Vorlesung Topologie I

Blatt 10

J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 12.01.2017 bis 12 Uhr

Frageaufgabe 1 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2 (Abbildungskegel und -zylinder)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Wir definieren $Z_f := (Y \coprod (X \times [0,1]))/\sim$ mit $(x,0) \sim f(x)$ für alle $x \in X$ und $M_f := (Y \coprod (X \times [0,1]))/\sim$ mit $(x,0) \sim f(x)$ und $(x,1) \sim (x',1)$ für alle $x, x' \in X$. Wir nennen Z_f den Abbildungszylinder und M_f den Abbildungskegel. Wir bezeichnen mit $i_X : X \to Z_f$ und $i_Y : Y \to Z_f$ die Abbildungen $i_X(x) := (x,1)$ und $i_Y(y) := y$ und mit $r : Z_f \to Y$ die Abbildung $y \mapsto y$ und $(x,t) \mapsto f(x)$. Diese Abbildungen sind stetig.

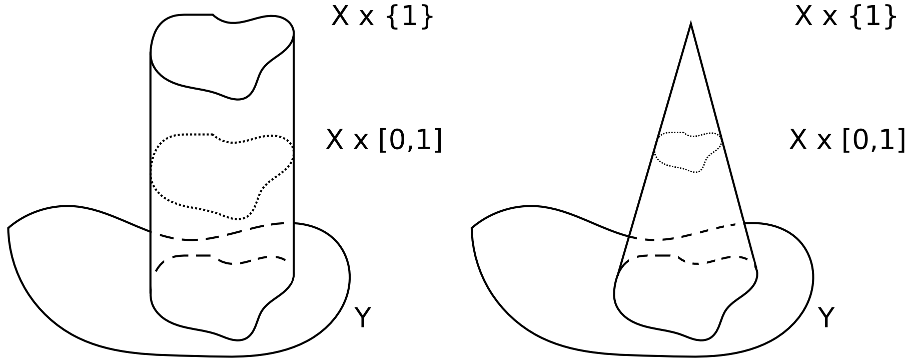

Figure 1: Abbildungszylinder (links) und Abbildungskegel (rechts)

a) Zeigen Sie: r und i_Y sind zueinander inverse Homotopieäquivalenzen, und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Z_f \arrow[d, "r"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

b) Folgern Sie: es gibt eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(Y) \to \tilde{H}_n(M_f) \to H_{n-1}(X) \ldots$$

(beliebige Koeffizienten). Insbesondere ist f_* ein Isomorphismus genau dann, wenn $\tilde{H}_*(Z_f) = 0$.

Aufgabe 3. Sei R ein Hauptidealring und sei (C_*, ∂_*) ein freier Kettenkomplex von R-Moduln. Wie gewöhnlich bezeichnen wir mit $Z_n \subset C_n$ die Zykel und mit die $B_n \subset C_n$ die Ränder. Es ist dann B_n ein freier R-Modul und daher spaltet die kurze exakte Sequenz

$$0 \to Z_{n+1} \to C_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} B_n \to 0.$$

Wir wählen für jedes n eine Spaltung $f_n : B_n \to C_{n+1}$ (d.h. $\partial_{n+1} \circ f_n = 1$). Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir den freien Kettenkomplex A_*^n als

$$\ldots \to 0 \to B_n \overset{\iota}{\to} Z_n \to 0 \to \ldots$$

wobei Z_n hier im Grad n sitze. Setze

$$g_n : Z_n \oplus B_{n-1} \to C_n;\ g_n(z, b) := z + f_{n-1}(b).$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildungen einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_*^n \overset{\cong}{\to} C_*$$

definieren. Insbesondere ist jeder freie Kettenkomplex isomorph zu einer direkten Summe von "kurzen" Kettenkomplexen.

Aufgabe 4 (Transfer)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine k-fache Überlagerung.

a) Sei $\sigma\colon \Delta^p \to Y$. Zeigen Sie: Dann gibt es genau k Lifts $\tilde{\sigma}\colon \Delta^p \to X$ von σ, d.h. stetige Abbildungen, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^p \arrow[ur, dashed, "\tilde{\sigma}"] \arrow[r, "\sigma"] & Y \end{tikzcd}$$

(Hinweis: Δ^p ist einfach zusammenhängend).

b) Wir definieren nun $f^!\colon C_*(Y) \to C_*(X)$ durch

$$f^!(\sigma) = \sum_{f \circ \tilde{\sigma} = \sigma} \tilde{\sigma}.$$

Zeigen Sie, dass $f^!$ eine Kettenabbildung ist. (Hier sind singuläre Ketten mit Koeffizienten in einem beliebigen Ring R zu betrachten). Tipp: es gilt $\{\text{Lifts von } \sigma \circ d^i\} = \{\tilde{\sigma} \circ d^i\colon \tilde{\sigma} \text{ ist ein Lift von } \sigma\}$, wobei $d^i\colon \Delta^{p-1} \to \Delta^p$ die übliche Abbildung ist.

c) $f_* \circ f^! \colon C_*(Y) \to C_*(Y)$ ist Multiplikation mit k.

d) Für $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \nmid k$ ist die von f in Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}$ induzierte Abbildung surjektiv.

Viel Erfolg!