SEMINAR ZUR TOPOLOGIE: ALGEBRAISCHE K-THEORIE UND ANWENDUNGEN IN DER GEOMETRISCHEN TOPOLOGIE

JOHANNES EBERT, ACHIM KRAUSE

Grundlegende Definitionen.

Vortrag 1 (Definition von $K_0(R)$ und $K_1(R)$, Achim Krause, 9.10.)**.** In diesem Vortrag soll die Definition der Gruppe $K_0(R)$ eines Ringes vorgestellt werden. Einige einfache Beispiele bieten sich an: Körper, Hauptidealringe und lokale Ringe. [11, 1.1-1.3]. Auch der Satz von Serre-Swan, welcher zeigt, dass für einen kompakten Hausdorff-Raum X die Gleichung $K_0(C(X)) \cong K^0(X)$ gilt, ist hier erwähnenswert, [11, §1.6]. Definition $K_1(R)$ eines Ringes. Als einfaches Beispiel bieten sich euklidische Ringe an, und insbesondere der Satz, dass $K_1(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2$ gilt, sollte unbedingt behandelt werden. [11, §2] und [10, §3].

Anwendungen in der geometrischen Topologie.

Vortrag 2 (Das Endlichkeitshindernis I, Jens Gönner, Thomas Spelten, 16.10.)**.** Ein Raum X ist *endlich dominiert*, wenn ein endlicher CW-Komplex Y und Abbildungen $r : Y \to X$ sowie $j : X \to Y$ existieren, mit $r \circ j \sim \mathrm{id}_X$. Beispielsweise kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, [4, Proposition 8.3]. In diesem und in dem folgenden Vortrag soll das Ergebnis von Wall [13] besprochen werden, dass ein endlich dominierter Raum X genau dann homotopieäquivalent zu einem endlichen CW-Komplex ist, wenn ein gewisses Element $\sigma(X) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]) := \mathrm{coker}(\mathbb{Z} \to K_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ verschwindet. Man folge [4, §8] und ziehe zur Ergänzung die Originalarbeit [13] zu Rate. Bemerkung: [4, §8] verweist implizit auf [4, §6,7], deren Inhalt aber im Wesentlichen aus der Topologie II bekannt ist. Der Sprecher muss sich mit dem Sprecher des folgenden Vortrages koordinieren, um das Material sinnvoll aufzuteilen.

Vortrag 3 (Das Endlichkeitshindernis II, Jens Gönner, Thomas Spelten, 23.20.)**.** Selbe Beschreibung wie der vorherige Vortrag.

Vortrag 4 (Whitehead-Torsion, Georg Frenck, 30.10.)**.** Einem endlichen CW-Paar (Y, X) oder allgemeiner einer Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$ zwischen endlichen CW-Komplexen ordnet man die *Whitehead-Torsion* $\tau(Y, X)$ bzw. $\tau(f)$ zu, welche ein Element der *Whitehead-Gruppe* $\mathrm{Wh}(\pi_1(X)) := \mathrm{coker}(\pm \times \pi_1(X) \to K_1(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ ist. Literatur: [4, §11]. Das Hauptergebnis des Vortrages ist [4, Theorem 11.12]. Zur Ergänzung ziehe man [9], [7, §2] und [2] heran. In [11, Example 2.4.2] wird sehr einfach bewiesen, dass die abelsche Gruppe $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}/5)$ unendlich ist. Fundamental ist natürlich auch das Beispiel $\mathrm{Wh}(1) = 0$.

Vortrag 5 (Der s-Kobordismussatz, Überblick, Lukas Stöveken, 13.11.)**.** Ein *h-Kobordismus* ist ein Kobordismus $W : M_0 \rightsquigarrow M_1$ zwischen Mannigfaltigkeiten, so dass die Inklusionen $M_i \to W$ beide Homotopieäquivalenzen sind. Einem h-Kobordismus ordnet man die Torsion $\tau(W, M_0) \in \mathrm{Wh}(\pi_1(M_0))$ zu. Der berühmte *s-Kobordismussatz* besagt, dass ein h-Kobordismus der Dimension ≥ 6 genau dann diffeomorph zu $M_0 \times [0, 1]$ ist, wenn $\tau(W, M_0) = 0$ gilt. Der Beweis kann hier nur skizziert werden und beruht auf der Morse-Theorie. Im Falle, dass $\pi_1(M_0) = 1$ gilt, erhält den h-Kobordismussatz als Spezialfall, und einen schnellen Beweis der Poincaré-Vermutung in hohen Dimensionen.

Literatur: [7], [6].

Vortrag 6 (Satz von West, Robin Loose, 20.11.)**.** Der Satz von West: das Endlichkeitshindernis eines kompakten ENR's ist trivial.

Date: October 9, 2018.

Zurück zur Algebra.

Vortrag 7 (Der Satz von Bass-Heller-Swan, Fabian Thiel, 27.11.). In diesem Vortrag soll es um die grundlegende Berechnung $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]) = 0$ und $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}^n) = 0$ gehen. [1], [11, §3.2]. Der Beweis hat gewisse Ähnlichkeiten mit dem Beweis des Periodizitätssatzes von Bott.

Höhere K-Theorie. In den verbleibenden Vorträgen soll es um die Möglichkeit gehen, höhere K-Gruppen $K_n(R)$ zu definieren. Es gibt mehrere Möglichkeiten dazu; die meisten wurden von Quillen eingeführt.

Vortrag 8 (Quillen Plus-Konstruktion, Markus Schmetkamp, 11.12.). Ist X ein Raum und $P \subset \pi_1(X)$ eine perfekte normale Untergruppe, so konstruiert man einen neuen Raum X^+ und eine Abbildung $f : X \to X^+$, so dass f einen Isomorphismus in Homologie induziert, aber $\pi_1(X^+) = \pi_1(X)/P$. [5, S. 374], [11, §5.2]. Mit dieser Konstruktion ausgerüstet definiert man $K_n(R) := \pi_n(B\mathrm{GL}_\infty(R)^+)$.

Vortrag 9 ($K_2(R)$, Johannes Ebert, 18.12.). Zunächst soll nachgewiesen werden, dass die im letzten Vortrag gegebene Definition von $K_1(R)$ mit der alten übereinstimmt. Des weiteren soll eine direkte algebraische Beschreibung von $K_2(R)$ gegeben werden. Literatur/Hinweise: die algebraische Definition von $K_2(R)$ ist in [10, §5] oder [11, IV.1–3] zu finden, der Beweis, dass beide Definitionen übereinstimmen in [11, Theorem 5.2.7].

Vortrag 10 ("Group-completion" und alternative Definition der höheren K-Theorie, Jannes Bantje, Leon Hendrian (2 Vorträge), 8. und 15.1.). Für einen topologischen Monoid M soll der klassifizierende Raum BM eingeführt werden. Nach [8] soll dann bewiesen werden, dass die Abbildung $M \to \Omega BM$ auf Homologie einen Isomorphismus $H_*(\Omega BM) \simeq H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}]$ bezüglich aller lokalen Koeffizientensysteme induziert. Schließlich soll damit gezeigt werden, dass für den Monoid $M = \coprod_n B\mathrm{GL}_n(R)$ gilt dass $\Omega BM \simeq K_0(R) \times B\mathrm{GL}_\infty(R)^+$.

Die Quelle [12] ist ebenfalls relevant, und die benötigten Aussasgen über simpliziale Räume werden alle auch in [3] bewiesen.

References

[1] H. Bass, A. Heller, and R. G. Swan. The Whitehead group of a polynomial extension. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (22):61–79, 1964.

[2] Marshall M. Cohen. *A course in simple-homotopy theory.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 10.

[3] J. Ebert and O. Randal-Williams. Semi-simplicial spaces. *ArXiv e-prints*, May 2017.

[4] Steve Ferry. Geometric topology notes. Available at http://sites.math.rutgers.edu/ sferry/.

[5] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[6] Michel A. Kervaire. Le théorème de Barden-Mazur-Stallings. *Comment. Math. Helv.*, 40:31–42, 1965.

[7] Wolfgang Lück. A basic introduction to surgery theory. In *Topology of high-dimensional manifolds, No. 1, 2 (Trieste, 2001)*, volume 9 of *ICTP Lect. Notes*, pages 1–224. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2002.

[8] Dusa McDuff and Graeme Segal. Homology fibrations and the "group-completion" theorem. *Inventiones mathematicae*, 31(3):279–284, 1976.

[9] J. Milnor. Whitehead torsion. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72:358–426, 1966.

[10] John Milnor. *Introduction to algebraic K-theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971. Annals of Mathematics Studies, No. 72.

[11] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*, volume 147 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[12] Graeme Segal. Categories and cohomology theories. *Topology*, 13:293–312, 1974.

[13] C. T. C. Wall. Finiteness conditions for CW-complexes. *Ann. of Math. (2)*, 81:56–69, 1965.

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland