Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 11 J. Ebert
Abgabetermin: 15.1., in den Übungen.

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2. Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Wir setzen

$$E_f := \{(x,c)|x \in X, c : I \to Y, c(0) = x\} \subset X \times Y^I.$$

Es sei $p : E_f \to Y$ durch $p(x,c) := c(1)$ definiert, und $r : X \to E_f$ durch $x \mapsto (x, c_{f(x)})$, wobei $c_{f(x}$ der konstante Pfad bei $f(x)$ sei. Zeigen Sie:

(1) r ist eine Homotopieäquivalenz,
(2) $p \circ r = f$,
(3) p ist eine Faserung.

Wir nennen $\mathrm{hofib}_y(f) := p^{-1}(y)$ die *Homotopiefaser* von f bei y. Zeigen Sie:

(1) Ist f eine Faserung, so ist die kanonische Abbildung $\eta : f^{-1}(y) \to \mathrm{hofib}_y(f)$ eine schwache Homotopieäuivalenz, für jedes $y \in Y$.
(2) Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\pi_{k+1}(f) \cong \pi_k(\mathrm{hofib}_{y_0}(f))$ (das Auffinden geeigneter Basispunkte ist Teil der Aufgabe).

Aufgabe 3. Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und $i : x_0 \to X$ die Inklusion. Der Raum E_i, der in der vorigen Aufgabe konstruiert wurde, ist der Raum aller Pfade $c : [0,1] \to X$ mit $c(0) = x_0$, und die Abbildung $E_i \to X$ ist $p(c) = c(1)$. Eine andere Bezeichnung für E_i ist $\mathcal{P}_{x_0}(X)$, der Raum aller Pfade, die in x_0 beginnen. Was ist $\mathrm{hofib}_{x_0}(p)$?

Nun sei $f : S^2 \to \mathbb{CP}^\infty$ die Inklusion von $S^2 = \mathbb{CP}^1$ und $\eta : S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung. Offenbar gibt es eine (punktierte) Homotopie $F : S^3 \times [0,1] \to \mathbb{CP}^\infty$ von einer konstanten Abbildung zu $f \circ \eta$. Konstruieren Sie aus der Homotopie F ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\eta"] & \mathcal{P}_*\mathbb{CP}^\infty \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{CP}^\infty \end{tikzcd}$$

und schließen Sie, dass $S^3 \simeq \mathrm{hofib}_*(f)$.

Aufgabe 4. Es sei X ein 0-zusammenhängender Raum. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(1) Es gibt $f : X \to K(\pi_n(X), n)$, so dass $f_* = \mathrm{id} : \pi_n(X) \to \pi_n(K(\pi_n(X), n))$.
(2) $\mathrm{hur} : \pi_n(X) \to H_n(X;\mathbb{Z})$ ist spaltend-injektiv, d.h. es gibt $s : H_n(X;\mathbb{Z}) \to \pi_n(X)$ mit $s \circ \mathrm{hur} = \mathrm{id}$.