Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 5 J. Ebert
Abgabetermin: 20.11., in den Übungen.

Notation. Die *Konnektivität* $\mathrm{conn}(f)$ einer Abbildung $f : X \to Y$ sei die größte Zahl $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, so dass f n-zusammenhängend ist. Analog ist die Konnektivität eines Raumes X definiert. Kurz: $\mathrm{conn}(X) := \mathrm{conn}(X \to *) - 1$.

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2. Es sei $f : X \to Y$ eine Serre-Faserung, und der Einfachheit halber seien Y und f als 0-zusammenhängend vorausgesetzt. Sei $y_0 \in Y$ ein Grundpunkt und $F := f^{-1}(y_0)$, sowie $j : F \to X$ die Inklusion.

(1) Welche Relation besteht zwischen $\mathrm{conn}(Y)$ und $\mathrm{conn}(j)$?
(2) Welche Relation besteht zwischen $\mathrm{conn}(F)$ und $\mathrm{conn}(p)$?
(3) Es existiere $s : Y \to X$ mit $f \circ s = \mathrm{id}$. Dann gilt $\pi_n(Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(F)$.
(4) Es existiere $r : X \to F$ mit $r \circ j = \mathrm{id}$. Dann gibt es eine schwache Homotopieäquivalenz $X \to Y \times F$.

Aufgabe 3. Es sei $f : X \to Y$ eine Serre-Faserung und $g : Z \to Y$ stetig.

(1) Wir definieren
$$g^*X := \{(x,z) \in X \times Z | f(x) = g(z)\} \subset X \times Z$$
(mit der Teilraumtopologie). Ferner seien $q : g^*X \to X$, $q(x,z) = x$ und $p : g^*X \to Z$, $p(x,z) = z$. Zeigen Sie, dass p eine Serre-Faserung ist. Diese heißt die mit g zurückgezogene Faserung. Bemerke: die Faser von p über $z \in Z$ ist (kanonisch homöomorph zu) der Faser von f über $g(z)$.
(2) Sei $f : X \to Y$ eine Serre-Faserung und $y_0, y_1 \in Y$ zwei Punkte in derselben Wegekomponente. Dann gibt es einen Raum Z und schwache Homotopieäquivalenzen $f^{-1}(y_0) \to Z$, $f^{-1}(y_1) \to Z$. Hinweis: man ziehe f auf einen zusammenziehbaren Raum zurück.

Aufgabe 4. Die *Stiefel-Mannigfaltigkeit* $\mathrm{St}_k(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller $(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$, so dass $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, mit der Teilraumtopologie[1]. Wichtige Spezialfälle sind im übrigen $\mathrm{St}_n(\mathbb{R}^n) = O(n)$ und $\mathrm{St}_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$. Wir betrachten die Abbildung $q : O(n) \to \mathrm{St}_k(\mathbb{R}^n)$, welche eine Matrix A auf das k-Tupel, welches aus den letzten k Spaltenvektoren besteht, schickt.

(1) Zeigen Sie, dass q ein Faserbündel mit Faser $q^{-1}(e_{n-k+1}, \ldots, e_n) = O(n-k)$ ist (Quotientenmannigfaltigkeitssatz). Insbesondere gibt es die lange exakte Homotopiesequenz von q.
(2) Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Konnektivität der Inklusion $O(m) \to O(m+1)$ und die lange exakte Homotopiesequenz von q, um eine möglichst große untere Schranke für $\mathrm{conn}(\mathrm{St}_k(\mathbb{R}^n))$ zu finden.

---

[1] In der Vorlesung Differentialtopologie wurde mittels des Satzes vom regulären Wert gezeigt, dass dies tatsächlich eine Mannigfaltigkeit ist. Darum soll es in dieser Aufgabe aber nicht gehen.