Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 1 J. Ebert
Abgabetermin: 23.10., in den Übungen.

- Die "Leseaufgabe" wird nicht bepunktet. Jede andere Aufgabe zählt 10 Punkte. Mehrfachabgaben sind nicht zugelassen.
- Unter den "Standard-Referenzen" dieser Vorlesung werden folgende Werke verstanden:
- Bredon: Topology and Geometry
- tom Dieck: Algebraic Topology
- Hatcher: Algebraic Topology (ich benutze die erste Auflage, die sich auch im Semesterapparat befindet).

Leseaufgabe 1. Man wiederhole die Grundbegriffe der Überlagerungstheorie, zum Beispiel nach Bredon, §III.3 und III.4.

Frageaufgabe 2. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. Es seien (X, x) und (Y, y) punktierte Räume. Die *Wedge-Summe* $X \vee Y$ ist der Raum $X \coprod Y/(x \sim y)$, mit Basispunkt z, welcher durch x bzw. y repräsentiert werde. Sei $i : X \vee Y \to X \times Y$ die "offensichtliche" Inklusion.

(1) Konstruieren Sie einen Isomorphismus
$$\pi_n(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_n(X, x) \times \pi_n(Y, y).$$
(2) Zeigen Sie, dass $i_* : \pi_n(X \vee Y, z) \to \pi_n(X \times Y, (x, y))$ surjektiv ist, wenn $n \geq 1$.
(3) Zeigen Sie, dass i_* für $n \geq 2$ spaltet (d.h. es gibt einen Homomorphismus $\varphi : \pi_n(X \times Y, (x, y)) \to \pi_n(X \vee Y, z)$ mit $i_* \circ \varphi = \mathrm{id}$). Was geht im Fall $n = 1$ schief?

Aufgabe 4. Berechnen Sie so viele Homotopiegruppen der Räume $T^n = (S^1)^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{RP}^n$ wie Sie können.

Aufgabe 5. Ein *H-Raum* ist ein punktierter Raum (X, e) zusammen mit einer punktierten Abbildung $\mu : (X \times X, (e, e)) \to (X, e)$, so dass die Abbildungen $f_1, f_2 : X \to X$, $f_1(x) := \mu(e, x)$, $f_2(x) := \mu(x, e)$, punktiert homotop zur Identität sind. Beispielsweise ist jede topologische Gruppe[1] ein H-Raum. Zeigen Sie:

(1) die Abbildung $\pi_n(X, e) \times \pi_n(X, e) \overset{\text{Aufgabe 3}}{\cong} \pi_n(X \times X, (e, e)) \xrightarrow{\mu_*} \pi_n(X, e)$ stimmt mit der Gruppenverknüpfung auf $\pi_n(X, e)$ überein.
(2) $\pi_1(X, e)$ ist abelsch.

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland

[1] Suchen Sie die Definition