Vorlesung Topologie I

Blatt 8

J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 15.12.2016 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Natürliche Transformationen.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Die Kleinsche Flasche K)**.** Verklebt man zwei Kopien des Möbiusbandes M (siehe Blatt 4, Aufgabe 5) entlang des Randes, so erhält man die Kleinsche Flasche $K = M \cup_{\partial M} M$ (formal ist K als Pushout

$$\begin{tikzcd} \partial M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"] & M \arrow[d] \\ M \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

definiert). Die Kleinsche Flasche ist eine 2-dimensionale, nicht-orientierbare, kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Ziel der Aufgabe ist die Berechnung von $H_*(K;R)$.

a) Betrachten Sie die Mayer-Vietoris-Sequenz für die Überdeckung von K durch 2 (aufgedickte) Möbiusbänder (A, B). A, B und $A \cap B$ sind homotopieäquivalent zu S^1 und daher ist die Homologie dieser Räume bekannt. Aus diesem Wissen leitet man, ohne weitere geometrische Idee, her, dass $H_k(K;R) = 0$ falls $k \geq 3$ und dass der Verbindungshomomorphismus $\partial : H_1(K) \to H_0(A \cap B)$ Null ist.

b) Es bleibt also der Teil

$$0 \to H_2(K;R) \stackrel{\partial}{\to} H_1(A \cap B;R) \to H_1(A;R) \oplus H_1(B;R) \to H_1(K;R) \stackrel{\partial=0}{\to}$$

zu untersuchen. Zeigen Sie: die Abbildung $H_1(A \cap B;R) \to H_!(A;R) \oplus H_1(B;R)$ entspricht, unter aus der Vorlesung bekannten Isomorphismen, der Abbildung $R \to R \oplus R$, $r \mapsto (\pm 2, \pm 2)$.

c) sei $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Zeigen Sie, dass

$$H_k(K,\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{falls } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}$$

$$H_k(K,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{falls } k = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k = 2 \\ 0 & \text{falls } k \geq 3 \end{cases}$$

$$H_k(K;\mathbb{F}) = \begin{cases} (\mathbb{F}) & \text{falls } k = 1 \\ \mathbb{F} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}$$

Tip: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Tensorprodukte:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

für jeden Körper $\mathbb{F}$.

Hier könnte man Aufgaben folgender Art einsetzen:

Aufgabe 5. Seien $n, r \geq 1$. Konstruieren Sie einen CW-Komplex X, so dass $H_n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/r$ und $\tilde{H}_k(X) = 0$ für $k \neq n$. Berechnen Sie alle Homologiegruppen $H_k(X;R)$ Ihres Beispiels, wobei $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p, p\text{prim}\}$.

Viel Erfolg!