-Periodizität II, Thomas Spelten)**.** Beweis des fundamentalen Produktsatzes [6, p. 42-51]. Alternativ: [3]. Mit dem formalen Trick aus [2, §1] kann der Beweis vereinfacht werden. Siehe auch [1].

Das Hopf-Invariante-1-Problem.

Vortrag 7 (Felix Janssen)**.** Berechnung von $K(\mathbb{CP}^n)$, Satz von Leray-Hirsch und Thom-Isomorphismus in K-Theorie [6, p. 65-72].

Vortrag 8 (Lukas Stöveken)**.** Adams-Operationen. Spaltungsprinzip [6, Theorem 2.20, Proposition 2.21, und p. 70-72].

Vortrag 9 (Georg Frenck)**.** Hopf-Invariante 1-Problem. Verschiedene Formulierungen und Lösung des Problems [6, p. 59-62, p. 65].

K-Theorie und Funktionalanalysis.

Vortrag 10 (Fredholm-Operatoren und Index)**.** [7, §25] [4, §1.1-1.5]. Alternativ: [5, §1.1-1.5].

Vortrag 11 (Satz von Kuiper, Markus Schmetkamp)**.** Der Satz von Kuiper besagt, dass die unitäre Gruppe eines ∞-dimensionalen Hilbert-Raumes zusammenziehbar ist. Literatur: [8], [4, §1.6].

Vortrag 12 (Satz von Atiyah und Jänich, Jannes Bantje)**.** Dieser behauptet die Existenz eines kanonischen Isomorphismus $[X, \mathrm{Fred}(H)] \cong K^0(X)$. Literatur: [1, Appendix] oder [4, §1.7].

Vortrag 13 (K-Theorie von Banach-Algebren, Julian Kranz)**.** Es soll die K-Theorie von Banach-Algebren definiert werden und zum Abschluss der Satz von Serre-Swan: $K_0(C(X;\mathbb{C})) \cong K^0(X)$ bewiesen werden.

Date: February 1, 2018.

References

[1] M. F. Atiyah. *K-theory*. Lecture notes by D. W. Anderson. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
[2] M. F. Atiyah. Bott periodicity and the index of elliptic operators. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 19:113–140, 1968.
[3] Michael Atiyah and Raoul Bott. On the periodicity theorem for complex vector bundles. *Acta Math.*, 112:229–247, 1964.
[4] Bernhelm Booss. *Topologie und Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Einführung in die Atiyah-Singer-Indexformel, Hochschultext.
[5] J. Ebert. A lecture course on the Atiyah-Singer index theorem. Vorlesungsskript, erhältlich unter https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/jeber_ 02/skripten.html.
[6] Allen Hatcher. Vector bundles and K-Theory. Unfinished book project, available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VBpage.html.
[7] Friedrich Hirzebruch and Winfried Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971. B. I.-Hochschultaschenbücher, No. 296*.
[8] Nicolaas H. Kuiper. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. *Topology*, 3:19–30, 1965.

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland