Hilbert-Uniformisierung Kleinscher Flächen

Diplomarbeit in Mathematik
angefertigt an der Rheinischen Friedrichs-Wilhelm-Universität Bonn
vorgelegt von

Johannes Felix Ebert
aus Bonn

März 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

0.1 Vorwort zur korrigierten Fassung

Es hat sich gezeigt, dass der von mir ursprünglich gegebene Beweis für Satz 1.5.5 fehlerhaft war. Da dieser Satz unmittelbar in den Beweis des Hauptresultates Satz 3.2.4 eingeht, wurde nun ein korrekter Beweis erbracht. Ferner habe ich im 2. Schritt des Beweises von 3.2.4 die Argumentation noch deutlich vereinfacht.

0.2 Vorwort

Gegenstand dieser Arbeit ist der Modulraum Kleinscher Flächen. Eine Möglichkeit, diesen Modulraum zu parametrisieren, geht der grundlegenden Idee nach auf Hilbert zurück und wird zu dessen Ehren auch Hilbert-Uniformisierung genannt. Der Ansatz lautet wie folgt: Man beginnt mit einer Dipolfunktion auf einer Kleinschen Fläche, das ist eine reellwertige harmonische Funktion, die in endlich vielen Punkten logarithmische beziehungsweise Dipolsingularitäten besitzt. Der Gradientenfluss dieser Funktion definiert einen Graphen auf der Fläche, dessen Komplement die disjunkte Vereinigung einfach zusammenhängender Gebiete ist. Auf diesem Komplement ist die Dipolfunktion Realteil einer holomorphen injektiven Funktion. Deren Bildgebiet ist die ganze komplexe Ebene ohne endlich viele Geraden der Form $\{z + t | z \in \mathbb{C}, t \in (-\infty, 0]\}$. Dieses Bildgebiet, zusammen mit sogenannten Verklebedaten, bestimmt die Ausgangsfläche und die Dipolfunktion eindeutig.
Carl-Friedrich Bödigheimer behandelte in seiner Schrift [Bö] aus dem Jahre 1990 den Fall orientierbarer (d.h. Riemannscher) Flächen und Dipolfunktionen mit genau einem Dipol als einziger Singularität. In dieser Arbeit wird es darum gehen, seine Resultate zu verallgemeinern. „Verallgemeinern“bedeutet hier: Wir wollen nichtorientierbare, also Kleinsche, Flächen studieren, und mehrere Richtungen sowie weitere Punktierungen zulassen. Dabei tauchen

an einigen Stellen erhebliche technische Schwierigkeiten auf.

1.Kapitel: Der erste Abschnitt enthält eine knappe Darstellung der Korrespondenz zwischen komplexen, fast-komplexen und konformen Strukturen auf orientierbaren Flächen. Etwas lax gesprochen ist eine fast-komplexe Struktur ein partieller Differentialoperator, nämlich der $\overline{\partial}$-Operator, während eine komplexe Struktur aus einer bestimmten Menge von Lösungen der Gleichungen $\overline{\partial}f = 0$ besteht (nämlich gerade ein holomorpher Atlas). Von diesem Standpunkt kann es also nicht verwundern, dass beim Studium der Modulräume Riemannscher (und auch Kleinscher Flächen) Methoden aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen benutzt werden müssen. Alle benötigten Ergebnisse sind mehr oder weniger Standardresultate: Die eindeutige Lösbarkeit des Dirichlet-Randwertproblems (für glatte Ränder), die Existenz einer Parametrix, die funktionalanalytischen Abbildungseigenschaften (auf den Sobolev-Räumen) und die lokalen Regularitätseigenschaften. Auch der Beweis des Integrabilitätssatzes geht natürlich nicht auf mich zurück, sondern auf [Tay].
Im zweiten Abschnitt werden dianalytische und fast-dianalytische Strukturen auf 2-Mannigfaltigkeiten definiert und die Resultate des ersten Abschnittes auf allgemeine nicht unbedingt orientierbare Flächen verallgemeinert.
Im dritten Abschnitt wird die Definition des Geschlechts und des Orientierungscharakters gegeben und ein wichtiges klassisches Resultat aus der Differentialtopologie zitiert, nämlich der Klassifikationssatz für geschlossene 2-Mannigfaltigkeiten. Zwei geschlossene Flächen sind genau dann diffeomorph, wenn ihre Geschlechter und ihre Orientierungscharaktere übereinstimmen.

Im vierten Abschnitt werden die Modulräume Kleinscher Flächen definiert, und zwar mit Hilfe der Theorie von Clifford J. Earle und James Eells. Earle und Eells haben im Jahre 1969 im Aufsatz [EaEe] die Ergebnisse der klassische Teichmüllertheorie in sehr eleganter Form zusammengefasst und das Ergebnis auch für nichtorientierbare Flächen verallgemeinert. Die Projektion vom Raum der fast-komplexen Strukturen auf einer differenzierbaren Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ auf den Teichmüllerraum ist ein universelles $Diff_0(F)$-Prinzipalbündel, der Teichmüllerraum ist eine $3c(g-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dieser Satz ist sehr tiefliegend, und sein Beweis erfordert alle Techniken der Teichmüllertheorie: Den Satz von Ahlfors-Bers über die Lösungen der Beltrami-Gleichung, Fuchssche Gruppen, quasikonforme Abbildungen, Teichmüller-Metriken, quadratische Differentiale und die Sätze von Teichmüller. Dementsprechend wird dieser Satz hier als black box verwendet. Der/die vorinformierte Leser/in, der in dieser Arbeit diese Begriffe

und Sätze vermißt, sei auf den zitierten Aufsatz von Earle und Eells verwiesen. Die Eleganz des Satzes von Earle und Eells liegt gerade darin, dass er die Ergebnisse der Theorie in einem einzigen, leicht fasslichen Satz zusammenfasst. Insofern ist dieser Satz eine sehr gute Ausgangsbasis für das Studium von Parametrisierungen des Modulraumes.
Der Rest des Abschnitts ist einer leichten, aber nicht völlig trivialen Folgerung aus dem Satz gewidmet: Auch die Projektion auf den Modulraum gerichteter und punktierter Flächen ist ein Prinzipalbündel einer Untergruppe der Diffeomorphismengruppe.

Im fünften Abschnitt wird das Faserbündel der Dipolfunktionen konstruiert. Es liegt auf der Hand, was eine Dipolfunktion auf einer mehrfach gerichteten und punktierten Kleinschen Fläche sein soll. Es ist, mit etwas Hilfsmitteln aus der Theorie des Laplaceoperatores auf geschlossenen Flächen, auch sehr leicht, die Existenz dieser Funktionen zu beweisen.
Doch dann beginnen die Schwierigkeiten. Im Falle einer einfachen Punktierung gibt es im Wesentlichen (bis auf Multiplikation mit einer positiven und Addition einer beliebigen reellen Konstante) genau eine Dipolfunktion. Davon kann im mehrfach gerichteten und punktierten Falle nicht die Rede sein; und im Allgemeinen werden verschiedene Funktionen sehr verschiedene kritische Graphen und also sehr verschiedene Parallelschlitzkonfigurationen ergeben. Es ist auch nicht möglich, diese Mehrdeutigkeiten durch „kanonische“Wahlen zu beseitigen. Man muss von vorneherein die Menge *aller* Dipolfunktionen in die Überlegungen miteinbeziehen. Daraus folgt sofort, dass man auch eine Topologie auf der Menge der Dipolfunktionen definieren muss. Diese Topologie soll zwei Eigenschaften erfüllen: Erstens soll die Menge aller Dipolfunktionen ein Faserbündel über dem Modulraum sein; und zweitens soll die Konvergenz in diesem Raum eine Interpretation als Konvergenz von Funktionen über einer Fläche besitzen, so dass einer konvergente Folge von Dipolfunktionen eine konvergente Folge von Parallelschlitzgebieten entspricht.
Dabei kann man wie folgt vorgehen: Die Faserbündelbeschreibung der Teichmüllertheorie ermöglicht es, Bündel von Sobolevräumen auf dem Modulraum zu definieren (mit der üblichen Konstruktion induzierter Vektorraumbündel). Der Laplaceoperator definiert einen normstetigen[1] Bündelhomomorphismus zwischen diesen Bündeln. Eine Dipolfunktion ist gerade ein reelles Element u in einem solchen Bündel, so dass Δu eine Summe aus Diracdistributionen und Richtungsableitungen ist. Dies erklärt übrigens schlagend, warum gera-

[1] $L_n, L : V \to W$ erfüllt $\|L_n - L\| \to 0$. Dies ist, falls V unendlichdimensional ist, zu unterscheiden von der schwachen Konvergenz: Für alle $v \in V$ gilt: $L_n v \to Lv$.

de Dipolfunktionen zu einer Parametrisierung des Modulraumes punktierter und gerichteter Flächen mit Erfolg verwendet werden können. Der Nachteil dieser Definition von Dipolfunktionen liegt darin, dass die Äquivalenz mit der naiven Definition bewiesen werden muß, wofür wieder einige Standardresultate über elliptische Differentialoperatoren benutzt werden. Der große Vorteil ist, dass die Dipolfunktionen nun Elemente eines *Hilbert*raumes sind. Ohne große Schwierigkeiten (abgesehen von der Hilbertraumtheorie) kann man jetzt zeigen, dass die Menge der Dipolfunktionen eine faserweise konvexe offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Vektorraumbündels ist.
Die nächste Schwierigkeit liegt darin, dass Dipolfunktionen a priori nur im Sobolevraum $W^{2,-1}$ liegen. Dementsprechend ist eine im Raum der Dipolfunktionen konvergente Folge a priori auch nur in diesem Sobolev-Raum konvergent; und dieser Konvergenzbegriff ist schwächer als L^2-Konvergenz und um 5 Differenzierbarkeitsordnungen schwächer als die C^2-Konvergenz. Im Beweis der Stetigkeit der Hilbertuniformisierung ist jedoch lokal-gleichmäßige C^2-Konvergenz die Minimalvoraussetzung. Man muss also einen Konvergenz-Verbesserungs-Satz beweisen, was im sechsten Abschnitt erfolgt.
Die bekannten *automatischen* Konvergenzverbesserungen für harmonische Funktionen gelten in diesem Fall nicht, denn die zugrundeliegende komplexe Struktur ist nicht konstant. Die naheliegenden Methoden für den Beweis eines Konvergenz-Verbesserungssatzes versagen in dem Falle, wenn die zugrunde liegenden komplexen Strukturen variieren (wenn die komplexe Struktur gleich bleibt, ist die Konvergenz höherer Ordnung sehr leicht zu sehen, denn in endlichdimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent). Auch die Möglichkeiten, wie in der klassischen Funktionentheorie mittels Kurvenintegralen die lokal-gleichmäßige Konvergenz aller Ableitungen zu etablieren, versagen, weil für negative Sobolev-indices die Einschränkung auf (niederdimensionale) Untermannigfaltigkeiten nicht wohldefiniert ist. Eine Möglichkeit, a priori die Dipolfunktionen in einem Raum mit besseren Differenzierbarkeitseigenschaften anzusiedeln, ist ebenfalls nicht absehbar. Auch lässt sich das simple Argument, dass auf endlich-dimensionalen Vektorräumen alle Normen äquivalent sind, keineswegs unmittelbar auf Vektorbündel übertragen. Dafür muss erst bekannt sein, dass beide Normen tatsächlich Bündelmetriken definieren, d.h. stetig sind.
Diese Schwierigkeit wird im Satz 1.5.5 gelöst; der Beweis ist aber sehr technisch geraten. Dieser Satz wird im dritten Kapitel den Beweis ermöglichen, dass die Hilbert-Uniformisierung stetig ist.

2.Kapitel Der erste Abschnitt enthält die passenden Definitionen für Parallelschlitzkonfigurationen auf mehreren Ebenen. Im zweiten und dritten Ab-

schnitt wird geklärt, welche Parallelschlitzkonfigurationen tatsächlich zusammenhängende Kleinsche Flächen ergeben. Die Antwort, wann die Fläche zusammenhängend ist, ist einigermaßen trivial, und die Antwort auf die zweite Frage wurde im wesentlichen schon in [Bö] beantwortet.
Auch die Frage, wann eine Parallelschlitzkonfiguration eine orientierbare Fläche ergibt, ist leicht zu beantworten. Im dritten Abschnitt wird ein Kriterium dafür angegeben. Die Frage aber, ob durch Hinzufügen endlich vieler Punkte eine kompakte Kleinsche Fläche erhalten werden kann, verdient eine sorgfältigere Betrachtung. In dem Fall, der in [Bö] studiert wird, ist diese Frage belanglos, weil sehr einfach zu beantworten. Es lassen sich immer holomorphe Karten angeben, die eine Umgebung des hypothetischen unendlich fernen Punktes auf eine punktierte Kreisscheibe abbilden. Dabei benutzt man die einfache Funktion $z \mapsto 1/z$. Im Falle mehrerer Ebenen oder im Falle zusätzlicher logarithmischer Singularitäten ist diese Frage nicht so leicht zu beantworten, weil eine derart einfache Abbildung, die das Problem löst, von mir nicht explizit gefunden worden ist[2]. Man stößt, mit anderen Worten, auf die Frage der Kompaktifizierbarkeit der Flächen, die aus Parallelschlitzkonfigurationen entstehen. Diese Frage wird im vierten Abschnitt behandelt. Die Tatsache, dass Kompaktifizierbarkeit eine nicht-triviale Eigenschaft einer offenen dianalytischen Fläche ist (d.h. es gibt sehr viele nicht-kompaktifizierbare Flächen), möge den von mir betriebenen Aufwand rechtfertigen. Satz 2.4.3 gibt eine positive Antwort.
Im fünften Abschnitt werden die topologischen Invarianten der kompakten Realisierung einer Parallelschlitzkonfiguration „berechnet“, was die Definition der Verklebeabbildung vom Raum der Parallelschlitzkonfigurationen in das Bündel der Dipolfunktionen ermöglicht.
Im sechsten Abschnitt werden die Symmetrien der Verklebeabbildung diskutiert. Das bedeutet: die Gruppe $Sim := \{z \mapsto az + b | z \in \mathbb{C}, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ operiert sowohl auf der Menge der Parallelschlitzkonfigurationen wie auch auf der Menge der Dipolfunktionen; und die Verklebeabbildung ist Sim-äquivariant.
Ferner operiert die Gruppe $\mathbb{R}^m$ auf der Menge der Parallelschlitzkonfigurationen auf m Ebenen durch Translation um imaginäre Zahlen (auf jeder Ebene separat); und die Verklebeabbildung ist $\mathbb{R}^m$-invariant.
Außerdem können Parallelschlitzkonfigurationen auf jeder Ebene konjugiert werden, ohne dass die kompakte Realsierung verändert.
Zuletzt müssen noch die sogenannten Rauzy-Sprünge betrachtet werden. Dies ist die subtilste dieser Äquivalenzrelationen. Ein *Parallelschlitzgebiet* ist eine

[2] Auch in dem Buch [Kob], in dem sehr viele konforme Abbildungen zwischen verschiedenen Gebieten explizit angegeben werden, findet sich keine solche.

Äquivalenzklasse von Parallelschlitzkonfigurationen modulo Rauzy-Sprünge, Translationen und Konjugationen auf einer Ebene.
Im siebenten Abschnitt wird der Raum der Parallelschlitzgebiete mit einer Topologie ausgestattet.
Im achten Abschnitt wird eine andere Beschreibung des Raumes der Parallelschlitzgebiete gegeben. Die ganze geometrische Information, die eine (reguläre) Parallelschlitzkonfiguration enthält, besteht aus einer Aufteilung der komplexen Ebene in Streifen, welche parallel zur reellen Achse sind, aus einer Aufteilung der komplexen Ebene in Streifen, die parallel zur imaginären Achse sind und aus den Verklebevorschriften, mit denen diese Streifen an ihren Rändern verklebt werden. Das führt zum Begriff der reduzierten Parallelschlitzkonfiguration. Rauzy-äquivalente Konfigurationen führen zu derselben reduzierten Konfiguration, wie leicht zu erkennen ist. Die Umkehrung ist ebenfalls wahr: Wenn zwei Parallelschlitzkonfigurationen auf dieselbe reduzierte Parallelschlitzkonfiguration führen, so sind sie Rauzy-äquivalent. Ferner läßt sich zu jeder reduzierten Konfiguration eine Parallelschlitzkonfiguration finden, deren Reduktion gerade die Ausgangskonfiguration ist. Das ist der Inhalt von Satz 2.8.5, in dem ein expliziter Algorithmus angegeben wird. Worin besteht der Vorteil dieser Konstruktion? Die Geometrie der kritischen Graphen und die Kombinatorik der Verklebevorschriften sind zwei voneinander verschiedene Sachverhalte; und es gelingt damit, sie in der Darstellung auseinanderzuhalten. Die Konstruktion der Hilbert-Uniformisierung wird dadurch erheblich vereinfacht.
Der letzte Abschnitt des Kapitels beschäftigt sich mit der Frage, ob der Raum der Parallelschlitzgebiete eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Im dritten Kapitels zeigt sich, dass dies äquivalent zu der Stetigkeit der Verklebeabbildung ist. Leider scheint der direkte Nachweis, dass der Raum der Parallelschlitzgebiete eine Mannigfaltigkeit ist, recht umständlich zu sein, so dass er in dieser Arbeit nicht gegeben werden kann. Noch langwieriger würde der direkte Beweis sein, dass die Verklebeabbildung stetig ist. Daher wird dieses Resultat hier als Hypothese stehen gelassen. Sollte sich diese Hypothese als falsch erweisen, wird in dieser Arbeit immerhin bewiesen, dass die Hilbert-Uniformisierung eine stetige bijektive Abbildung vom Bündel der Dipolfunktionen in den Raum der Parallelschlitzgebiete ist.

3.Kapitel Die Ausführungen über die Abbildungsfunktion enthalten nichts Neues außer der (trivialen) Anpassung an den allgemeineren Fall. Der erste Abschnitt ist dementsprechend knapp gehalten.
Im zweiten Abschnitt gelingt die Konstruktion der Hilbert-Uniformisierung mit dem Begriff der reduzierten Parallelschlitzkonfiguration sehr transparent.

Das ist wenig erstaunlich: Ist ein Objekt erst einmal eindeutig bestimmt, so ist zu erwarten, dass seine Konstruktion leichter gelingt als wenn es mehrere Wahlen gibt. Der Beweis, dass die Hilbert-Uniformisierung und die im 2.Kapitel definierte Verklebeabbildung zueinander invers sind, ist nahezu trivial. Er erfolgt durch „scharfes Hinsehen“auf die Definitionen. Dass noch einige elementare Eigenschaften holomorpher Abbildung benötigt werden, liegt in der Natur der Sache.
Ziel der Arbeit ist es, zu beweisen, dass die Hilbert-Uniformisierung ein Homöomorphismus ist. Das Prozedere ist das Folgende: Beide beteiligten Räume sind topologische Mannigfaltigkeiten. Für den Raum der Dipolfunktionen ist das nach Konstruktion (und nach dem Satz von Earle und Eells) klar. Für den Raum der reduzierten Parallelschlitzkonfiguration ist das die unbewiesene Hypothese. Da beide Mannigfaltigkeiten dieselbe Dimension haben (die Dimension des Raumes der Parallelschlitzgebiete ist sehr leicht zu bestimmen) und beide Abbildungen zueinander invers sind, genügt es, die Stetigkeit einer der beiden Abbildungen nachzuweisen und einen klassischen Satz von Brouwer aus der algebraischen Topologie zu zitieren.
Ich habe den Weg gewählt, die Stetigkeit der Hilbert-Uniformisierung nachzuweisen. Dies geschieht im letzten Abschnitt dieser Arbeit. Im Wesentlichen muss man die Abhängigkeit der kritischen Punkte, des kritischen Graphen und der Abbildungsfunktion von der Wahl der Dipolfunktion unter Kontrolle halten. Es zeigt sich, dass der Konvergenzsatz 1.5.5, der die lokalgleichmäßige Konvergenz aller Ableitungen der Dipolfunktionen garantiert, zusammen mit einfachen Eigenschaften gewöhnlicher parameterabhängiger Differentialgleichungen und zusammen mit den erheblichen Restriktionen, die die Eigenschaft, eine Dipolfunktion zu sein, genügt, um einen relativ einfachen und übersichtlichen Beweis zu führen. Die „crucial property“ist die Negativität der lokalen Indices des Gradientenvektorfeldes an jeder Nullstelle. Der Satz von POINCARE-HOPF impliziert dann sofort, dass es eine obere Schranke für die Anzahl der kritischen Punkte gibt. Das ist alles, was für den Beweis der Stetigkeit benutzt wird, der Rest ist „abstract nonsense“. Die Schiffer-Variationen, die von [Bö] in der analogen Situation verwendet wurden, werden in dem hier eingeschlagenen Weg durch die beiden Konvergenzsätze und das Nullstellen zählende Integral aus der elementaren Funktionentheorie ersetzt.
Für den Beweis der anderen Richtung liegt kein unmittelbarer Ansatzpunkt vor; quasikonforme Abbildungen würden sich anbieten. Die Schwierigkeiten, diese auf den gerichteten Fall zu übertragen und mit ihnen die Topologie des Modulraumes zu beschreiben, sind von Susanne Dahlmann in ihrer Diplomarbeit [Da] erläutert und gelöst worden, aber der mehrfach gerichtete Fall würde wohl weitere Schwierigkeiten beinhalten (wegen der Nicht-Eindeutigkeit der

Dipolfunktionen). Wie die Konvergenz von Dipolfunktionen in einem solchen setting zu behandeln wäre, ist nicht klar. Die Schwierigkeit ist die folgende: Es sei eine konvergente Folge von Parallelschlitzkonfigurationen gegeben. Zu zeigen ist die Konvergenz der Bildfolge unter der Verklebeabbildung. Aber die Bildfolge besteht aus Funktionen auf paarweise verschiedenen Definitionsbereichen. Eine Verbindung zwischen diesen Definitionsbereichen wird aber erst durch den Klassifikationssatz für Flächen gegeben, wir haben also im wesentlichen nur eine Existenzaussage zur Hand. Vor dem Hintergrund dieser Überlegung scheint der Beweis dieser Richtung wesentlich „natürlicher“zu sein als der Beweis der anderen Richtung. Und zumindest subjektiv, aber das ist Geschmacksache, ist dieser Weg wesentlich einfacher.

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Professor Bödigheimer für den interessanten Themenvorschlag und die vielen Hinweise zu dieser Arbeit bedanken. Zweitens danke ich meinen Eltern dafür, dass sie mir mein langes Studium ermöglicht haben. Für die drucktechnische Hilfe danke ich Frau Christiane Kühn.

Kapitel 1

Der Modulraum mehrfach punktierter und gerichteter Kleinscher Flächen

1.1 komplexe und fast-komplexe Strukturen. Das Wunder der Dimension Zwei

1.1.1 Definition:

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine fast-komplexe Struktur *J auf M ist ein glatter Schnitt $J \in \Gamma(M, End(TM))$ mit $J^2 = -id$.*
$(M; J)$ heißt dann eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit.
Sind (M, J) und (N, K) fast-komplexe Mannigfaltigkeiten, sowie $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, so heißt f holomorph bezüglich J und K *falls $Tf \circ J = K \circ Tf$.*

Bemerkung: Es gilt dann immer: $\dim M$ ist gerade und M ist orientierbar. Falls M einen holomorphen Atlas, also eine komplexe Struktur, besitzt, so definiert man eine fast-komplexe Struktur J wie folgt: Sei $\phi : U \to \mathbb{C}^n$ eine Karte. Setze $J|_U = T\phi^{-1} \circ i \circ T\phi$, wobei i die Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$ ist.

1.1.2 Definition:

Eine fast-komplexe Struktur heißt integrabel*, falls es eine komplexe Struktur auf M gibt, so dass J in der angegebenen Weise entsteht.*

Das komplexifizierte Bündel $TM \otimes \mathbb{C}$ zerfällt in die Eigenbündel zu den Eigenwerten i und $-i$ von J. Es bezeichne $T^{0,1}M := Eig(J; -i)$ und $T^{1,0}M := Eig(J; i)$. Auch die äußeren Formenbündel zerfallen dadurch: $\Lambda^{p,q}TM := \{\omega \in \Lambda^{p+q}TM \otimes \mathbb{C} | \omega(X_1, \ldots X_r, Y_1, \ldots Y_{q+p-r}) = 0$, falls $X_i \in T^{1,0}, Y_i \in T^{0,1}; r \neq p\}$.

Setze $\partial : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p+1,q}; \omega \mapsto pr^{p+1,q} d\omega$ und $\overline{\partial} : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q+1}; \omega \mapsto pr^{p,q+1} d\omega$.
Man beachte $d = \partial + \overline{\partial}$, falls J integrabel ist. Die Umkehrung gilt ebenfalls. Ist eine fast-komplexe Struktur gegeben mit $d = \partial + \overline{\partial}$, so ist die Struktur integrabel. Dies ist der Satz von NEWLANDER-NIRENBERG. Wir skizzieren einen Beweis im Fall $dimM = 2$, was von nun an immer vorausgesetzt sei. Ein allgemeiner Beweis findet sich in [Hör]. Die Bedingung $d = \partial + \overline{\partial}$ ist in der Dimension 2 immer erfüllt, in höheren Dimension ist dies eine nichttriviale Differentialgleichung für die fast-komplexe Struktur. Wir wählen eine Orientierung und wollen nur fast-komplexe Strukturen, die mit der Orientierung kompatibel sind, akzeptieren. Das bedeutet, dass für einen (und dann jeden) Tangentialvektor $v \neq 0$ gilt: $(v; J(v))$ ist positiv orientiert.

1.1.3 Definition:

Eine Riemannsche Metrik g auf TM heißt J-konform, *falls J g-orthogonal ist.*
Ein (lokaler) Diffeomorphismus heißt konform, *falls das Differential an jedem Punkt konform (d.h: ein positives Vielfaches einer Isometrie) ist.*

Ist g' eine beliebige Riemannsche Metrik, so ist $g(X; Y) := g'(JX, JY) + g'(X, Y)$ eine J-konforme Metrik.
Ist eine Riemannsche Metrik und eine Orientierung gegeben, so verfügen wir über die Volumenform vol_g und den Hodge-Stern $*$. Konforme Abbildungen sind durch die Bedingung $f^* \circ * = + \circ f^*$ charakterisiert. hierbei sei f^* die Aktion von f auf 1-Formen. Ist g eine J-konforme Metrik, so besteht der folgende enge Zusammenhang:

1.1.4 Lemma:

$* = -J'$ auf 1-Formen,$*(1) = vol_g; 1 = *(vol_g)$.

Beweis: Die beiden letzten Gleichungen sind allgemeingültig; die fast-komplexe Struktur geht gar nicht in sie ein. Sei X ein Tangentialvektor mit $|X| =$

1. Dann ist (X, JX) eine positiv orientierte ONB. Seien ω, η reelle Einsformen. Dann gilt: $(-\omega \wedge J'\eta)(X, JX) = -\omega(X)\eta(JJX) + \omega(JX)\eta(JX) = \langle \omega, \eta \rangle vol_g(X; JX)$. Die erste Gleichung ist die Definition des Dachproduktes, die zweite die Definition des Skalarproduktes von 1-Formen. Hieraus folgt $* = -J$ nach Definition des Sternoperators[1]. Diese Relation bleibt durch die Komplexifizierung erhalten. $\square$.

1.1.5 Korollar:

Sei $f : (F, J) \to (G, K)$ ein Diffeomorphismus zwischen Flächen mit fast-komplexen Strukturen. Dann ist f genau dann holomorph bezüglich J und K, wenn f konform und orientierungserhaltend ist.
Es gilt: $\Delta = - * 2i\bar{\partial}\partial$.

Beweis: Wähle lokal Orientierungen. f holomorph $\Leftrightarrow Tf \circ J = J \circ Tf \Leftrightarrow f^* \circ * = * \circ f^*$ auf 1-Formen $\Leftrightarrow f$ konform.
Auf Funktionen gilt: $d * d = d * (\partial + \bar{\partial}) = d(-i\partial + i\bar{\partial}) = -2i\bar{\partial}\partial$ $\square$.

Ferner gilt: Ist g eine konforme Metrik bezüglich einer fast-komplexen Struktur, und μ eine positive Funktion, so ist μg ebenfalls eine konforme Metrik und für die Laplaceoperatoren gilt: $\Delta_{\mu g} = \mu \Delta_g$. Also: Der Begriff der harmonischen Funktion auf einer Fläche mit einer fast-komplexen Struktur ist unabhängig von der Metrik definierbar. Wie in der elementaren Funktionentheorie einer komplexen veränderlichen beweist man: Gilt $H^1_{dR}(M) = 0$, so ist jede reelle harmonische Funktion der Realteil einer J-holomorphen Funktion.

Dies impliziert:

1.1.6 Satz:

Auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist jede fast-komplexe Struktur integrabel.

Beweis: Es handelt sich um ein lokales Problem: Wir müssen für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung U und einen J-holomorphen Diffeomorphismus $\Phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{C}$ finden. Wähle nun U so, dass U einfach zusammenhängend ist, $\overline{U}$ in einer reellen Karte enthalten ist und der Rand von U glatt ist. Dann ist für jeden Randwert auf ∂U das Dirichlet-Randwertproblem lösbar. Man kann nun zeigen, dass es eine Randfunktion gibt, so dass das

[1] siehe [Jä]

Differential der Lösung im Punkt p von Null verschieden ist[2]. Damit haben wir eine J-holomorphe Funktion, die auf einer geeigneten kleineren offenen Teilmenge von U eine Karte definiert, gefunden. $\square$.

Wir haben also das Studium komplexer Strukturen auf das Studium fast-komplexer Strukturen reduziert, und alle wesentliche Information über diese ist in dem Wirtinger-Operator $\overline{\partial}$ enthalten.
Sei nun $\mathcal{S}(M)$ die Menge aller fast-komplexen Strukturen auf M, welche mit der Orientierung auf M kompatibel sind. Wir definieren jetzt eine Topologie auf dieser Menge. Die Menge aller glatten Schnitte, $\Gamma(End(TM))$, trägt eine Topologie eines Frechet-Raumes, nämlich die $C^\infty-$Topologie. Die Menge $\mathcal{S}(M)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge darin.

1.2 Dianalytische und fast-dianalytische Strukturen

Es sei im Folgenden F immer eine 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

1.2.1 Definition:

Seien U und V offene Teilmengen der komplexen Ebene. Ein Diffeomorphismus $f : U \to V$ heißt dianalytisch, *wenn f entweder holomorph oder antiholomorph ist. die Verknüpfung zweier dianalytischer Diffeomorphismen ist offenbar wieder ein dianalytischer Diffeomorphismus[3].*
Es sei F eine zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein dianalytischer Atlas *für F besteht aus einer offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von F und differenzierbaren Karten $f_i : U_i \to f_i(U_i) \subset \mathbb{C}$, die untereinander dianalytisch verträglich sind. Eine* dianalytische Struktur *auf F ist ein maximaler dianalytischer Atlas. F, versehen mit einer dianalytischen Struktur, heißt* Kleinsche Fläche.
Seien F und G Kleinsche Flächen. Eine differenzierbare Abbildung: $f : f \to$

[2]siehe [Tay], S: 378. Das ist der einzige schwierige Teil des Beweises.

[3]Eine alternative Charakterisierung ist die folgende. Ein Diffeomorphismus ist genau dann dianalytisch, wenn sein Differential an jedem Punkt zu der zweidimensionalen Liegruppe

$$Gl^{\pm}(\mathbb{C}) := \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \}$$

gehört.

G heißt dianalytisch *(oder* konform), *falls für jedes Paar von Karten $\phi : U \to \mathbb{C}$ für F und $\psi : V \to \mathbb{C}$ für G gilt: $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ ist dianalytisch.*

Eine gewisse Vorsicht ist an dieser Stelle angebracht: die Menge aller dianalytischen Funktionen $f : F \to \mathbb{C}$ ist *kein* Vektorraum. Das ist der Grund dafür, dass dieser Funktionen im Weiteren keine Rolle spielen wird. Sei F eine Kleinsche Fläche. Falls F orientierbar ist, so induziert die dianalytische Struktur zwei verschiedene, zueinander konjugierte komplexe Strukturen auf der Fläche. Wählt man eine der beiden Orientierungen aus, so gibt es unter diesen beiden komplexen Strukturen eine bevorzugte, nämlich diejenige, bei der die durch die komplexe Struktur induzierte Orientierung[4] mit der topologischen übereinstimmt.

1.2.2 Definition:

Sei F eine 2-Mannigfaltigkeit. $\mathcal{U}$ sei die Menge aller offenen Mengen von F, über denen F orientierbar ist. Eine fast-dianalytische Struktur *auf F besteht aus folgenden Daten: 1. Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ existieren zwei glatte Bündelabbildungen $J_U, K_U \in End_{\mathbb{C}}(TF|_U)$*
2. J_U, K_U sind zueinander konjugierte fast-komplexe Strukturen, das bedeutet: $J_U = -K_U$.
3. Diese Abbildungen müssen kompatibel sein - auf den Durchschnitten $U \cap V$ muss genau eine der folgenden beiden Alternativen gelten: $J_U|_{U\cap V} = K_V|_{U\cap V}$ und $J_V|_{U\cap V} = K_U|_{U\cap V}$ oder aber: $J_V|_{U\cap V} = J_U|_{U\cap V}$ und $K_V|_{U\cap V} = K_U|_{U\cap V}$.

Man beachte, dass J und K erst nach Wahl einer Orientierung auf U global definierbar sind. Es sind dann zwei fast-komplexe Strukturen. Evident ist, dass jede dianalytische Struktur auf F eine fast-dianalytische Struktur bestimmt. Die Wahl einer Orientierung auf einer Menge $U \in \mathcal{U}$ und die Wahl einer dianalytischen Struktur auf F bestimmt eine fast-komplexe Struktur auf U. Diese ist eindeutig bis auf ein Vorzeichen und induziert daher eine fast-dianalytische Struktur.
Wir nennen eine fast-dianalytische Struktur *integrabel*, falls sie von einer dianalytischen Struktur induziert wird. Es gilt wieder, dass (in der Dimension Zwei) jede fast-dianalytische Struktur integrabel ist. Das ist eine unmittelbar zu erhaltende Verallgemeinerung von Satz 1.1.6.

[4] Im Falle der reellen Dimension zwei bedeutet das: Die von der fast-komplexen Struktur induzierte Orientierung ist diejenige Äquivalenzklasse von gleichorientierten Basen, die durch (v;J(v)) gegeben ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl eines von Null verschiedenen Vektors v.

1.2.3 Satz:

Jede fast-dianalytische Struktur auf einer 2-Mannigfaltigkeit ist integrabel.

Beweis: Sei $\{J_U; K_U\}$ eine fast-dianalytische Struktur. Wähle für jedes U eine Orientierung und also eine fast-komplexe Struktur. Wir erhalten also auf jeder Menge U eine komplexe Struktur. Diese ist eindeutig bis auf Konjugation. Das Ergebnis ist eine globale dianalytische Struktur. Es folgt nun der Satz. $\square$.

Eine äquivalente Charakterisierung fast-dianalytischer Strukturen ist die folgende. Eine fast-dianalytische Struktur ist eine Reduktion der Strukturgruppe des Tangentialbündels TF auf die Gruppe $Gl^{\pm}(\mathbb{C})$. Der Satz besagt, dass jede solche Reduktion der Strukturgruppe durch Auswahl eines dianalytischen Atlas realisiert werden kann.
Ist eine konforme Metrik zu einer fast-dianalytischen Struktur gegeben (dieser Begriff ist offensichtlich unabhängig davon, ob die Fläche orientierbar ist oder nicht), so können wir lokal Orientierungen wählen und erhalten lokal Sternoperatoren und können zunächst lokal Laplaceoperatoren definieren: $\Delta = *d * d$. Weil der Hodge-Stern bei Vertauschen der Orientierung sein Vorzeichen wechselt, und weil der Stern genau zweimal in der Definition des Laplaceoperators steht, ist der Laplaceoperator *unabhängig von der Wahl der Orientierung*, obwohl die Orientierung in die Definition eingeht. Es gibt also auch auf dianalytischen Flächen einen wohldefinierten Begriff harmonischer Funktionen; und der Satz **??** bleibt ebenso richtig wie die Aussage: Ist F eine einfach zusammenhängende dianalytische Fläche[5], dann ist jede harmonische Funktion Realteil einer holomorphen Funktion.
Wir können dianalytische Strukturen mit konformen Strukturen identifizieren. Ist nämlich J eine fast-komplexe Struktur und h eine beliebige Riemannsche Metrik, so ist $h^J(X,Y) := h(JX, JY)$ eine konforme Metrik. Eine leichte Rechnung zeigt, dass für Diffeomorphismen f gilt: $(f^*h)^J = (f^*(h^J)$. Das Zurückziehen von dianalytischen Strukturen ist also dasselbe wie das Zurückziehen der zugehörigen konformen Strukturen. Damit ist die Identifikation dieser Strukturen perfekt; im Folgenden werden wir die Begriffe „konform“und „dianalytisch“synonym gebrauchen.
Ein Ergebnis der vorangegangenen Diskussion ist das

[5]Dann ist F orientierbar. Im nichtorientierbaren Fall ist die Bedingung $H^1(M;\mathbb{C}) = 0$ *nicht* hinreichend dafür, dass F einfach zusammenhängend ist, wie man etwa an $\mathbb{RP}^2$ erkennen kann.

1.2.4 Korollar:

Auf jeder zweidimensionalen parakompakten[6] *Mannigfaltigkeit existiert eine dianalytische Struktur. Falls die Mannigfaltigkeit orientierbar ist, existiert sogar eine komplexe Struktur.* $\square$.

1.3 Zur Differentialtopologie geschlossener Flächen

1.3.1 Definition:

Der Orientierungscharakter *einer kompakten zusammenhängenden Fläche F ist definiert als*

$$c(F) := \begin{cases} 2 & \textit{, falls } F \textit{ orientierbar ist,} \\ 1 & \textit{, falls } F \textit{ nicht orientierbar ist.} \end{cases} \tag{1.1}$$

1.3.2 Definition:

Das Geschlecht *einer kompakten zusammenhängenden Fläche F ist definiert als*

$$g(F) := \begin{cases} \frac{1}{2} dim_{\mathbb{R}} H^1(F; \mathbb{R}) & \textit{, falls } F \textit{ orientierbar ist,} \\ g(\tilde{F}) & \textit{, falls } F \textit{ nicht orientierbar ist.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Hierbei ist $\tilde{F}$ die Orientierungsüberlagerung von F.

Bemerkung zur Definition: Die Definition des Geschlechts einer nicht-orientierbaren Fläche ist in der Literatur nicht einheitlich. So unterscheidet sich unsere Definition von der in [Hir]. Dies sollte beim übernächsten Satz beachtet werden.

1.3.3 Theorem:

Das Geschlecht ist immer eine ganze Zahl.

[6] Das impliziert die Existenz einer Riemannschen Metrik

Beweis: Obwohl das ein klassischer Satz ist, findet sich der folgende kurze Beweis nicht in der Literatur. Sei M orientierbar. Nach [BT], S. 44, gibt es eine *nichtdegenerierte* Paarung $H^1(M;\mathbb{R}) \times H^1(M;\mathbb{R})$ (Poincare-Dualität in der deRham-Kohomologie). Diese ist gegeben durch die Formel $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha \cup \beta; [M] \rangle$ ($[M]$ sei die Fundamentalklasse, $\langle\ ,\ \rangle$ das Kroneckerprodukt). Wegen der Antikommutativität des Cup-Produktes ist diese Form *schiefsymmetrisch*. Deshalb muß die Dimension gerade sein. $\square$.

1.3.4 Theorem:

1. Zu jedem Geschlecht $g \geq 0$ existieren nichtorienierbare und orientierbare Flächen.
Geschlecht und Orientierungscharakter sind die einzigen topologischen Invarianten kompakter, nicht berandeter, zusammenhängender differenzierbarer 2-Mannigfaltigkeiten. Das heißt: Sind zwei zusammenhängende geschlossene glatte 2-Mannigfaltigkeiten M und N gegeben, die dasselbe Geschlecht und denselben Orientierungscharakter haben, so gibt es einen Diffeomorphismus dieser Flächen.
2. Ferner gilt: sind $q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_k$ paarweise verschiedene Punkte auf M und $\xi_i \in T_{q_i}M \setminus 0, i \in \underline{m}$ Tangentialvektoren an M; sowie $q'_1, \dots, q'_m, p'_1, \dots, p'_k$ paarweise verschiedene Punkte auf N und $\xi'_i \in T_{q'_i}N \setminus 0, i \in \underline{m}$ Tangentialvektoren an N, so kann der Diffeomorphismus $f : M \to N$ so gewählt werden, dass $f(p_i) = p'_i$ und $Tf(\xi_i) = \xi'_i$.
3. Jede Fläche besitzt eine Spiegelung, das heißt, zu jedem Punkt $p \in F$ gibt es einen involutiven Diffeomorphismus f von F mit $f(p) = p$ und $detT_pf < 0$.

Beweis: siehe[Hir], Kapitel 9, für den ersten Teil.
Der zweite Teil wird bewiesen, indem man erst durch einen beliebigen Diffeomorphismus $M = N$ erreicht und dann geschickt Vektorfelder wählt, deren Fluss zum Zeitpunkt 1 gerade die gewünschte Permutation der Punkte und Tangentialvektoren realisiert.
Zum dritten Teil: Ist F orientierbar, so gibt es eine Einbettung $j : F \to \mathbb{R}^3$, so dass $j(F)$ invariant bezüglich der beiden linearen Abbildungen

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; T = -id$$

des $\mathbb{R}^3$ ist und nicht den Nullpunkt enthält. S und T kommutieren, also liefert S eine Spiegelung der orientierbaren Fläche $j(F)$ und eine Spiegelung der nicht orientierbaren Fläche $j(F)/\langle T \rangle$. $\square$.

1.4 Modulräume Kleinscher Flächen. Die Faserbündelbeschreibung der Teichmüllertheorie

Es sei F eine kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Definition: Die Gruppe $Gl_2(\mathbb{R})$ operiert auf der Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$Gl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,$$

$$(A, z) \mapsto \frac{Az}{|Az|}.$$

Bilde das Faserbündel

$$\mathbb{S}(F) := Gl(F) \times_{Gl_2(\mathbb{R})} \mathbb{S}^1.$$

$\mathbb{S}(F)$ heißt *Richtungsbündel* von F. Ein Diffeomorphismus $f : F \to F$ induziert einen fasertreuen Diffeomorphismus $\mathbb{S}(f) : \mathbb{S}(F) \to \mathbb{S}(F)$.

Die $Gl_2(\mathbb{R})$-äquivariante Projektion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1$ induziert eine Projektion $TF \setminus 0 \to \mathbb{S}(F)$, wobei 0 der Nullschnitt im Tangentialbündel ist.

Eine andere Darstellung ist $\mathbb{S}(F) := TF \setminus 0 / \mathbb{R}^+$.

Notation: Sei F eine geschlossene zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit. $m, k \in \mathbb{N}$ seien fest gewählt. $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m \in F$ seien paarweise verschiedene Punkte auf der Fläche, $\xi_i \in \mathbb{S}_{q_i}(F)$, $i = 1, \ldots, m$ Richtungen an m dieser Punkte. Im Tangentialraum T_{q_1} sei ein für allemal eine Orientierung festgelegt. Falls F orientierbar, so sei diese Orientierung identisch mit der globalen gewählten Orientierung. Aus Gründen der einfachen Notation sei

$$P := (p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m); \Xi := (\xi_1, \ldots, \xi_m).$$

Es bezeichne $\mathrm{Diff}(F)$ die volle Diffeomorphismengruppe, falls $c(F) = 1$ und die Untergruppe derjenigen Diffeomorphismen, die an einem (und dann jedem) Punkt orientierungserhaltend sind, falls $c(F) = 2$. Ferner seien folgende Untergruppen von $\mathrm{Diff}(F)$ ausgezeichnet:

$$\mathrm{Diff}_0(F) := \{f \in \mathrm{Diff(F)} | f \sim \mathrm{id}_F\}$$

$$\mathrm{Diff}(F;P) := \{f \in \mathrm{Diff(F)} \| f(p_i) = p_j, i,j \in \underline{k}\}$$

Beachte, dass eine Permutation der Punkte zugelassen wird.

$$\mathrm{Diff}_0(F;P) := \{f \in \mathrm{Diff}(F;P) \| f \sim \mathrm{id}_F \text{ rel } \{p_1,\ldots,p_k\}\}$$

Hierbei bleiben die Punkte natürlich fest.

$$\mathrm{Diff}(F;P;\Xi) := \{f \in \mathrm{Diff}(F;P) | \mathbb{S}(f)(\xi_j) = \xi_j; f \text{ orientierungserhaltend bei } q_1\}$$

Diese Gruppe wiederum lässt die Punkte $p_1 \ldots p_l$ alle fest.

$$\mathrm{Diff}_0(F;P;\Xi) := \{f \in \mathrm{Diff}(F;P;\Xi) | f \sim \mathrm{id}_F \text{ rel } \{p_1,\ldots,p_k;\xi_1,\ldots,\xi_l\}\}$$

Das ist so zu verstehen, dass f mit der Identität durch eine Isotopie verbunden ist, so dass jede Abbildung der Isotopie die Richtungen erhält. $\sim$ bedeute immer Isotopie von Diffeomorphismen. Die *Abbildungsklassengruppen* seien wie folgt definert:

$$\Gamma(F) := \mathrm{Diff(F)} \big/ \mathrm{Diff}_0(F)$$

$$\Gamma(F;P) := \mathrm{Diff}(F;P) \big/ \mathrm{Diff}_0(F;P)$$

$$\Gamma(F;P;\Xi) := \mathrm{Diff}(F;P;\Xi) \big/ \mathrm{Diff}_0(F;P;\Xi)$$

Die Abbildungsklassengruppen sind nach Definition diskrete Gruppen. Es bezeichne nun $\mathcal{S}(F)$ die Menge aller dianalytischen Strukturen auf F, falls F nicht orientierbar ist beziehungsweise die Menge aller komplexen Strukturen auf F, deren induzierte Orientierung mit der gewählten Orientierung übereinstimmt, falls F orientierbar und orientiert ist. Offensichtlich operiert die Gruppe $\mathrm{Diff}(F)$ auf $\mathcal{S}(F)$. Ist nämlich

$$X = (\mathcal{U}; (\Phi_U)_{U \in \mathcal{U}}) \in \mathcal{S}(F)$$

eine dianalytische Struktur, die beschrieben wird durch eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von F und Karten $\Phi_U : U \to \mathbb{C}$; und ist f ein Diffeomorphismus von F, so ist

$$f^*X = (f^{-1}\mathcal{U}; (\Phi_U \circ f)_{U\in\mathcal{U}})$$

wieder eine dianalytische Struktur. Man beachte, dass diese Operation eine *Rechts*operation ist, was wir aus Konventionsgründen erreichen wollen. Durch Ersetzen von f durch f^{-1} auf der rechten Seite der letzten Gleichung erhält man hingegen eine Linksoperation. Ferner ist diese Operation stetig bezüglich der C^∞-Topologien auf Diff(F) und $\mathcal{S}(F)$. Die entsprechende Operation auf der Menge der fast-komplexen Strukturen ist $(f; J) \mapsto Tf^{-1} \circ J \circ Tf$; die auf der Menge der konformen Strukturen (also konforme Äquivalenzklassen Riemannscher Metriken) ist $(f, [g]) \mapsto [f^*g]$.

1.4.1 Lemma:

Die Operation von Diff(F) auf $\mathcal{S}(F)$ ist effektiv.
Falls $g(F) \geq 2$, dann ist die Operation von Diff$_0(F)$ auf $\mathcal{S}(F)$ frei (für beide Werte von c).
Falls $g(F) \geq 2$, dann ist die Operation von Diff($F; P; \Xi$) frei, falls $m \geq 1$ (wenn Ξ nicht leer ist).

Beweis: Die erste Aussage folgt aus der Tatsache: Ist f ein Diffeomorphismus, welcher bezüglich *jeder* dianalytischen Struktur dianalytisch ist, dann ist $f = id$. Das sieht man, indem man annimmt, es gäbe einen Punkt mit $f(p) \neq p$. Durch lokale Variation der dianalytischen Strukturen findet man eine, bezüglich der f nicht dianalytisch ist.
Die zweite Aussage ist äquivalent zu der folgenden: Ist $f : F \to F$ ein dianalytischer Automorphismus und homotop zur Identität, so ist $f = id$. Dies sieht man wie folgt: Falls F nicht orientierbar ist, kann f und die Homotopie auf die Orientierungsüberlagerung geliftet werden. Der Lift ist dann ein holomorpher Automorphismus, der homotop zur Identität ist. Es reicht also, orientierbare Flächen und orientierungserhaltende Abbildungen zu betrachten.
Wäre $f \neq id$, so darf f wegen des Identitätssatzes nur endlich viele Fixpunkte haben. Wegen des Riemannschen Uniformisierungssatzes existiert eine Metrik auf F, bezüglich derer f eine Isometrie ist. Wenn eine Isometrie

einer Riemannschen Mannigfaltigkeit nur isolierte Fixpunkte hat, dann hat jeder dieser Fixpunkte den Lefschetzindex +1[7]. Wegen des Lefschetzschen Fixpunktsatzes[8] muß der totale Lefschetzindex dann gleich der Anzahl der Fixpunkte sein, insbesondere $0 \leq L(f) = \chi(F) < 0$; ein Widerspruch.
Die dritte Aussage bedeutet: $f \in \mathrm{Diff}(F; P; \Xi)$ dianalytisch $\Rightarrow f = id$. Weil f in den Richtungen von Ξ die Orientierungen erhält, kann f zu einer holomorphen Abbildung auf der Orientierungsüberlagerung geliftet werden, welche eine Richtung festlässt. Weil f bezüglich einer gewissen Riemannschen Metrik eine Isometrie ist, müssen die Vektoren dieser Richtung Eigenvektoren von $T_p f$ zum Eigenwert +1 sein. Damit gehört die ganze Geodätische, die im Punkt p mit dieser Richtung beginnt, zur Fixpunktmenge von f. Wegen des Identitätssatzes gilt also: $f = id$ $\square$.

1.4.2 Definition:

Die Teichmüllerräume *sind definiert als die Mengen:*

$$\mathcal{T}(F) := \mathcal{S}(F) \big/ \mathrm{Diff}_0(F),$$

$$\mathcal{T}(F; P) := \mathcal{S}(F) \big/ \mathrm{Diff}_0(F; P),$$

$$\mathcal{T}(F; P; \Xi) := \mathcal{S}(F) \big/ \mathrm{Diff}_0(F; P; \Xi).$$

1.4.3 Definition:

Die Modulräume *sind definiert als:*

$$\mathcal{M}(F) := \mathcal{S}(F) \big/ \mathrm{Diff}(F) = \mathcal{T}(F) \big/ \Gamma(F),$$

$$\mathcal{M}(F; P) := \mathcal{S}(F) \big/ \mathrm{Diff}(F; P) = \mathcal{T}(F; P) \big/ \Gamma(F; P),$$

$$\mathcal{M}(F; P; \Xi) := \mathcal{S}(F) \big/ \mathrm{Diff}(F; P; \Xi) = \mathcal{T}(F; P; \Xi) \big/ \Gamma(F; P; \Xi).$$

[7] p Fixpunkt von f. Dann kann +1 kein Eigenwert von $T_p f$ sein.
[8] siehe [Br]

Bis jetzt tragen diese Mengen noch keine Topologie. Eine solche kann wie folgt definiert werden: $\mathcal{S}(F)$ kann als die Menge der fast-dianalytischen Strukturen auf F aufgefaßt werden. Diese Menge trägt als Teilmenge von $\Gamma(F; End(TM))$ eine natürliche Topologie, bezüglich derer die Operation der Diffeomorphismengruppe stetig ist [9]. Die Topologie auf den Teichmüllerräumen und Modulräumen ist die Quotiententopologie.
Fundamental ist der folgende Satz, der sich in dem Artikel [EaEe], S.20 (für den orientierbaren Fall) bzw. S.40 (für den nichtorientierbaren Fall), findet:

1.4.4 Satz von Earle und Eells

Sei F eine Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ und mit dem Orientierungscharakter c. Dann gilt: 1. Die Operation von Diff(F) ist eigentlich.
2. Die Projektion

$$\Phi : \mathcal{S}(F) \to \mathcal{T}(F)$$

ist ein universelles[10] $Diff_0(F)$-Prinzipalbündel.
3. Die Quotiententopologie auf dem Teichmüllerraum stimmt mit der durch die Teichmüllermetrik definierten überein[11].
4. $\mathcal{T}(F) \cong \mathbb{R}^{3c(g-1)}$ (Homöomorphie)

Ziel der nun folgenden Ausführungen ist die Herleitung des folgenden Resultats:

1.4.5 Satz:

Für jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeit F vom Geschlecht $g \geq 2$ ist, falls $m \geq 1$

$$\mathcal{S}(F) \to \mathcal{M}(F; P; \Xi)$$

ein universelles Diff$(F; P; \Xi)$-Prinzipalbündel.

Der Beweis zerfällt in eine Folge von Lemmata:

[9] siehe [Bö]

[10] zumindest falls F orientierbar ist. Das liegt einfach daran, dass die Menge M der Endomorphismen J von $\mathbb{R}^2$ mit $J^2 = -1$ und $det(v, Jv) > 0$ zusammenziehbar ist. Beweis: $Gl_2^+\mathbb{R}$ operiert transitiv durch Konjugation auf M mit Standgruppe $\mathbb{C}^\times$. Ein anderes Modell für diesen homogenen Raum ist die obere Halbebene mit Möbiustransformationen.

[11] Von diesem Konzept wird in dieser Arbeit kein expliziter Gebrauch gemacht

1.4.6 Lemma:

Es sei G eine topologische Gruppe, die von rechts frei und eigentlich auf dem Raum P operiere. Für jedes $u \in P/G$ existiere eine offene Umgebung U und ein stetiger Schnitt $s : U \to P$. Dann ist die Projektion $q : P \to P/G$ ein G-Prinzipalbündel[12].

Beweis: Es bezeichne $\Theta : G \times P \to P \times P$ die Abbildung $(g, x) \mapsto (x, xg)$. Diese ist eigentlich [13] und ihr Bild ist deshalb abgeschlossen. Die Abbildung $\phi : Bild\Theta \to G$; $(x, xg) \mapsto g$ ist dann stetig [14]. Sei U eine Umgebung wie in der Voraussetzung. Die Abbildung $U \times G \to q^{-1}(U)$; $(u, g) \mapsto s(u)g$ ist stetig und G-äquivariant.

Wir müssen eine stetige Umkehrabbildung angeben. Diese wird gegeben durch $x \mapsto (p(x), \phi(s(p(x)), x)$, was man durch einfaches Nachrechnen verifiziert. $\square$.

1.4.7 Lemma:

Es sei eine topologische Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe H sowie ein Raum P gegeben. Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:
1. G operiere eigentlich von rechts auf P,
2. die Zusammenhangskomponente G_0 der Einheit operiere frei auf P, und die Projektion $P \to P/G_0$ sei ein G_0-Prinzipalbündel,
3. die Projektion $G_0 \to G_0/(G_0 \cap H)$ sei ein $(G_0 \cap H)$-Prinzipalbündel, und
4. die Restriktion der G-Operation auf H sei frei auf P .
Dann gilt: $P \to P/H$ ist ein H-Prinizipalbündel.

Beweis: Wir benutzen das Lemma 1.4.6. Nach Voraussetzung 4.) ist die H-Operation auf P frei, die Eigentlichkeit der H-Operation folgt aus [toD], Satz (20.6) auf Seite 320, und 1.)
Es bleibt die Konstruktion lokaler Schnitte. Sei wieder H_0 die Zusammenhangskomponente der Eins in H. Der Quotient $H_0 \setminus H$ ist diskret und operiert eigentlich diskontinuierlich und frei auf P/H_0. Also ist $P/H_0 \to P/H = (P/H_0)/(H/H_0)$ eine reguläre Überlagerung und damit existieren lokale Schnitte. Weil $H_0 \subset H \cap G_0$ mit diskretem Quotienten, existiert eine stetige Überlagerung $P/H_0 \to P/(H \cap G_0)$. Der letzte Raum ist homöomorph zu $P \times_{G_0} G_0/(G_0 \cap H)$, denn P ist ein G_0-Prinzipalbündel nach 2.). Die links-G_0-äquivariante Projektion $G_0 \to G_0/(G_0 \cap H)$ besitzt lokale Schnitte nach 3.)

[12] Dieses Lemma findet sich in der Literatur, etwa [toD], nicht.
[13] siehe [toD],S.320
[14] ebd.

und liefert eine lokal-triviale Projektion $P = P \times_{G_0} G_0 \to P \times_{G_0} G_0/(H \cap G_0)$-Komposition dieser drei Abbildungen liefert den gewünschten lokalen Schnitt. $\square$

1.4.8 Lemma:

Es sei G eine topologische Gruppe, und H eine abgeschlossene Untergruppe. Die natürliche Projektion

$$q : G \to G/H$$

ist genau dann ein H-Prinzipalbündel, wenn es einen lokalen stetigen Schnitt gibt, also wenn eine Umgebung U von He existiert und eine stetige Abbildung $s : U \to G$ mit $q \circ s = id_U$.

Beweis: siehe [toD]; Satz IX(1.5); S. 331 f.

Wir setzen jetzt: $P := \mathcal{S}(F)$, $G := \mathrm{Diff}(F)$, $H := \mathrm{Diff}(F; P; \Xi)$ und behaupten, dass die Bedingungen 1-4 aus Lemma 1.4.7 erfüllt sind. 1.) und 2.) sind wahr nach dem Satz von Earle und Eells. Wir kommen zu 3.)

1.4.9 Lemma:

Die Untergruppe Diff$(F; P; \Xi) \subset$ Diff(F) erfüllt die Voraussetzung von Lemma 1.4.8. Hierbei ist $P := (p_1, \dots p_k)$ und $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$.

Bemerkung: Es wird sich gleich zeigen, dass der Quotientenraum zusammenhängend ist. Daraus folgt Bedingung 3.)

Beweis: Klarerweise ist $\mathrm{Diff}(F; P; \Xi)$ eine abgeschlossene Untergruppe. Betrachte die folgende $2k + 3m$-dimensionale offenene Mannigfaltigkeit:

$$\tilde{M} := (F^k \times (\mathbb{S}^1(F))^m)) \setminus N$$

$$N := \{(x_1, \dots x_k, \eta_1, \dots, \eta_m) | x_i \text{ und } \pi(\eta_j) \text{ sind nicht paarweise verschieden}\}$$

Hierbei ist $\pi : \mathbb{S}^1(F) \to F$ die Projektion. Die symmetrische Gruppe auf k

Elementen operiert frei auf $\tilde{M}$. Setze $M := \tilde{M}/\Sigma_k$ Die Gruppe Diff(F) operiert stetig und transitiv auf M. Die Standgruppe des Punktes $(p_1, \ldots p_k; \xi_1, \ldots, \xi_l)(mod\Sigma_k)$ ist gerade Diff($F; P; \Xi$); also existiert eine stetige Bijektion[15] Diff(F)/Diff($F; P; \Xi$) $\to M$. Es bleibt die Konstruktion eines lokalen Schnittes $M \supset U \to$ Diff(F). Wir können uns auf $\tilde{M}$ zurückziehen, denn unsere Konstruktion wird Σ_k-äquivariant sein.
Sei $U \subset M$ eine Produktmenge disjunkter zusammenziehbarer Koordinatenumgebungen der Punkte und Richtungen. Der gesuchte Schnitt wird als Komposition:

$$U \to \Gamma(TF) \to \mathrm{Diff}(F)$$

konstruiert. Die zweite Abbildung ist hierbei die Lösungsabbildung für den Fluss von Vektorfeldern auf der kompakten Fläche F zum Zeitparameter 1, so dass die Stetigkeit garantiert ist. Nun zur Wahl der ersten Abbildung: Sei $u = (q_1, \ldots q_k; \eta_1, \ldots, \eta_m) \in U$. Man kann nun in stetiger Abhängigkeit von den q_i Vektorfelder mit Träger nahe p_i wählen, deren Fluss zum Zeitpunkt $t = 1$ gerade die Punkte q_i erreicht. Ähnlich verfährt man mit den Richtungen. Per Definition der Bijektion Diff(F)/Diff($F; P; \Xi$) $\to M$ haben wir also einen Schnitt konstruiert. $\square$.

Aus Lemma 1.4.1 folgt, dass die Voraussetzung 4 aus Lemma 1.4.7 in unserem Fall erfüllt ist. Somit folgt:

1.4.10 Satz:

Sei $g(F) > 1$, dann ist die Projektion:

$$\mathcal{S}(F) \to \mathcal{M}(F; P; \Xi)$$

ein universelles Diff($F; P; \Xi$)-Prinzipalbündel.

1.5 Das Bündel der Dipolfunktionen

Es sei jetzt F eine festgehaltene kompakte zusammenhängende differenzierbare Fläche von Geschlecht $g \geq 2$ und h eine feste Riemannsche Metrik. Das *Bündel* der Dipolfunktionen wird jedoch am Ende nicht von der Wahl dieser

[15] Dass diese Bijektion ein Homöomorphismus ist, läßt sich nicht sofort garantieren, dies geht nur dann direkt, wenn die größere Gruppe eine LIE-Gruppe ist. Das ist aber nicht der Fall.

Metrik abhängen. Ebensowenig wird die Hilbert-Uniformisierungs-Abbildung in Kapitel 3 von der Wahl dieser Metrik abhängen. Wie wir oben gesehen haben, können wir dianalytische und konforme Strukturen miteinander identifizieren.
Zunächst diskutieren wir das Transformationsverhalten von Δ_h unter Diffeomorphismen von F. Da die Zurückziehung dianalytischer resp. konformer Strukturen lokal definiert ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Fläche orientierbar und der Diffeomorphismus orientierungserhaltend ist. Sei Φ ein Diffeomorphismus von F. Die mittels Φ zurückgezogene konforme Struktur Φ^*h war durch die Bedingung definiert, dass

$$\Phi : (F, \Phi^*h) \to (F, h)$$

isometrisch ist. Dies ist gleichbedeutend mit
$\Phi^* \circ *_{\Phi^*h} = *_h \circ \Phi^*$
$\Leftrightarrow *_{\Phi^*h} = (\Phi^{-1})^* \circ *_h \circ \Phi^*$
$\Rightarrow \Delta_{\Phi^*h} = *_{\Phi^*h} d *_{\Phi^*h} d = (\Phi^{-1})^* \circ *_h \circ \Phi^* d (\Phi^{-1})^* \circ *_h \circ \Phi^* d = (\Phi^{-1})^* *_h d *_h d\Phi^* = \Phi^* \Delta_h (\Phi^{-1})^*$
wegen der Natürlichkeit der Cartanschen Ableitung und der Definition des Laplaceoperators. Diese lokale Formel überträgt sich zu einer globalen Formel auch für nichtorientierbare Flächen. Es gilt also:

1.5.1 Proposition (Transformationsformel):

$$\Delta_{\Phi^*h} = \Phi^* \Delta_h (\Phi^{-1})^* \tag{1.3}$$

Wir behalten dieses Resultat im Auge und wenden uns funktionalanalytischen Überlegungen zu.
Δ_h ist ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung und besitzt daher für jedes $s \in \mathbb{Z}$ eine stetige Fortsetzung zu einem Fredholmoperator[16] zwischen den Sobolevräumen

$$\Delta_{h,s} : W^{2,s}(F, \mathbb{C}) \to W^{2,s-2}(F, \mathbb{C}).$$

Siehe [LM] für Details. Dort wird eine andere Notation für die Sobolevräume benutzt. Dieser Operator hängt stetig von der benutzten Riemannschen Metrik und also von der dianalytischen Struktur X ab. Stetigkeit

[16] Das ist eine stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen mit endlichdimensionalem Kern, abgeschlossenem und endlich-kodimensionalem Bild.

wird hier verstanden als starke Stetigkeit, das heißt, die Abbildung $\mathcal{S}(F) \to L(W^{2,s}(F), W^{2,s-2}(F))$ ist stetig (und nicht nur $\mathcal{S}(F) \times W^{2,s}(F) \to W^{2,s-2}(F)$). Ferner besteht der Kern immer aus den konstanten Funktionen, das Bild ist abgeschlossen und hat die Kodimension Eins. Es besteht im orientierbaren Fall aus allen Funktionen, die bezüglich des L^2-Skalarproduktes orthogonal zu den konstanten Funktionen sind, das heißt: deren Integral bezüglich der Volumenform Null ist.
Die Identität $-\int_F \langle df, dg\rangle vol = \int_F f\Delta g vol = \int_F g\Delta f vol$, die aus dem Satz von Stokes folgt[17], gilt auch, wenn *vol* nicht die Volumen*form* zu einer Metrik und einer Orientierung ist, sondern auch, wenn vol das Volumen*maß* bezeichnet (Integration bezüglich dieses Maßes), welches aber unabhängig von der gewählten Orientierung ist und folglich auch auf nichtorientierbaren Flächen existiert. Damit gilt: Δ ist formal-selbstadjungiert.
Die Sobolevräume $W^{2,s}(F, \mathbb{C})$ tragen stetige lineare *Links*-Operationen der Diffeomorphismengruppe $\mathrm{Diff}(F)$. Setze $\rho(\Phi)(f) := (\Phi^{-1})^* f$ für eine Funktion f. Diese etwas seltsame Wahl hat Konventionsgründe.

Sei jetzt P eine Menge von $k+m$ Punkten auf F und ξ eine Menge von m Richtungen an den ersten m Punkten aus P. Die Quotientenabbildung $\mathcal{S}(F) \to \mathcal{M}(F;P;\Xi)$ ist dann ein $\mathrm{Diff}(F;P;\Xi)$-Prinzipalbündel, wie im letzten Abschnitt bewiesen. Wir bilden die induzierten Hilbertraumbündel über dem Modulraum $\mathcal{M}(F;P;\Xi)$:

$$\mathcal{S}(F) \times_{\mathrm{Diff}(F;P;\Xi)} W^{2,s}(F, \mathbb{C}).$$

Die im letzten Paragraphen gefundene Formel 1.5.1 besagt, dass der Laplaceoperator für jede ganze Zahl s eine wohldefinierte stetige Bündelabbildung

$$\Delta : \mathcal{S}(F) \times_{\mathrm{Diff}(F;P;\Xi)} W^{2,s+2}(F) \to \mathcal{S}(F) \times_{\mathrm{Diff}(F;P;\Xi)} W^{2,s}(F)$$

ergibt. Diese besteht aus Fredholmoperatoren, die an jedem Punkt die gleiche Kern- und Kokerndimension haben.

Dipolfunktionen

Sei F eine geschlossene 2-Mannigfaltigkeit; $p_1, ...p_{k+m}$ paarweise verschiedene Punkte auf der Fläche, $\xi_1, ..., \xi_m$, $\xi \in \mathbb{S}_{p_i}F$ Richtungen. Wir können die ξ_i´s als Tangentialvektoren der Länge 1 auffassen, was wir auch ohne weitere Bemerkung tun werden. Multiplikation dieser Tangentialvektoren mit positiven Zahlen hat keine Auswirkungen auf die folgende Konstruktion. δ_{p_i} sei

[17] $0 = \int_F g(f * dg) = \int_F df \wedge *dg + f \cdot d * dg = \int_F f\Delta g vol + \int_F \langle df, dg\rangle vol$.

die Diracdistribution zum Punkt p_i, d.h. die Abbildung $f \mapsto f(p_i)$. $\xi_i \dashv d$ sei die Distribution $f \mapsto df(\xi_i)$. Wegen des Sobolevschen Einbettungssatzes gilt $W^{2,r+2} \subset C^r$ für alle $r \geq 0$. Folglich ist $\delta_{p_i} \in (W^{2,2}(F))' \cong W^{2,-2}(F)$. Die Isomorphie ist die Dualitätsrelation für Sobolevräume[18]. Außerdem ist $\xi_i \dashv d \in (W^{2,3}(F)' \cong W^{2,-3}(F)$.

1.5.2 Definition:

Eine Dipolfunktion *zu einer gegebenen Singularitätenverteilung* $p_1, \ldots, p_{k+m}$, $\xi_1, \ldots, \xi_m$ *ist ein reelles Element* $u \in W^{2,-1}(F;\mathbb{C})$, *so dass* $\Delta(u) = \sum_{j=1}^{k} a_j \delta_{p_j} + \sum_{i=1}^{l} b_i \xi_i \dashv d$ *mit* $b_1, ..., b_m, a_{m+1}, ..., a_{m+k} > 0$.

Bemerkung: Diese Definition ist unabhängig von der Metrik h, lediglich die Koeffizienten werden dadurch verändert, denn beim Übergang zu einer konform äquivalenten Metrik wird der Laplaceoperator einfach von links mit einer positiven Funktion multipliziert. Implizit ist die Bedingung $\sum_{j=1}^{k+m} a_j = 0$ gegeben (Quell- und Senkenstärken müssen sich zu Null addieren). Für orientierbare Flächen ist dies klar. a_j ist nämlich das Residuum der meromorphen 1-Form ∂u am Punkt p_j, und die Residuensumme ist auf kompakten Flächen immer Null. Für nichtorientierbare Flächen folgt das aus einem Überlagerungsargument. Die mittels der Orientierungsüberlagerung zurückgezogene Funktion ist eine Dipolfunktion auf der Orientierungsüberlagerung, deren Residuensumme das Doppelte der Residuensumme der ursprünglichen Funktion ist.

1.5.3 Proposition:

Eine Dipolfunktion ist eine harmonische Funktion $u : F \setminus \{p_1, \ldots, p_{k+m}\} \to \mathbb{R}$, *die in den Punkten* p_j *Singularitäten der folgenden Form hat:*
Ist $k + m \geq j > m$ *und* U *eine Umgebung von* p_j *und* $h : U \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Karte, mit* $h(p_j) = 0$, *so ist* $u(h^{-1}(z)) = alog(|z|) + b(z)$ *mit* $a > 0$.
Ist $j \leq m$ *und* U *eine Umgebung von* p_j *und* $h : U \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Karte, mit* $h(p_j) = 0$ *und* $Th(\xi_j) = \frac{\partial}{\partial x}$ *so ist* $u(h^{-1}(z)) = a\Re(\frac{1}{z}) + clog(|z|) + b(z)$ *mit* $a > 0$ *und* c *eine reelle Zahl.*
In beiden Fällen ist b *eine stetige harmonische Funktion auf einer Umgebung von 0 in* $\mathbb{C}$.

[18] siehe [LM]

Beweis: Auf der offenen Menge $F \setminus \{p_1, ...p_k\}$ ist u unendlich oft differenzierbar und harmonisch im üblichen Sinn. Das folgt aus den bekannten lokalen Regularitätsaussagen über elliptische partielle Differentialgleichungen [19].
Es bleiben die Aussagen über die Singularitäten zu zeigen. Wegen der konformen Invarianz des Laplaceoperators und des Riemannschen Abbildungssatzes können wir uns auf den Fall $F = \mathbb{C}$ und $p_j = 0$ zurückziehen. Wir müssen jetzt $\Delta(u)$ im Distributionensinne für die Funktionen $u = \Re(\frac{1}{z})$ und $u = \log(|z|)$ ausrechnen. Das Ergebnis lautet:
$\Delta(\Re(\frac{1}{z})) = \pi\frac{\partial}{\partial x}$ und
$\Delta(\log(|z|)) = 2\pi\delta_0$. Für die detailierte Rechnung, siehe[20] $\square$.

Wir machen noch eine Bemerkung zu dem Verhalten von Dipolfunktionen unter Kartenwechseln. Die Koeffizienten vor den logarithmischen Termen sind unabhängig von der Kartenwahl (ist h ein holomorpher Kartenwechsel mit $h(0) = 0$, also $h(z) = azg(z)$ mit $a \neq 0$ und g(0)=1, so folgt: $\log(|h(z)|) = \log(|z|)$+stetige Terme). Für die Dipole ist diese Behauptung falsch. Man muss $a > 0$ voraussetzen, damit die Richtung erhalten wird. Es gilt dann $\Re(\frac{1}{h(z)}) = \frac{1}{a}\Re(\frac{1}{z})+$ stetige Terme.
Die doppelte Definitionen der Dipolfunktionen scheint zunächst redundant zu sein. Wenn man jedoch Mengen von Dipolfunktionen betrachtet und auf diesen Mengen eine Topologie definieren will, ist es - gelinde gesagt - hilfreich, die Dipolfunktionen als Elemente eines Banachraumes aufzufassen. Noch besser ist es, wenn dieser Banachraum sogar ein Hilbertraum ist. Genau das ist aber mit der naiven, klassischen Definition von Dipolfunktionen nicht möglich.

Das Bündel der Dipolfunktionen

Wir kommen jetzt zum versprochenen Faserbündel über dem Modulraum, das aus den Dipolfunktionen besteht. Seien F, P und Ξ wie gehabt. Es sei

$$V := span_{\mathbb{R}}(\delta_{p_1}, \dots, \delta_{p_{m+k}}, \xi_1 \dashv d, \dots, \xi_m \dashv d) \subset W^{2,-3}(F).$$

Dieser reelle Untervektorraum ist Diff($F; P; \Xi$)-invariant. Er besitzt kein in-

[19][LM], S.193
[20]$\Delta log|z| = 2\pi\delta_0$ ist allgemein bekannt, die andere Formel sieht man wie folgt:

$$\Delta\Re\frac{1}{z} = \Delta(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}})log|z| = (\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}})\Delta log|z| = 2\pi(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}})\delta = 2\pi\frac{\partial}{\partial x}|_0$$

variantes Komplement. Die Projektion $W^{2,-3}(F) \to W^{2,-3}(F)/V$ definiert einen Epimorphismus von Hilbertraumbündeln ($s \leq -3$):

$$Q : \mathcal{S}(F) \times_{\mathrm{Diff}(F;P;\Xi)} W^{2,s}(F) \to \mathcal{S}(F) \times_{\mathrm{Diff}(F;P;\Xi)} (W^{2,s}(F)/V).$$

Die Komposition $Q \circ \Delta$ ist eine Fredholmfamilie mit Index $0 + dimV = 2m + k$. Diese Formel ergibt sich aus dem Additionstheorem für den Index. Die Kerndimension ist konstant $1 + dimV$, die Kokerndimension konstant 1 wegen der Bemerkung nach Definition 1.5.2. Wir benutzen nun das

1.5.4 Lemma:

Sind E, F Vektorraumbündel von Hilberträumen über dem topologischen Raum X, und ist $\Psi : E \to F$ eine (stark stetige) Familie von Fredholmoperatoren mit konstanter Kerndimension, so ist $ker(\Psi)$ ein gewöhnliches Vektorraumbündel.

Beweis: Der Beweis von Proposition 1.3.2.i aus [Ati] S.11f, überträgt sich im Wortlaut auf die gegebene Situation. Folgende Argumente müssen dabei beachtet werden:
1. Separable Hilberträume H (zu dieser Klasse gehören die L^2-Sobolevräume) sind reflexiv, also die natürliche Abbildung $H \to H''$ ist eine Isometrie.
2. Jeder abgeschlossene Unterraum $U \subset H$ eines Hilbertraumes ist komplementiert, das heißt es gibt einen weiteren abgeschlossenen Unterraum V mit $H = U \oplus V$ (orthogonale Summe).
3. Der Satz von der offenen Abbildung: Sind H_1 und H_2 Hilberträume und $f : H_1 \to H_2$ eine stetige bijektive lineare Abbildung, so ist auch f^{-1} stetig.
4. Für einen Fredholmoperator f gilt: $(\mathrm{im} f)^\perp = (\mathrm{kern} f^{ad})$ und $(\mathrm{im} f^{ad}) = (\mathrm{kern} f)^\perp$.
5. Das Additionstheorem für den Fredholmindex $\mathrm{ind}(f \circ g) = \mathrm{ind}(f) + \mathrm{ind}(g)$.
6. Die Einheitengruppe im Ring $L(H, H)$ ist offen. $\square$.

Die Dipolfunktionen bilden nun eine offene konvexe Teilmenge des Vektorbündels $\ker(Q \circ \Delta)$. Wir nennen diese Menge $\mathcal{D}(F, p_1, ...p_{m+k}; \xi_1, ..., \xi_m)$. $\mathcal{D}(F, p_1, ...p_{m+k}; \xi_1, ..., \xi_m)$ ist ein Faserbündel der Faserdimension $k+2m$ über dem $3c(g-1) + 2k + 3m$-dimensionalen Modulraum.

Wir führen jetzt noch allgemeine Notationen ein. Da ein Diffeomorphismus von Flächen einen Homöomorphismus der zugehörigen Moduläume und Bündel der Dipolfunktionen induziert, kann die konkrete Fläche F und die spezielle Wahl der Punkte und Richtungen in der Notation unterdrückt werden. Von nun an sei in dieser Arbeit zu jedem Geschlecht, zu jedem Orientierungscharakter und zu jeder Anzahl von Richtungen und zusätzlichen Punkten eine Fläche $F_{g,c}$ und eine entsprechende Menge von Punkten und Richtungen auf dieser Fläche gewählt. Wir bezeichnen den Modulraum dieser Fläche vom Geschlecht g, Orientierungscharakter c mit m Richtungen und k weiteren Punkten mit $\mathcal{M}(g, c, m, k)$ und das Bündel der Dipolfunktionen darüber mit $\mathcal{D}(g, c, m, k)$. $\mathcal{D}(g, c, m, k)$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $3c(g-1) + 5m + 3k$.

Ein Konvergenzsatz

Wir haben jetzt eine schöne Topologie auf der Menge der Dipolfunktionen, aber wir haben noch keine brauchbare Interpretation dieser Topologie. „Interpretation dieser Topologie"soll bedeuten, dass wir die Konvergenz von Punkten im Bündel der Dipolfunktionen als Konvergenz von Funktionen in einer geegneten Repräsentation auffassen können. Die Faserbündelbeschreibung ermöglicht es uns, zumindest lokal (d.h.über kleinen offenen Teilmengen des Modulraumes), die Dipolfunktionen als Funktionen auf einer fest gewählten differenzierbaren Fläche mit fest gewählten singulären Punkten (aber natürlich variablen konformen Strukturen) aufzufassen, was global, d.h. für alle Dipolfunktionen simultan, unmöglich ist. Hier wollen wir einen Satz über die Konvergenz von Dipolfunktionen formulieren und beweisen.

1.5.5 Satz:

Es sei F eine glatte geschlossene Fläche. $p_1, \ldots, p_{k+m}, \xi_1 \ldots, \xi_m$ seien Punkte und Richtungen wie gehabt. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Riemannscher Metriken, die in der C^∞-Topologie gegen die Riemannsche Metrik h konvergiert. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{2,-1}(F)$ sei eine gegen f konvergente Folge. Jedes f_n sei eine Dipolfunktion bezüglich h_n, und f sei eine Dipolfunktion bezüglich h.
Dann gilt: Auf jedem Kompaktum in F, das die Singularitäten nicht enthält, konvergiert f_n zusammen mit den ersten beiden Ableitungen gleichmäßig gegen f.

Beweis: Die Annahme über die Konvergenz der Metriken impliziert, dass alle Gleichungen $\Delta_n u = f$ bezüglich n gleichmäßig elliptisch sind. Also gelten die folgenden Abschätzungen für partielle Differentialgleichungen gleichzeitig für alle n.
Das Problem ist lokaler Natur, weshalb es genügt, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. zu betrachten. Alle Funktionenräume seinen Funktionenräume auf

dieser Menge U. Sei a eine glatte Funktion mit kompaktem Träger auf U mit $a \equiv 0$ nahe den Singularitäten von u_n und b eine Funktion mit kompaktem Träger in $U \setminus P \cup Q$ und $b|_supp(a) \equiv 1$. Wir müssen zeigen, dass $au_n \to au$ in der C^2-Norm. Zunächst gilt nach Defintion und wegen der Dualitätsrelation für L^2-Sobolevräume ([**?**])

$$\|au_n\|_{W^{1,1}} \leq C(\|au_n\|_{L^1} + \|\nabla(au_n)\|_{L^1}) \tag{1.4}$$

$$\leq C(\|a\|_{W^{1,2}}\|u_n\|_{W^{-1,2}} + \|\nabla a\|_{W^{1,2}}\|bu_n\|_{W^{-1,2}} + \|a\|_{W^{2,2}}\|u_n\|_{W^{-1,2}} \leq K \tag{1.5}$$

für eine universelle Konstante K.
Weiter folgt aus der Schauder-Abschätzung(siehe [14], Th. 10.2.1) für die tautologische Gleichung $\Delta_n(au_n) = \Delta_n(au_n)$ und eine Konstante $\alpha \in (0,1)$:

$$\|au_n\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\|au_n\|_{L^2} + \|\Delta_n(au_n)\|_{C^{0,\alpha}}. \tag{1.6}$$

Der Sobolev-Einbettungssatz und die Ungleichung 1.4 zeigen jetzt

$$\|au_n\|_{L^2} \leq C\|au_n\|_{W^{1,1}} \leq K \tag{1.7}$$

mit einer Konstanten K. Der zweite Term der rechten Seite wird mit Hilfe des De Giorgio- Moser- Nash-Theorems (see [18], Th 9.7, p 177) weiter untersucht. Ist nämlich $q := \frac{2}{1-\alpha} > 2$, dann gilt

$$\|\Delta_n(au_n)\|_{C^{0,\alpha}} \leq C\|\nabla_n\Delta_n(au_n)\|_{L^q} \leq C(\|(\nabla_n\Delta_n a)bu_n)\|_{L^q} + \|(3\Delta_n a)\nabla_n(bu_n)\|_{L^q}), \tag{1.8}$$

wobei die zweite Ungleichung gilt, weil u_n auf dem Träger von $a$harmonisch ist. Wähle $r \in [q,\infty)$, $s \in (0,1)$ mit $\frac{1}{q} = s + \frac{1-s}{r}$. Eine variante der gewöhnlichen Hölder-Ungleichung impliziert, dass

$$\|(\nabla_n\Delta_n a)bu_n)\|_{L^q} \leq \|bu_n\|_{L^1}^s \|(\nabla_n\Delta_n a\|_{L^q}^{1-s}$$

und, ähnlich

$$\|(3\Delta_n a)\nabla_n(bu_n)\|_{L^q} \leq \|\nabla_n bu_n\|_{L^1}^s \|3\Delta_n a\|_{L^q}^{1-s}.$$

Insgersamt sehen wir: $\|au_n\|_{C^{2,\alpha}} \leq K$ mit einer (neuen) Konstanten K, die nur von a, b abhängt. Nun ist aber die Einbettung $C^{2,\alpha}(U) \hookrightarrow C^2(U)$ der Hölderräume ein kompakter Operator (siehe [1], S.215). Also: jede Teilfolge von u_n besitzt eine Teilfolge, welche wie in der Behauptung des Satzes konvergiert. Weil die Originalfolge aber in der entsprechenden Sobolevnorm gegen u konvergiert, ist der Limes aller dieser Teilfolgen gleich u. Ein ganz elementares Argument, das in dieser Arbeit noch mehrfach benutzt wird, vollendet den Beweis: Ist X ein Hausdorffraum und x_n eine Folge in X mit folgender Eigenschaft: Es existiert ein $x \in X$; und jede Teilfolge von x_n besitze eine Teilfolge, welche gegen x konvergiert. Dann konvergiert die ganze Folge gegen x. $\square$

Der Nutzen dieses Konvergenzsatzes1.5.5 wird sich ganz am Ende dieser Arbeit erweisen, wenn die Stetigkeit der Hilbert-Uniformisierungsabbildung gezeigt wird.

Kapitel 2

Parallelschlitzgebiete

2.1 Parallelschlitzkonfigurationen und ihre Realisierungen

Die Menge $\mathbb{R} \times \underline{m}$ trägt eine natürliche Ordnung. Es gelte nämlich $(x, k) < (y, l) \Leftrightarrow k < l$ oder $l = l$ und $x < y$. Das ist eine lineare Ordnung. Der Imaginärteil eines Elementes $(z, k) \in \mathbb{C} \times \underline{m}$ sei immer $\Im((z, k)) := (\Im z, k) \in \mathbb{R} \times \underline{m}$. Der Realteil eines Elementes sei dagegen stets $\Re((z, k)) := \Re(z)$. Ferner sei die Addition und Subtraktion zweier Elemente definiert als: $(z, k) \pm (w, l) := (z \pm w, k \pm l)$. Das macht natürlich nur dann Sinn, wenn das Ergebnis wieder zu der richtigen Menge gehört, wenn also $0 \leq k \pm l \leq m$. Wir benutzen das nur als Kurznotaion; und in allen Fällen werden diese Bedingungen erfüllt sein.

2.1.1 Definition

Eine Parallelschlitzkonfiguration *aus h Schlitzpaaren und auf m Ebenen besteht aus folgenden Daten:*
1. Einem Tupel $(z_1, \ldots, z_{2h}) \in (\mathbb{C} \times \underline{m})^{2h}$
2. Einer Paarungsfunktion*, d.h. einer fixpunktfreien Involution λ aus der symmetrischen Gruppe Σ_{2h}*
3. Einer Typfunktion *$T : \underline{2h} \to \mathbb{Z}/2 \equiv \{\pm 1\}$ mit $T \circ \lambda = T$*

Die Ebenenfunktion *ist die Abbildung $\alpha : \underline{2h} \to \underline{m}; a \mapsto b$, falls $z_a \in \mathbb{C} \times \{b\}$.*
Folgende Bedingungen seien erfüllt:
Es gilt: $\Im z_{a+1} \geq \Im z_a$ im Sinne der oben beschriebenen linearen Ordnung auf $\mathbb{R}$.
Es gilt immer $\Re z_{\lambda(a)} = \Re z_a$.

Die Menge aller Parallelschlitzkonfigurationen mit h Schlitzpaaren auf m Ebenen werde mit $\widetilde{PSK}(m,h) \subset (\mathbb{C}^{2h} \times \Sigma_{2h} \times \{\pm\}^{\underline{2h}}$ bezeichnet.

2.1.2 Realisierungen der Parallelschlitzkonfiguration.

Wir definieren nun die Realisierungen einer Parallelschlitzkonfiguration, wobei der Reihe nach die nur zu Notationzwecken nötige offene Realisierung, dann die abgeschlossene Realisierung besprochen wird. Die letztere ist im uns interessierenden Fall eine offene 2-Mannigfaltigkeit.

Sei $\mathcal{L} := ((z_1, \ldots, z_{2h}), \lambda, T) \in \widetilde{PSK}(m,h)$ eine Parallelschlitzkonfiguration. Setze $L_i := \{z \in \mathbb{C} \times \underline{m} | \Im(z) = \Im(z_i); \Re(z) \leq \Re(z_i)\}$. Die *offene Realisierung* der Parallelschlitzkonfiguration ist der topologische Raum

$$\mathring{\mathcal{F}}(\mathcal{L}) := (\mathbb{C} \times \underline{m}) \setminus \bigcup_{i=1}^{2h} L_i.$$

2.1.3 Notation:

Sei $\mathcal{L} := ((z_1, \ldots, z_{2h}), \lambda, T)$ eine Parallelschlitzkonfiguration. Setze formal $z_0 = (-\infty, 0)$ und $z_{2h+1} := (+\infty, m)$ Mit F_a, $0 \leq a \leq 2h$, seien die folgenden abgeschlossenen „Streifen“bezeichnet:

$$F_a := \overline{\{(z,a) \in (\mathbb{C} \times \underline{m}) \times (\{0\} \cup \underline{2h}) | \Im(z_a) < \Im(z) < \Im(z_{a+1})\}},$$

wobei der Strich den topologischen Abschluss in $(\mathbb{C} \times \underline{m}) \times (\{0\} \cup \underline{2h})$ meint.

2.1.4 Definition:

Die halb-abgeschlossene Realisierung *einer Parallelschlitzkonfiguration ist der topologische Raum:*

$$\mathcal{F}'(\mathcal{L}) := \bigcup_a F_a / \sim,$$

wobei die Identifizierungen wie folgt definiert sind:

$$(z,a) \sim (z, a+1), \text{ falls } \Re z \geq \Re z_a.$$

2.1.5 Definition:

Die abgeschlossene Realisierung *einer Parallelschlitzkonfiguration ist folgender topologischer Raum:*

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{L}) := \bigcup_a F_a / \sim,$$

wobei die Identifizierungen wie folgt definiert sind:

$$(z, a) \sim (z, a+1), \text{ falls } \Re z \geq \Re z_a,$$

$$(z, a) \sim (z + (z_{\lambda(a)} - z_a), \lambda(a) - 1), \text{falls } \Re z \leq \Re(z_a), \Im z = \Im z_a \text{ und } T(a) = +1,$$

$$(z, a) \sim (z + (z_{\lambda(a)} - z_a), \lambda(a)), \text{falls } \Re z \leq \Re(z_a), \Im z = \Im z_a \text{ und } T(a) = -1,$$

$$(z, a) \sim (z + (z_{\lambda(a)} - z_a), \lambda(a)), \text{falls } \Re z \leq \Re(z_a), \Im z = \Im z_{a-1} \text{ und } T(a) = +1,$$

$$(z, a) \sim (z + (z_{\lambda(a)} - z_a), \lambda(a) - 1), \text{falls } \Re z \leq \Re(z_a), \Im z = \Im z_{a-1} \text{ und } T(a) = -1.$$

Man bemerke, dass es eine Quotientenabbildung

$$[] : \mathcal{F}'(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}^*(\mathcal{L})$$

gibt. Ferner ist der Realteil eines Punktes von $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ wohldefiniert und induziert eine stetige Abbildung:

$$u_{\mathcal{L}} : \mathcal{F}^*(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$$

Diese wird sich am Ende im regulären Fall als Dipolfunktion bezüglich der nun zu definierenden dianalytischen Struktur auf der noch zu findenden kompakten Realisierung erweisen.

2.2 Eigenschaften der Realisierung einer Parallelschlitzkonfiguration

2.2.1 Fragestellung

Es sei $\mathcal{L}$ eine Parallelschlitzkonfiguration. Es stellen sich nun die folgenden Fragen:
1: Wann besitzt $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ die Struktur einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit?
2: Wie kann eine dianalytische Struktur auf $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ definiert werden?
3: Wann ist $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ zusammenhängend?
4: Wann ist $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ orientierbar?
5: Wie kann $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ in geeigneter Weise kompaktifiziert werden, so dass man eine kompakte, mehrfach gerichtete und mehrfach punktierte Kleinsche Fläche erhält, so dass die Funktion $z \mapsto \Re z$, welche auf $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ wohldefiniert und stetig ist, bezüglich der in 2 definierten dianalytischen Struktur eine Dipolfunktion für die Richtungen und Punktierungen ist?
Wir werden diese Fragen der Reihe nach in diesem Kapitel beantworten.

2.2.2 Definition:

Es sei $\mathcal{L}$ eine Parallelschlitzkonfiguration.
$\mathcal{L}$ heißt regulär, *falls $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ eine dianalytische Struktur besitzt.*
$\mathcal{L}$ heißt zusammenhängend*, falls $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ ein zusammenhängender topologischer Raum ist.*
$\mathcal{L}$ heißt orientierbar*, falls $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ eine zusammenhängende und orientierbare Mannigfaltigkeit ist.*

2.2.3 eine dianalytische Struktur auf der assoziierten Fläche

Wir beantworten nun die Frage, welche Parallelschlitzkonfigurationen regulär sind und definieren sogleich eine geeignete dianalytische Struktur.
Zuerst eine elementare Bemerkung. Da die Identifikationen alle abgeschlossen sind, ist $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ stets ein Hausdorffraum. Ferner ist das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Also sind diese mengentheoretisch-topologischen Bedingungen der Definition einer Mannigfaltigkeit stets erfüllt.
Nun zum eigentlichen Problem, einem dianalytischen Atlas auf $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$. Sei also $\mathcal{L} := (z_1, \ldots, z_{2h}) \in (\mathbb{C} \times \tilde{m})^{2h}$ eine Parallelschlitzkonfiguration.

$$id : (\mathbb{C} \times \{j\}) \setminus \bigcup_{\alpha(i)=j} L_i \to \mathbb{C}$$

liefert den ersten Satz von Karten. Weniger einfach sind die Punkte auf den Schlitzen zu verarbeiten. Zu diesem Zweck geben wir einen rekursiven Algorithmus an. Es sollen Folgen von Indizes und Vorzeichen $(k_i, \epsilon_i, x_i) \in \underline{2h} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{R}$ definiert werden.

2.2.4 Algorithmus:

Die *Abbruchbedingungen* lauten: $(j \in \underline{2h})$

$A_{(j,+1,x)}$ gelte genau dann, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:
$\Im(z_{j+1}) > \Im(z_j)$ oder
$\Re(z_a) < x$ für alle a mit $\Im(z_a) = \Im(z_j)$.

$A_{(j,-1,x)}$ gelte genau dann, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:
$\Im(z_{j-1}) < \Im(z_j)$ oder
$\Re(z_a) < x$ für alle a mit $\Im(z_a) = \Im(z_i)$.

Es sei der Wert $(k_{r-1}, \epsilon_{r-1}, x_{r-1})$ bereits definiert. Wir setzen:

$$(k_r, \epsilon_r, x_r) := \begin{cases} (\lambda(k_{r-1} + \epsilon_{r-1}), T(k_r)\epsilon_{r-1}, x_{r-1}) & \text{, falls Abbruchbedingung} \\ & A_{(k_r, \epsilon_{r-1})} \text{ nicht erfüllt ist} \\ (k_r, \epsilon_{r-1}, x_{r-1}) & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2.5 Satz:

Eine Parallelschlitzkonfiguration ist genau dann regulär, wenn für jeden Startwert $(k_0, \epsilon_0, x_0) \in \underline{2h} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{R}$ mit $x \leq \Re(z_{k_0})$ der oben angegebene Algorithmus nach endlich vielen Schritten stationär wird (und nicht periodisch ist).
In diesem Fall existieren um jeden Punkt in $\mathcal{SF}^*(\mathcal{L})$ Karten, die untereinander und mit der eben angegebenen Karte der offenen Realisierung dianalytisch verträglich sind. Mit anderen Worten: $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ ist eine offene Kleinsche Fläche.

Ferner gilt, dass $u_{\mathcal{L}}$ eine harmonische Funktion auf $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ ist. Alle Nullstellen der Ableitung dieser Funktion liegen in den Bildern der Schlitzenden unter der Quotientenabbildung. Der Nullstellenindex bei $[z_k]$ ist gleich der Summe der Anzahl der nichttrivialen Rekursionsschritte bei der „Vorwärtsrekursion“mit $(k_0, \epsilon_0, x_0) = (k, +1, \Re(z_k))$ und derselben Anzahl bei der Rückwärtsrekursion mit $(k_0, \epsilon_0, x_0) = (k, -1, \Re(z_k))$ plus Eins.

Beweis: Siehe [Zaw],[Bö]

Bemerkung: Wenn der Algorithmus für einen Startwert stationär wird, heißt das, dass der Punkt $[x_0 + i\Im(z_{k_0})] \in \mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zur Einheitskreisscheibe ist.
Obwohl im Satz steht: „für alle $x \in \mathbb{R}$“, also unendlich viele x-Werte getestet werden müssen, sind es in Wahrheit nur endlich viele. Es handelt sich also um ein kombinatorisches Kriterium.

2.3 Zusammenhang und Orientierbarkeit

Für die Beantwortung der Fragen 3,4 und 5 aus 2.2.1 erweist sich folgender Begriff als nützlich:

2.3.1 Definition:

Eine kombinatorische Kette *oder einfach* Kette *in $\mathcal{L}$ der Länge r ist eine Folge von Indices und Vorzeichen $p : \underline{2r-1}_0 \to \underline{2h} \times \{\pm 1\};\ j \mapsto (p_j, \epsilon_j)$, so dass gilt: $p_{2j+1} = \lambda(p_{2j})$ und $\epsilon_{2j+1} = -T(p_{2j})\epsilon_{2j}$ und (p_{2j}, ϵ_{2j}) beliebig mit $\alpha(p_{2j}) = \alpha(p_{2j-1})$ für alle in Frage kommenden j.*

2.3.2 Definition:

Es sei $\mathbb{L} \subset \mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ die Menge, die aus den Bildern aller Schlitze l_i entsteht. Eine geometrische Realisierung *einer Kette ist ein stetiger Weg: $\gamma : [0,1] \to \mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ mit folgenden Eigenschaften: Es gibt eine Sequenz $0 < t_1 < t_2, \dots t_r < 1$, so dass gilt: $\gamma(t_i) \in [L_{p_{2i-1}}]$,*
$\gamma(t_i, t_{i+1}) \subset [\mathring{\mathcal{F}}(\mathcal{L})]$, also nicht in $\mathbb{L}$,
falls $\epsilon_{2i} = -1$, so ist $\gamma(t_i - \delta) \in F_{p_{2i}-1,\alpha(p_{2i})}$ für alle $\delta > 0$, die klein genug sind, falls $\epsilon_{2i} = +1$, so ist $\gamma(t_i - \delta) \in F_{p_{2i},\alpha(p_{2i})}$ für alle $\delta > 0$, die klein genug sind, falls $\epsilon_{2i+1} = -1$, so ist $\gamma(t_i + \delta) \in F_{p_{2i}-1,\alpha(p_{2i})}$ für alle $\delta > 0$, die klein genug sind, falls $\epsilon_{2i+1} = +1$, so ist $\gamma(t_i + \delta) \in F_{p_{2i},\alpha(p_{2i})}$ für alle $\delta > 0$, die

klein genug sind.
Die letzten Bedingungen beschreiben, in welche Richtung ein Schlitz überquert wird.

Bemerkung: Zwei geometrische Realisierungen einer Kette, welche denselben Anfangs- und Endpunkt haben, sind in $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ relativ zu diesen Anfangs- und Endpunkten homotop. □

2.3.3 Proposition:

$\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ es gibt eine Kette p, so dass $\alpha \circ p$ surjektiv ist.

Beweis: ist klar. Man vergegenwärtige sich, dass die angegebene Bedingung bedeutet, dass ein Weg in $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ existiert, der jede Ebene trifft. □.

Eine zusammenhängende Parallelschlitzkonfiguration ist eine Parallelschlitzkonfiguration, deren assoziierte Fläche zusammenhängend ist.
Da es nur endlich viele kombinatorische Ketten gibt, ist das oben angegebene Kriterium ein kombinatorisches.

2.3.4 Definition:

$PSK(m, h)$ sei die Menge aller regulären und zusammenhängenden Parallelschlitzkonfigurationen auf m Ebenen mit h Schlitzpaaren.

2.3.5 Orientierbarkeit von Parallelschlitzkonfigurationen

Betrachte eine zusammenhängende Parallelschlitzkonfiguration $\mathcal{L}$. Eine Kette p der Länge r heißt *geschlossen*, falls p zu einer Kette der Länge $r + 1$ verlängert werden kann, derart, dass $p_0 = p_{2r}$ und $p_1 = p_{2r+1}$ ist. Mit anderen Worten, diese Kette besitzt eine geometrische Realisierung durch einen geschlossenen Weg. Sei $P(\mathcal{L})$ die Menge aller geschlossener Ketten in $\mathcal{L}$ von beliebiger endlicher Länge. Die *Monodromieabbildung* ist die Abbildung:

$$\mu : P(\mathcal{L}) \to \mathbb{Z}/2,$$

$$\mu(p) := \prod_{j \geq 0; 2j \leq r} T(p_{2j}).$$

2.3.6 Proposition:

Sei p eine geschlossene Kette und γ eine geschlossene Realisierung dieser Kette. Es gilt:
γ ist ein orientierungserhaltender Weg in der Fläche $\mathcal{F}^*(\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mu(p) = +1$.

Beweis: Betrachte den Transport der durch $(1, i) \in T_{\gamma(0)}\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ definierten Orientierung (der Anfangspunkt ist nach Definition gleich dem Endpunkt und liegt im offenen Teil der Fläche). Beim Übergang über eine 1-Zelle, die durch ein Schlitzpaar $(j, \lambda(j))$ bestimmt ist, geht die Orientierung, die durch $(1, \pm i)$ definiert ist, in die durch $(1, \dot{T(j)}(\pm i))$ über, was zu zeigen war. $\square$

2.3.7 Korollar:

$\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ ist orientierbar $\Leftrightarrow$ die Monodromie einer jeden geschlossenen Kette ist trivial. $\square$.

Bemerkung: Um dieses Kriterium zu überprüfen, müssen natürlich nur endlich viele Ketten überprüft werden, weil es endlich viele Ketten gibt, die alle Ketten durch Komposition erzeugen.

2.4 Kompaktifizierung Kleinscher Flächen

2.4.1 Definition:

Eine (nicht-kompakte) Kleinsche Fläche F heißt kompaktifizierbar*, falls es eine kompakte Kleinsche Fläche $\hat{F}$ und eine konforme Einbettung $\iota : F \to \hat{F}$ so, dass $M \setminus \iota(M)$ endlich ist, gibt.*

Bemerkung: Es gibt „viele“Kleinsche Flächen, die nicht kompaktifizierbar sind. Das sieht man im orientierbaren Fall daran, dass für kompaktifizierbare Flächen der Satz von Liouville gilt: Jede beschränkte holomorphe Funktion ist konstant. Ein Gebiet U in der komplexen Ebene etwa ist genau dann kompaktifizierbar, wenn $U = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$ ist.

2.4.2 Proposition:

1. Die Kompaktifizierung ist, falls sie existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

2. Eine Kleinsche Fläche ist kompaktifizierbar genau dann, wenn es ein Kompaktum $K \subset F$ gibt, so dass $F \setminus K$ aus endlich vielen orientierbaren Zusammenhangskomponenten besteht, deren jede eine konforme Abbildung f auf die punktierte Einheitskreisscheibe besitzt, so dass für jeden Randpunkt p von K gilt: $\lim_{q \in F \setminus K : q \to p} |f(q)| = 1$.
3. Die Kompaktifizierung ist genau dann orientierbar, wenn die Ausgangsfläche orientierbar ist.
4. Seien F, G offene Kleinsche Flächen und $f : F \to G$ eine endlich-blättrige, eigentliche, endlich oft verzweigte konforme Überlagerung. Dann ist F kompaktifizierbar, falls G kompaktifizierbar ist.

Beweis: ad 1: Seien zwei Kompaktifizierungen gegeben. In Kreisumgebungen der hinzugefügten Punkte läßt sich eine konforme Struktur definieren. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz gibt es eine glatte Fortsetzung. Diese liefert den gewünschten Isomorphismus.
ad 2: Dies ist lediglich eine Umformulierung der Definition.
ad 3: $\hat{F}$ orientierbar $\Rightarrow$ F orientierbar ist evident.
Sei $\hat{F}$ nicht orientierbar. Dann kann ein Möbiusband in $\hat{F}$ eingebettet werden. Daraus folgt sofort, dass ein Möbiusband in F eingebettet werden kann.
ad 4: Sei G kompaktifizierbar und $g_1, \ldots, g_m$ seien die hinzugefügten Punkte. Wähle dianalytische Karten $\phi_i : U_i \to \mathbb{E}$, wobei $g_i \in U_i$ und $\phi_i(g_i) = 0$. Ferner besitze f keine Verzweigungspunkte über U_i.
Seien $V_{i,1}, \ldots, V_{i,r_i}$ die Komponenten von $f^{-1}(U_i)$. Betrachte eine davon und nenne sie abkürzend V. $f : V \to U_i \setminus g_i$ ist jetzt eine unverzweigte Überlagerung mit einer endlichen Blätterzahl k. $\phi_i \circ f$ ist nach Wahl einer geeigneten Orientierung auf V eine nullstellenfreie holomorphe Funktion.[1]
Diese besitzt eine holomorphe k-te Wurzel. Das ist wie folgt zu sehen: Sei V eine Riemannsche Fläche und $h : V \to \mathbb{E}^\times$ eine unverzweigte holomorphe k-blättrige Überlagerung. Es gilt dann folgende Gleichung für 1-Formen: $h^* \frac{dz}{z} = \frac{dh}{h}$. Daraus folgt für jeden Zyklus γ in V:

$$\frac{1}{2\pi i k} \int_\gamma \frac{dh}{h} = \frac{1}{2\pi i k} \deg(h) \int_{f_*\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{f_*\gamma} \frac{dz}{z},$$

also eine ganze Zahl. Deshalb existiert eine k-te Wurzel.
Dann liefert $\sqrt[k]{\phi_i \circ f}$ eine konforme Karte auf V mit Bildbereich $\mathbb{E}^\times$. Es kann ein unendlich ferner Punkt gewählt werden, und die konforme Karte

[1] V ist orientierbar, weil $w_1(T(V \setminus f^{-1}(g_i)) = w_1(f^* T(U_i \setminus g_i) = f^* w_1(T(U_i \setminus g_i)$. Deshalb ist wegen eines bekannten Kriteriums (siehe [Hu]; S.260) $V \setminus f^{-1}(g_i)$ und damit V selbst orientierbar.

besitzt eine stetige Fortsetzung $V \cup \{\infty\} \to \mathbb{E}$, $\infty \mapsto 0$. Verfahre so mit jeder Komponente über jedem zu G hinzugefügten Punkt. $\square$

Wir wollen nun beweisen, dass die abgeschlossene Realisierung einer Parallelschlitzkonfiguration eine kompaktifizierbare Kleinsche Fläche ist. Dafür benötigen wir noch einige kombinatorische Sprechweisen.

Sei p_0 ein beliebiger Index in $\underline{2h}$. Wir definieren eine Kette, zusammen mit Vorzeichen $\epsilon, \epsilon_0 := +1$ gemäß dem folgenden Algorithmus:

$$p_{2j+1} := \lambda(p_{2j})$$

$$\epsilon_{2j+1} := T(p_{2j})\epsilon_{2j}$$

$$p_{2j} := \begin{cases} p_{2j-1} + \epsilon_{2j-1} & \text{, falls } \alpha(p_{2j} + \epsilon_{2j-1}) = \alpha(p_{2j}), \\ \min\alpha^{-1}(\alpha(p_{2j-1})) & \text{, falls } \alpha(p_{2j} + \epsilon_{2j-1}) \neq \alpha(p_{2j}) \text{ und } \epsilon_{2j-1} = +1, \\ \max\alpha^{-1}(\alpha(p_{2j-1})) & \text{, falls } \alpha(p_{2j} + \epsilon_{2j-1}) \neq \alpha(p_{2j}) \text{ und } \epsilon_{2j-1} = -1. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\epsilon_{2j} := \epsilon_{2j-1}$$

Notwendigerweise ist dieser Algorithmus periodisch. Zwei solcher so definierter Ketten p und q heißen äquivalent, falls entweder $p_j = q_{j+n}$ für ein festes $n \in \mathbb{Z}$ gilt (modulo der Länge von p bzw q gerechnet), oder falls gilt $p_j = q_{n-j}$. Eine Äquivalenzklasse solcher derart definierter Ketten heißt *Randkette* von $\mathcal{L}$ [2]. Die Ordnung einer Randkette $ord(p)$ ist folgendermaßen definiert: Sei r die Periodenlänge der Kette p. Die Ordnung ist die Häufigkeit, mit der in der Definition von p_{2j} die zweite oder die dritte Alternative auftritt. Offenbar ist die Ordnung immer kleiner oder gleich der Zahl der Ebenen. Geometrisch anschaulich besagt diese Zahl, wieviele von den rechten Rändern eines großen Rechtecks von der Kette durchlaufen werden
Eine Randkette heißt *kurz*, wenn ihre Ordnung null ist.

2.4.3 Satz:

Die abgeschlossene Realisierung einer Parallelschlitzkonfiguration ist kompaktifizierbar. Die Zahl der hinzugefügten Punkte ist gleich der Zahl k der Randketten.

[2] eine solche Kette beschreibt einen Weg, der den Rand der Rechtecke $[-R, R]^2$ für $R >> |z_i|$ für alle i auf den einzelnen Ebenen umschreibt. Daher der Name.

Beweis: Der Beweis wird in zwei Schritten geführt. Zunächst konstruieren wir eine verzweigte, eigentliche Überlagerung auf eine Fläche, die aus einer Parallelschlitzkonfiguration auf *einer* Ebene entsteht. Wegen der obigen Proposition reicht es dann, den Fall $m = 1$ zu betrachten, was im zweiten Schritt geschieht.
Zum 1.Beweisschritt:
Wähle eine äquivalente Konfiguration[3], so, dass für *alle* Indices i gilt: $pr^{\mathbb{R}}\Im(z_i) \leq pr^{\mathbb{R}}\Im(z_{i+1})$ und $\Im(z_i) < \Im(z_{i+1})$, falls $\alpha(i) < \alpha(i+1)$. Hier sind die echten Imaginärteile gemeint.
Die Projektion $\mathbb{C} \times \underline{2h} \to \mathbb{C}$ definiert nun, zusammen mit der alten Paarung und der alten Typfunktion, eine neue Konfiguration $\mathcal{L}'$. Diese neue Konfiguration ist regulär und zusammenhängend, was leicht einzusehen ist.
Die Projektion definiert eine konforme eigentliche verzweigte Überlagerung, $\mathcal{F}^*(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}^*(\mathcal{L}')$, denn die Projektion kommutiert mit den Identifikationen. Konformität auf der offenen Realisierung ist klar, auf den Bildern der Schlitze ist dies ebenfalls ganz klar, auf den Bildern der Schlitzenden folgt das aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz. Die Überlagerung ist eigentlich. Also können wir uns auf den Fall $m = 1$ zurückziehen. $\square(1)$
2.Beweisschritt: Diejenigen Stücke, die von einer kurzen Randkurve begrenzt werden, sind einfach zu behandeln: Der Streifen $(-\infty, 0) \times (a, b)$ wird durch die biholomorphe Abbildung $z \mapsto exp(\frac{2\pi(z-ia)}{b-a}$ auf die geschlitzte Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}^- := \mathbb{E} \setminus [0, 1)$ abgebildet. Diese Abbildung liefert eine biholomorphe Abbildung auf die punktierte Einheitskreisscheibe, die der Limesbedingung aus der Proposition genügt.

Die lange Randkurve (Es gibt notwendigerweise genau eine solche) ist schwieriger zu betrachten. Wir sind fertig, wenn wir die folgende Aussage bewiesen haben: *Sei* $S := (-\infty, 0] \times [-a, +a]$ *und* $Q := [-R, +R]^2$ *und* $G := \mathbb{C} \setminus (Q \cup S)$. *Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung* $\Phi : G \to \mathbb{E}^-$, *die eine stetig differenzierbare Fortsetzung* $\hat{\Phi}$ *auf* $G \cup \partial S$ *besitzt, die die Ränder miteinander identifiziert:* $\hat{\Phi}(t + ia) = \hat{\Phi}(t - ia)$. Durch Translationen, geeignete Wahl von a und R folgt die Kompaktifizierbarkeit der Fläche.
Der Riemannsche Abbildungssatz besagt die Existenz genau einer biholomorphen Abbildung

$$\Phi : G \to \mathbb{E}^-$$

mit $\Phi(+2R) = \frac{-1}{2}$ und $\Phi'(2R) > 0$. Weil die Ränder stückweise reell-

[3]Der Begriff der Äquivalenz von Parallelschlitzkonfigurationen wird in einem späteren Abschnitt eingeführt; dass man eine solche äquivalente Konfiguration wählen kann, ist offensichtlich.

analytisch sind, gibt es eine stetige Fortsetzung auf den Rand[4], zumindest dort, wo der Rand reell-analytisch ist. Ein Symmetrieargument führt nun zum Ziel: Φ und $z \mapsto \overline{\Phi(\bar{z})}$ sind beides biholomorphe Abbildungen mit demselben Bildgebiet, gleichem Wert und gleicher Ableitung an der Stelle +2R. Aus der Eindeutigkeitsaussage im Riemannschen Abbildungssatz folgt: $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$ für alle z. Daraus folgt die Existenz einer Fortsetzung mit den gewünschten Eigenschaften. Zunächst gilt: z reell, dann ist $\Phi(z)$ reell, und die Ableitung nimmt auf der reellen Achse ebenfalls reelle Werte an, welche positiv sein müssen. Also gilt: $lim_{z \to R} \Phi(z) = -1$. Ferner sind die Limites $lim_{z \to t \pm ia}$, $t < 0$ zueinander konjugiert, müssen also für genügend große negative Werte von t übereinstimmen und auf dem Intervall $[0, 1]$ liegen. Damit ist alles klar. Die Aussage über die Zahl der hinzugefügten Punkte ist nunmehr trivial. □

Es ist nun gerechtfertigt, von der Kompaktifizierung der Fläche $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ zu sprechen. Diese wird in Zukunft immer die *kompakte Realisierung* der Parallelschlitzkonfiguration genannt und mit dem Symbol $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ bezeichnet werden. Die harmonische Funktion $u_{\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ hat in den hinzugefügten Punkten eine Singularität. Die Form dieser Singularität wird im folgenden noch untersucht.

2.4.4 Proposition:

Die Funktion $u = u_{\mathcal{L}}$ besitzt an den hinzugefügten Punkten eine Singularität von folgender Form: Ist eine um einen der unendlich fernen Punkte, einer der Randketten p zugeordnet, zentrierte dianalytische Karte w gegeben, so hat u in dieser Karte die Form:

$$u(w) = \begin{cases} a\log(|w|) + g(w) & , \textit{falls } ord(p) = 0 \\ \frac{1}{2}\Re(\sum_{j=2}^{k} \frac{-a_j}{(j-1)w^{j-1}}) + a_1\log(|w|) + g(w) & , \textit{sonst} \end{cases} \tag{2.3}$$

wobei g jeweils eine harmonische stetige Funktion ist.

Beweis: Wähle zuerst eine Orientierung in der Umgebung eines jeden in Betracht kommenden Punktes. Zunächst bemerkt man, dass u keine wesentliche Singularität haben kann, dass also ∂u eine *meromorphe* 1-Form ist. Also ergibt sich, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt:

[4] [FL], Kapitel VI

$$\partial u = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{w^j} dw + h(w)dw$$

mit $a_j \in \mathbb{C}$ und h einer holomorphen Funktion. Wegen der Gleichung $2\partial\Re f = \partial f$ für holomorphe Funktionen ergibt sich:

$$u = \frac{1}{2}\Re(\sum_{j=2}^{k} \frac{-a_j}{(j-1)w^{j-1}}) + a_1 \log(|w|) + g(w).$$

g ist hierbei wieder eine harmonische Funktion in der Kreisumgebung.

Dann überzeugt man sich davon, dass der Typ der Singularität durch den lokalen Nullstellenindex des Vektorfeldes ∇u klassifiziert wird. Es gilt nämlich

$$\mathrm{ind}_0 \nabla \Re z^n = 1 - n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ und} \tag{2.4}$$

$$\mathrm{ind}_0 \nabla log|z| = 1, \tag{2.5}$$

was sich durch Betrachten der entsprechenden Vektorfelder ergibt[5]. Umgekehrt stellt man fest, dass der Index des Gradientenfeldes $\nabla \Re z$ genau den Wert 1+Ordnung der Randkurve hat. $\square$.

Im folgenden werden wir nur noch Parallelschlitzkonfigurationen betrachten, deren Randketten höchstens die Ordnung 1 haben. Notwendigerweise gibt es dann genau m Randketten der Ordnung 1 und endlich viele weitere der Ordnung Null. Die Funktion $u_{\mathcal{L}}$ besitzt dann nur noch Singularitäten der Form $a\log(|w|)$ oder $\Re(\frac{a}{w}) + a\log(|w|)$, es handelt sich also um eine Dipolfunktion.

Es sei noch angemerkt, dass es keine kanonische Nummerierung der verschiedenen Punkte mit logarithmischen Singularitäten gibt. Ganz im Gegensatz zu den Polen erster Ordnung: Da jeder dieser Pole genau einer Ebene der Parallelschlitzkonfiguration entspricht, besitzen diese Pole eine natürliche Nummerierung.

[5]Beweis: $d\Re(z^m) = m\Re(z^{m-1})dx - m\Im(z^{m-1})dy$ und $d(log(|z|) = \Re(\frac{1}{z})dx - Im(\frac{1}{z})dy$. Daraus folgen beide Formeln aus der Formel: $ind_0 f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{df}{f}$, wenn das Vektorfeld f als Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ angesehen wird.

2.5 Der topologische Typ der kompakten Realisierung einer Parallelschlitzkonfiguration. Die Verklebeabbildung

2.5.1 Satz:

Es sei $\mathcal{L}$ eine reguläre zusammenhängende Parallelschlitzkonfiguration. Wenn die kompakte Realisierung $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ die Eulerzahl χ hat und $u_{\mathcal{L}}$ m Dipole und k weitere logarithmische Singularitäten besitzt, dann hat $\mathcal{L}$ m Ebenen mit $2m + k - \chi$ Schlitzpaaren.

Beweis: Es sei $\mathcal{L}$ eine Parallelschlitzkonfiguration auf m Ebenen mit 2h Schlitzen. $\mathcal{L}$ sei zusammenhängend, regulär und die Kompaktifizierung sei derart, dass genau m Randkurven der Ordnung 1 und k kurze Randkurven existieren. Wir können nun die Eulercharakteristik von $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ berechnen.
Es gibt zunächst h 0-Zellen von den Schlitzenden und $m + k$ weitere durch die Kompaktifizierung. Ferner haben wir $2h$ 1-Zellen und m 2-Zellen. Die Eulerzahl berechnet sich also zu $\chi(\mathcal{F}(\mathcal{L}) = 2m - h + k = c((\mathcal{F}(\mathcal{L}))(1 - g((\mathcal{F}(\mathcal{L}))$. $\square$.

Im Falle gerader Eulerzahl gibt es immer zwei Sorten von Flächen, nämlich orientierbare und nichtorientierbare eines höheren Geschlechts. Diese werden auseinandergehalten durch den Orientierungscharakter der Parallelschlitzkonfiguration.
Der „klassische“Fall mit $\chi = 2 - 2g$, $k = 0$ und $m = 1$ liefert die bekannte Anzahl $h = 2g$.
Wir führen noch eine neue Notation ein: $PSK(g, c, m, k)$ sei die Menge aller regulären, zusammenhängenden Parallelschlitzkonfigurationen $\mathcal{L}$ auf m Ebenen, so, dass $\mathcal{F}^*(\mathcal{L})$ eine Kompaktifizierung mit m Dipolen und k weiteren logarithmischen Singularitäten erlaubt, wie in den letzten Abschnitten beschrieben.

2.5.2 Die Verklebeabbildung

Wir zeigen jetzt, dass die Verklebevorschriften und die Kompaktifizierung von Parallelschlitzkonfigurationen eine wohldefinierte Abbildung vom Raum $PSK(g, c, m, k)$ in das Bündel der Dipolfunktionen $\mathcal{D}(g, c, m, k)$ ergibt. Diese Abbildung nennen wir in Zukunft die *Verklebeabbildung*.
In der Formulierung des nächsten Satzes ist zu beachten, dass Elemente des Bündels der Dipolfunktionen immer dann mit Angabe der Basisfläche notiert

werden, wenn diese Basisfläche wichtig ist.
Ferner sei eine „Standardfläche“ $F_{g,c,k,l}$ vom Geschlecht g, Orientierungscharakter c mit m Richtungen und k weiteren Punkten gewählt. Orientierungen an dem Punkt, an dem die erste Richtung sitzt, seien ebenfalls gegeben.

2.5.3 Satz:

Der Verklebeprozess definiert eine Abbildung

$$\mathcal{G} : PSK(g, c, m, k) \to \mathcal{D}(g, c, m, k)$$

$$\mathcal{L} \mapsto (\mathcal{F}(\mathcal{L}), u_{\mathcal{L}}).$$

Beweis: Es sei $\mathcal{L}$ eine Parallelschlitzkonfiguration. Nach dem Bewiesenen ist $\mathcal{F}'(\mathcal{L})$ kompaktifizierbar und liefert eine Fläche des Orientierungscharakters c, des Geschlechts g, mit m ausgezeichneten (und durch Nummerierung der Ebenen voneinander zu unterscheidenden) Punkten mit Richtungen in diesen Punkten, sowie k weiteren Punkten, die aber nicht kanonisch nummerierbar sind. In der Richtung, die an der ersten Ebene sitzt, ist überdies durch die Orientierung der komplexen Ebene eine Orientierung gegeben. Nach Satz 1.3.4 gibt es einen Diffeomorphismus

$$\varphi : \mathcal{F}'(\mathcal{L}) \to F_{g,c,k,l},$$

wobei $F_{g,c,k,l}$ unsere Standardfläche ist. φ kann so gewählt werden, dass die Punkte und Richtungen und die Orientierung an einem Punkt entsprechend abgebildet werden. Die Zurückziehung der konformen Struktur auf $\mathcal{F}'(\mathcal{L})$ mittels φ^{-1} liefert eine konforme Struktur auf $F_{g,c,k,l}$. Äquivalenzklassenbildung gezüglich der zugehörigen $Diff(F; P; \Xi)$-Operation ergibt ein Element im Modulraum. Je zwei Wahlen von φ unterscheiden sich um ein Element aus $Diff(F; P; \Xi)$, ergeben also dasselbe Element im Modulraum.
Nach dem gesagten ist eine Dipolfunktion $u_{\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{F}'(\mathcal{L})$ definiert. Das liefert ein Element in $\mathcal{D}(g, c, k, l)$. □

2.6 Symmetrien der Verklebeabbildung, Parallelschlitzgebiete

2.6.1 Definition:

Zwei Parallelschlitzkonfigurationen $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ heißen geometrisch äquivalent*, falls es einen Isomorphismus von punktierten gerichteten Kleinschen Flächen mit Dipolfunktionen zwischen ihren kompakten Realisierungen gibt. Mit anderen Worten, es gibt einen konformen Diffeomorphismus $\Phi : \mathcal{F}(\mathcal{L}') \to \mathcal{F}(\mathcal{L})$ mit $u_{\mathcal{L}} \circ \Phi = u_{\mathcal{L}'}$. Dieser habe die zusätzliche Eigenschaft, dass Φ die Nummerierung der Pole erhält. Dagegen kann Φ die logarithmischen Singularitäten durchaus permutieren. Außerdem soll am ersten Dipol die Orientierung erhalten sein.*

Dieser Begriff ist vorerst kaum brauchbar, denn es handelt sich um eine „akademische Bedingung". Zu entscheiden, dass zwei Konfigurationen *nicht* äquivalent sind, ist ohne Rückgriff auf die Hilbert-Uniformisierung nämlich gar nicht möglich. Der Weg in diesem Abschnitt ist also vorgezeichnet: Wir werden zunächst einige Äquivalenzrelationen angeben, die sich aus den Symmetrien der Parallelschlitzkonfigurationen ergeben. Die Beweise, dass es sich dabei um Äquivalenzen handelt, sind allesamt fast trivial. Nicht trivial aber ist die Aussage, dass die von uns angegebenen Äquivalenzen ein Erzeugendensystem für alle Äquivalenzen gibt. Dies wird erst im nächsten Kapitel möglich sein.

2.6.2 Translation um eine imaginäre Zahl auf jeder Ebene

Seien $a_1, \dots a_m$ imaginäre Zahlen. Sei $\mathcal{L}$ eine Parallelschlitzkonfiguration auf m Ebenen mit Paarung λ, Ebenenfunktion α und Typfunktion T. Setze $z_i' := z_i + a_{\alpha(i)}$ und $\lambda' := \lambda$; $T' := T$, $\alpha' = \alpha$. Das liefert eine neue Parallelschlitzkonfiguration $\mathcal{L}'$
Behauptung: Diese ist analytisch äquivalent zur Alten.
Der Beweis ist trivial. Es ist offensichtlich, dass $\mathcal{L}'$ genau dann regulär (orientierbar, zusammenhängend) ist, wenn $\mathcal{L}$ regulär (orientierbar, zusammenhängend) ist.

2.6.3 Konjugation auf einer Ebene

Sei $j \in \underline{m}$ und $\mathcal{L}$ wieder eine Parallelschlitzkonfiguration auf m Ebenen. Sei $\alpha^{-1}(j) = \{k, \ldots, k+r\}$ die Ebenenfunktion. Setze

$$z_i' = \begin{cases} z_i & \text{, falls } \alpha(i) \neq j, \\ \overline{z_{-i+2k+r}} & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\lambda'(i) = \begin{cases} \lambda(i) & \text{, falls } \alpha(i), \alpha(\lambda(i)) \neq j, \\ -\lambda(i) + 2k + r & \text{, falls } \alpha(i) \neq j, \alpha(\lambda(i)) = j, \\ \lambda(-i + 2k + r) & \text{, falls } \alpha(i) = j; \alpha(\lambda(i)) \neq j, \\ \lambda(-i + 2k + r) + 2k + r & \text{, falls } \alpha(i) = j = \alpha(\lambda(i)). \end{cases} \tag{2.7}$$

$$T'(i) = \begin{cases} T(i) & \text{, falls } \alpha(i) \neq j \text{ und } \alpha(\lambda(i) \neq j, \\ T(i) & \text{, falls } \alpha(i) = j = \alpha(\lambda(i)), \\ -T(i) & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Die auf diese Weise eintstandene Parallelschlitzkonfiguration heißt *die auf der j-ten Ebene konjugierte*. Offensichtlich gilt, dass sie geometrisch äquivalent zur ursprünglichen ist. Dies sieht man wie folgt: Der erforderliche Diffeomorphismus wird induziert durch die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{C} \times \underline{m} \to \mathbb{C} \times \underline{m},$$

$\Psi(z, k) = (z, k)$, wenn $k \neq j$ und $\Psi(z, j) = (\bar{z}, j)$.

2.6.4 Proposition:

Ist eine Parallelschlitzkonfiguration gegeben, so, dass die assoziierte Fläche orientierbar ist, so gibt es eine äquivalente Konfiguration mit trivialer Typfunktion, also $T \equiv 1$. Die Äquivalenz kann durch Hintereinanderschaltung von Konjugationen auf einer Ebene erreicht werden.

Beweis: Für $m = 1$ ist die Aussage wahr[6].
Aus der Voraussetzung der Orientierbarkeit ergeben sich folgende Tatsachen:
1. Alle internen Paarungen (d.h. $\alpha(\lambda(i)) = \alpha(i)$) sind vom Typ $+1$.
2. Ist $\lambda(j_i) = k_i$, $i = 1, 2$ und $\alpha(j_1) = \alpha(j_2)$ sowie $\alpha(k_1) = \alpha(k_2)$, so folgt $T(j_1) = T(j_2)$, sonst hätte die Kette $j_1, j_2, k_2, k_1)$ negative Monodromie.
Nenne zwei Ebenen p, q *direkt verbunden*, falls es eine Paarung von Schlitzen,

[6] Zaw,S.18

$\lambda(i) = j$ mit $\alpha(i) = p$ und $\alpha(j) = q$ gibt. Nach dem eben Gesagten ist der Typ der Verbindung von p nach q wohldefiniert, das heißt, es gilt entweder $T(i) = +1$ oder $T(i) = -1$ für alle solchen i. Konjugation auf einer Ebene p kehrt den Typ der Verbindung mit jeder direkt verbundenen Ebene um.
Wähle nun eine Ebene p_0. Sei eine Ebene p_1 mit p_0 verbunden. Durch eventuelle Konjugation auf p_1 erreicht man, dass die Verbindung vom Typ $+1$ ist. Verfahre so mit allen Ebenen, die mit p_0 verbunden sind. Dabei können keine „Störungen“auftreten: Sind drei Ebenen p_i paarweise miteinander verbunden, und ist die Verbindung von p_0 nach p_1 und die Verbindung von p_0 nach p_2 vom Typ $+1$, so auch die Verbindung von p_1 nach p_2.
Das Verfahren läßt sich fortsetzen, bis alle Verbindungen vom Typ $+1$ sind.
$\square$

Vereinbarung: In Zukunft wollen wir unter den Parallelschlitzkonfigurationen, deren kompakte Realisierung orientierbar ist, nur noch diejenigen betrachten, für die die oben beschriebene Äquivalenz erreicht werden kann, ohne die erste Ebene zu bewegen.

2.6.5 Rauzy-Sprünge

Etwas subtilere Äquivalenzen sind die sogenannten *Rauzy-sprünge*, die nun eingeführt werden. Die Situation für ein solchen Sprung ist die, dass für zwei benachbarte Indices gilt $L_{i-1} \subset L_i$ oder umgekehrt $L_i \subset L_{i-1}$. In diesem Fall ist die Konfiguration äquivalent zu einer, die entsteht, indem der kürzere Schlitz über den längeren „springt“. Die genaue Formulierung verlangt einige Fallunterscheidungen.
Es seien $1 \leq m < n \leq 2h$ und $\rho_{m,n}$ die durch folgende Vorgaben bestimmte Permutation von $\underline{2h}$: $\rho_{m,n}(i) = i$ für $1 \leq i < m$ und $n < i \leq 2h$; $\rho_{m,n}(i) = i+1$ für $m \leq i < n$ sowie $\rho_{m,n}(n) = m$ [7].
Wir unterscheiden nun vier Fälle von ineinanderliegenden Schlitzen.

1. Fall Sei $L_{k-1} \subset L_k$, $k < \lambda(k)$, $T(k) = +1$. Setze in diesem Fall:

[7] in Zykelschreibweise ist das $(m\ m+1\ \ n)$.

$$z_i' := \begin{cases} z_i & \text{, falls } i = 1, \ldots, k-2, \\ z_{i+1} & \text{, falls } i = k-1, \ldots, \lambda(k)-1, \\ z_{k-1} + (z_{\lambda(k)} - z_k) & \text{, falls } i = \lambda(k), \\ z_i & \text{, falls } i = \lambda(k)+1, \ldots, 2h \end{cases} \tag{2.9}$$

seien die neuen Schlitzenden. Die neue Ebenenfunktion α' sei definiert durch

$$\alpha'(i) := \begin{cases} \alpha(i) & \text{, falls } i = 1, \ldots, k-2, \\ \alpha(i+1) & \text{, falls } i = k-1, \ldots, \lambda(k)-1, \\ \alpha(\lambda(k)) & \text{, falls } i = \lambda(k), \\ \alpha(i) & \text{, falls } i = \lambda(k)+1, \ldots, 2h. \end{cases} \tag{2.10}$$

Die neue Paarungsfunktion sei definiert durch

$$\lambda' := \rho_{k-1,\lambda(k)}^{-1} \circ \lambda \circ \rho_{k-1,\lambda(k)},$$

die neue Typfunktion durch:

$$T' := T \circ \rho_{k-1,\lambda(k)}.$$

Ein erklärendes Bildchen findet sich bei [Bö], S.89.

2. Fall Sei $L_{k+1} \subset L_k$, $k < \lambda(k)$, $T(k) = +1$. Setze in diesem Fall:

$$z_i' := \begin{cases} z_i & \text{, falls } i = 1, \ldots, k, \\ z_{i+1} & \text{, falls } i = k+1, \ldots, \lambda(k)-2, \\ z_{k+1} + (z_{\lambda(k)} - z_k) & \text{, falls } i = \lambda(k)-1, \\ z_i & \text{, falls } i = \lambda(k), \ldots, 2h \end{cases} \tag{2.11}$$

seien die neuen Schlitzenden. Die neue Ebenenfunktion α' sei definiert durch

$$\alpha'(i) := \begin{cases} \alpha(i) & \text{, falls } i = 1, \ldots, k, \\ \alpha(i+1) & \text{, falls } i = k+1, \ldots, \lambda(k)-2, \\ \alpha(\lambda(k)) & \text{, falls } i = \lambda(k)-1, \\ \alpha(i) & \text{, falls } i = \lambda(k), \ldots, 2h. \end{cases} \tag{2.12}$$

Die neue Paarungsfunktion sei definiert durch

$$\lambda' := \rho^{-1}_{k+1,\lambda(k)-1} \circ \lambda \circ \rho_{k+1,\lambda(k)-1},$$

die neue Typfunktion durch:

$$T' := T \circ \rho_{k+1,\lambda(k)-1}.$$

Wieder siehe [Bö],S.90 für ein erklärendes Bild.

3. Fall Sei $L_{k-1} \subset L_k$, $k < \lambda(k)$, $T(k) = -1$. Setze in diesem Fall:

$$z'_i := \begin{cases} z_i & \text{, falls } i = 1, \dots, k-2, \\ z_{i+1} & \text{, falls } i = k-1, \dots, \lambda(k)-2, \\ z_{k-1} + (z_{\lambda(k)} - z_k) & \text{, falls } i = \lambda(k)-1, \\ z_i & \text{, falls } i = \lambda(k), \dots, 2h \end{cases} \tag{2.13}$$

seien die neuen Schlitzenden. Die neue Ebenenfunktion α' sei definiert durch

$$\alpha'(i) := \begin{cases} \alpha(i) & \text{, falls } i = 1, \dots, k-2, \\ \alpha(i+1) & \text{, falls } i = k-1, \dots, \lambda(k)-2, \\ \alpha(\lambda(k)) & \text{, falls } i = \lambda(k)-1, \\ \alpha(i) & \text{, falls } i = \lambda(k), \dots, 2h. \end{cases} \tag{2.14}$$

Die neue Paarungsfunktion sei definiert durch

$$\lambda' := \rho^{-1}_{k-1,\lambda(k)-1} \circ \lambda \circ \rho_{k-1,\lambda(k)-1},$$

die neue Typfunktion durch:

$$T' := \epsilon_{\lambda(k)-1}(T \circ \rho_{k-1,\lambda(k)}).$$

Hierbei ist $\epsilon_{\lambda(k)-1}$ die Funktion $\underline{2h} \to \{\pm 1\}$ mit

$$\epsilon_{\lambda(k)-1}(j) := \begin{cases} -1 & \text{, falls } j = \lambda(k)-1 \text{ oder } j = \lambda'(\lambda(k)-1), \\ +1 & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{2.15}$$

4. Fall Sei $L_{k+1} \subset L_k$, $k < \lambda(k)$, $T(k) = -1$. Setze in diesem Fall:

$$z_i' := \begin{cases} z_i & \text{, falls } i = 1, \ldots, k, \\ z_{i+1} & \text{, falls } i = k+1, \ldots, \lambda(k) - 2, \\ z_{k+1} + (z_{\lambda(k)} - z_k) & \text{, falls } i = \lambda(k) - 1, \\ z_i & \text{, falls } i = \lambda(k), \ldots, 2h \end{cases} \tag{2.16}$$

seien die neuen Schlitzenden. Die neue Ebenenfunktion α' sei definiert durch

$$\alpha'(i) := \begin{cases} \alpha(i) & \text{, falls } i = 1, \ldots, k, \\ \alpha(i+1) & \text{, falls } i = k+1, \ldots, \lambda(k) - 2, \\ \alpha(\lambda(k)) & \text{, falls } i = \lambda(k) - 1, \\ \alpha(i) & \text{, falls } i = \lambda(k), \ldots, 2h. \end{cases} \tag{2.17}$$

Die neue Paarungsfunktion sei definiert durch

$$\lambda' := \rho_{k+1,\lambda(k)-1}^{-1} \circ \lambda \circ \rho_{k+1,\lambda(k)-1},$$

die neue Typfunktion durch:

$$T' := \epsilon_{\lambda(k)-1}(T \circ \rho_{k+1,\lambda(k)-1}).$$

Erklärende Bilder zu den letzten beiden Fällen, siehe [Zaw].

Die von diesen Äquivalenzen erzeugten Äquivalenzen heißen *Rauzy-sprünge*. Dass es sich tatsächlich um geometrische Äquivalenzen im Sinne der obigen Definition handelt, ist durch scharfes Hinsehen zu erkennen.

2.6.6 Definition:

Ein Parallelschlitzgebiet *ist eine kombinatorische Äquivalenzklasse von Parallelschlitzkonfigurationen unter den folgenden drei Relationen: Translationen um imaginäre Zahlen, Rauzy-sprünge und Konjugationen an allen Ebenen außer der ersten.*
$PSG(g, c, m, k)$ sei die Menge aller Parallelschlitzgebiete mit dem entsprechenden topologischen Typ.

2.6.7 Operation der Gruppe Sim auf $PSG(g;c;m;k)$

Sim sei die dreidimensionale Liegruppe:

$$\text{Sim} := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} | f(z) = az + b \text{ mit } a \in \mathbb{R}_{>0}; b \in \mathbb{C}\}$$

mit der Komposition von Abbildungen als Gruppenverknüpfung. Sim operiert auf $PSG(g;c;m;k)$ wie folgt: sei f∈Sim und $\mathcal{L}$ ∈PSG(g;c;m;k). $f_*\mathcal{L}$ ist das Parallelschlitzgebiet mit den Schlitzenden $z_i' := f(z_i)$ und unveränderter Paarungs- Typ- und Ebenenfunktion.
Auf der Menge der Dipolfunktionen operiert Sim ebenfalls: $f_*u := f \circ u$.
Es ist klar, dass die Verklebeabbildung $\mathcal{G}$ Sim-äquivariant ist.

2.7 Der Raum der Parallelschlitzgebiete

$PSG(g;c;m;k)$ sei die Menge aller zusammenhängenden regulären Parallelschlitzgebiete, die kompakte Kleinsche Flächen vom Geschlecht g, vom Orientierungscharakter c , mit Dipolzahl m und k weiteren logarithmischen Singularitäten liefern.
Bislang war $PSG(g,c,m,k)$ lediglich eine Menge. Wir können aber sehr leicht eine Topologie auf dieser Menge definieren. Wir erinnern uns, dass $PSK(g,c,m,k) \subset PSK(m, 2m+k+c(g-1))$ (siehe 2.5). Wiederum gilt: $PSK(m,h) \subset (\mathbb{C} \times \tilde{m})^{2h} \times \Sigma_{2h} \times \{\pm 1\}^{\tilde{2h}}$. Also ist $PSG(g,m,c,k)$ der Quotient eines Teilraumes eines euklidischen Raumes. $PSG(g,c,m,k)$ werde in Zukunft mit der Quotiententopologie ausgestattet. Sie ist hausdorffsch, weil alle kombinatorischen Äquivalenzklassen abgeschlossen sind.
Ferner nennen wir $PSG(m,h)$ die Menge aller Parallelschlitzgebiete, deren Repräsentanten m Ebenen und h Schlitzpaare haben. Offenbar gilt
$PSG(g,c,m,k) \subset PSG(m, 2m+k+c(g-1))$.
Der nächste Satz impliziert, dass noch viel mehr gilt. $PSG(g,c,m,k)$ ist nämlich die Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von $PSG(m, 2m+k+c(g-1))$.

2.7.1 Proposition:

Die topologischen Invarianten g, c und k sind stetige (das heißt lokal-konstante) Funktionen $PSG(h;m) \to \mathbb{Z}$.

Beweis: g, c, und k hängen nur von λ und T ab, wie in den entsprechenden Abschnitten dieser Arbeit gezeigt wurde. In der Umgebung einer generischen

Konfiguration (das heißt, alle Schlitze sind disjunkt) sind die Invarianten also konstant. Also kann höchstens an einem nicht-generischen Gebiet eine Unstetigkeit vorliegen. Man sieht leicht, dass das Wegbewegen eines Schlitzes von einem anderen den topologische Typus unverändert lässt. Soll der Typ geändert werden, geht das nur, wenn ein irreguläres Gebiet überquert wird. Diese gehören aber nicht zu dem betrachteten Raum. Das war zu zeigen. □

Es bleibt noch anzumerken, dass die oben angegebene Operation der Gruppe Sim stetig ist, wie zu erwarten war.

2.8 Reduzierte Parallelschlitzkonfigurationen

In diesem Abschnitt wird eine andere Version der Parallelschlitzgebiete diskutiert. Der Vorteil der reduzierten Version liegt darin, dass die Mehrdeutigkeiten, die durch die Rauzy-sprünge ins Spiel kommen, beseitigt wird. Wir beginnen mit der etwas technischen Definition.

2.8.1 Definition:

Eine reduzierte Parallelschlitzkonfiguration *besteht aus den folgenden Daten*:
1. einer endlichen geordneten Menge $M = \{(t_1, k_1), (t_2, k_2), \ldots, (t_s, k_s)\} \subset \mathbb{R} \times \underline{m}$, wobei $(t_i, k_i) < (t_{i+1}, k_{i+1})$ gelte,
2. einer weiteren endlichen Menge $C = \{c_1, \ldots, c_r\}$ mit $-\infty < c_r < c_{r-1} < \ldots < c_1 < \infty$,
3. einer Folge $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r$ von Permutationen der Menge
$M^\pm := \{(t_1, k_1)^-, (t_1, k_1)^+, (t_2, k_2)^-, (t_2, k_2)^+, \ldots, (t_s, k_s)^-, (t_s, k_s)^+\}$,
wobei die folgenden Bedingungen erfüllt seien:
a) $\pi_0((t_i, k_i)^\pm) = (t_i, k_i)^\mp$,
b) π_j ist eine fixpunktfreie Involution,
c) Für alle $i \in \underline{s}$ existiere ein $j \in \underline{r}$, so dass $\pi_j((t_i, k_i)^\pm) \neq \pi_0((t_i, k_i)^\mp)$
d) Es gilt für alle $j \in \underline{r-1} : \pi_{j-1} \neq \pi_j$

Bemerkung zu dieser Definition: c) und d) sorgen dafür, dass *redundante* Niveaus und Schlitze ausgeschlossen sind.

2.8.2 Verklebevorschriften für reduzierte Parallelschlitzkonfigurationen:

Setze:

$$B_n := \overline{\{z \in \mathbb{C} \times \underline{m} | t_n < \Im z < t_{n+1}\}} \times \{n\},$$

wobei $t_0 := (-\infty, 1)$, $t_{s+1} := (+\infty, m)$ gesetzt ist. Es gibt zwei offensichtliche Abbildungen: $p : M^{\pm} \to \{+,-\}$, $q : M^{\pm} \to M$. Auf $\bigcup_{i=0}^{s} B_i$ führen wir folgende Äquivalenzrelation ein:

$$z = (c+it_n, n) \sim \begin{cases} (c + i\pi_j(t_n^+), q(t_n^+)) & \text{, falls } p(\pi_j(t_n^+)) = - \text{ und } c_{j+1} \leq c \leq c_j, \\ (c + i\pi_j(t_n^+), q(t_n^+) - 1) & \text{, falls } p(\pi_j(t_n^+)) = + \text{ und } c_{j+1} \leq c \leq c_j. \end{cases} \tag{2.18}$$

$$z = (c+it_n, n-1) \sim \begin{cases} c + i\pi_j(t_n^-), q(t_n^-)) & \text{, falls } p(\pi_j(t_n^-) = + \text{ und } c_{j+1} \leq c \leq c_j, \\ (c + i\pi_j(t_n^-), q(t_n^-) - 1) & \text{, falls } p(\pi_j(t_n^-)) = - \text{ und } c_{j+1} \leq c \leq c_j. \end{cases} \tag{2.19}$$

Den Quotientenraum $\bigcup_{i=0}^{s} B_i / \sim$ werden wir als *Realisierung* bezeichnen. Wenn $\mathcal{L}$ die reduzierte Parallelschlitzkonfiguration bezeichne, bezeichne $\mathcal{F}^{\circ}(\mathcal{L})$ die offene Realisierung. $\mathcal{F}^{\circ}(\mathcal{L})$ ist eine offene Kleinsche Fläche. Anders als im Falle der (unreduzierten) Parallelschlitzkonfigurationen gibt es kein Problem. Es folgt sofort aus der Definition der Identifizierungen. Eventuelle irreguläre Konfigurationen sind von vorneherein ausgeschlossen.
Ähnlich wie im Falle der Parallelschlitzkonfigurationen können reduzierte Parallelschlitzkonfigurationen um imaginäre Zahlen translatiert werden und an einzelnen Ebenen konjugiert werden. Dies geht nach dem selben Muster und wird hier nicht im Detail ausgeführt.
Die Rauzy-Sprünge spielen dagegen keine Rolle; darin liegt gerade der Vorteil dieser Konstruktion.
Außerdem operiert die Gruppe Sim wieder auf der Menge aller reduzierten Parallelschlitzkonfigurationen. Die nun folgende Konstruktion wird äquivariant bezüglich all dieser Symmetrien sein. Wir definieren noch: Ein *reduziertes Parallelschlitzgebiet* ist eine Äquivalenzklasse reduzierter Parallelschlitzkonfigurationen unter den Relationen, die durch imaginäre Translationen und Konjugationen an einzelnen Ebenen erzeugt werden.
Es sei $RedPSK$ die Menge *aller* reduzierten Parallelschlitzkonfigurationen und $RegPSK$ die Menge aller regulären Parallelschlitzgebiete (egal, ob zusammenhängend oder nicht).

2.8.3 Konstruktion:

Es sei $\mathcal{L}$ eine reguläre Parallelschlitzkonfiguration mit h Schlitzpaaren auf m Ebenen. $(z_1, \ldots, z_{2h})$ seien die Schlitzenden, λ die Paarungs- und T die Typfunktion. Es sei nun $M := \{\Im z_1, \ldots, \Im z_{2h}\} \subset \mathbb{R} \times \underline{m}$ mit der durch die Ordnung auf $\mathbb{R} \times \underline{m}$ induzierten Ordnung. Ferner sei $C := \{\Re z_1, \ldots, \Re z_{2h}\}$, wieder mit der natürlichen Ordnung, die aber absteigend gewählt werde. Wir verdoppeln die Menge M, und stellen uns t^- als das untere, t^+ als das obere Ufer vor. Wir zerlegen die Schlitze mittels der Menge C in lauter Intervalle $I_j := (c_{j+1}, c_j)$, $j = 0, \ldots, r$, $c_0 := \infty$, $c_{r+1} := -\infty$. Weil $\mathcal{L}$ regulär war, wird nun jedes Intervall $t^\pm + iI_j$, $t \in M$ mittels der Verklebevorschriften mit genau einem anderen Intervall $s + iI_j$, $s \in M^\pm$ gepaart. Dies liefert die Involutionen (!) π_j. Dass die vier Eigenschaften (a)-(d) erfüllt sind, ist offensichtlich.
Wir haben eine Abbildung

$$\Phi : RegPSK \to RedPSK$$

konstruiert. Die folgenden drei Eigenschaften sind trivial:

2.8.4 Proposition:

1. $\mathcal{F}'(\mathcal{L})$ und $F(\Phi(\mathcal{L})$ sind homöomorph mittels einer Abbildung, die die Dipolfunktionen erhält.
2. Die Abbildung aus der Menge der Parallelschlitzkonfigurationen in das Bündel der Dipolfunktionen faktorisiert über Φ. 3. Φ ist Sim-äquivariant; Φ ist äquivariant bezüglich Translationen um imaginäre Zahlen und bezüglich Konjugationen an einer Ebene.

2.8.5 Satz:

1. Φ ist surjektiv.
2. $\Phi(\mathcal{L}) = \Phi(\mathcal{L}')$ gilt genau dann, wenn $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}$ Rauzy-äquivalent sind.

Beweisskizze: ad 1: Wir müssen jeder reduzierten Parallelschlitzkonfiguration eine Parallelschlitzkonfiguration zuordnen, deren Reduktion die Ausgangskonfiguration ist.
Dazu geben wir einen Algorithmus an, der zu einer reduzierten Parallelschlitzkonfiguration eine Parallelschlitzkonfiguration produziert.
1. Schritt: Setze $\sigma_i := \pi_i \circ \pi_{i-1}$; $\tau_i := \pi_{i-1} \circ \pi_i = \sigma_i^{-1}$. Zerlege σ_i in disjunkte Zykeln. Wir bemerken folgendes:
Sei $(a_1 \ldots a_n)$ ein Zykel von σ_i. Dann ist $(\pi_{i-1}(a_n) \ldots (\pi_{i-1}(a_1))$ ein Zykel von

σ_i, der von dem ersten verschieden (also disjunkt) ist[8].
Hieraus folgt: die Zykeln in σ_i treten immer in Paaren auf. Wir wählen für jedes Paar einen Repräsentanten. Jeder dieser Zykeln werde nun auf eine kürzeste Art als ein Produkt von Transpositionen dargestellt, also $\zeta = \epsilon_{l-1} \circ \ldots \epsilon_1$, falls der Zykel ζ die Länge l hat. Auf diese Art werde jede der Permutationen σ_i; $i \in \underline{r}$ behandelt.
2. Schritt: das ist der eigentliche Konstruktionsschritt. Wir führen per „Abwärtsinduktion“neue Schlitze ein, bis die fertige Konfiguration entstanden ist. Der Elementarschritt lautet wie folgt: Wir betrachten einen Zykel $\zeta = \epsilon_{l-1} \circ \ldots \epsilon_1$ eines σ_i. Beginnend mit ϵ_1 verfahren wir so: Für jedes ϵ fügen wir zwei Schlitze ein, welche gepaart seien. Ist $\epsilon = (t_0^{\pm} t_1^{\pm})$, so haben die beiden Schlitze die Enden $t_0 + ic_i$ und $t_1 + ic_i$. Der Schlitz mit dem Ende $t_0 + ic_i$ liege unterhalb aller eventuell schon vorhandenen Schlitze mit demselben Imaginärteil, falls die Parität negativ ist, und oberhalb aller dieser Schlitze, falls die Parität positiv ist. Genauso mit dem anderen Schlitz. Der Typ der Paarung sei $+1$, falls die Parität beider gleich ist; -1, wenn die Paritäten verschieden sind. Die Reihenfolge, in der die Zykel abgearbeitet werden, spielt keine Rolle.
3. Schritt: Nachweis, dass die so konstruierte Konfiguration die gewünschte Eigenschaft hat.
Dieser Nachweis fußt auf der folgenden Relation: $\pi_i = \sigma_i \circ \sigma_{i-1} \circ \ldots \sigma_1 \circ \pi_0$ und der folgenden Bemerkung.
Während die π_i´s Paarungsfunktionen der Ufer sind, identifizieren die σ_i´s Ufer (genauer gesagt, sie vertauschen die Ufer). Durch scharfes Hinsehen folgt der Beweis. $\square$(1).
ad 2: Nur im 1.Schritt des vorangegangenen Beweises wurden Wahlen gemacht. Diese werden noch ein letztes Mal eindeutig gemacht, indem wir festlegen, dass erstens bei der Wahl der Zykel diejenigen mit den minimalen Elementen gewählt werden[9]. Zweitens soll bei der Zerlegung der Zykel in Transpositionen die Standardzerlegung genommen werden, also: $(a_1 \ldots a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \ldots (a_1 a_2)$, wobei a_1 das minimale Element sei. Die daraus resultierende Parallelschlitzkonfiguration nennen wir *Normalform.* Es bleibt zu

---

[8] 1.:$\tau_i(\pi_{i-1}(a_j)) = \pi_{i-1}(\sigma_i(a_:j)) = \pi_{i-1}(a_{j+1})$. 2.:$\tau_i^k(\pi_{i-1}(a_1)) = \pi_{i-1}(a_1)$ für $0 < k \leq n \Leftarrow a_1 = \pi_{i-1}\tau_i^k\pi_{i-1}(a_1) = (\pi_{i-1}\tau_i\pi_{i-1})^k(a_1) = \sigma_i^k(a_1)$. Daraus folgt die Zykeleigenschaft. 3.: Die Disjunktheit sieht man wie folgt: Angenommen, $\pi_{i-1}(a_1) = \sigma_i^k(a_1 =\Leftrightarrow \sigma_i^l(a_1) = \tau_i^{k-l}\pi_{i-1}(a_1)$. Falls $k = 2l$ gerade ist, folgt hieraus: $\sigma_i^l(a_1) = \pi_{i-1}\sigma_i^l(a_1)$. Falls $k = 2l + 1$, so folgt: $\sigma_i^{l+1}(a_1) = \pi_{i-1}\sigma_i^l(a_1)$, also $\pi_i(\pi_{i-1}(\sigma_i^l(a_1))) = \pi_{i-1}(\sigma_i^l(a_1))$. Das ist jeweils ein Widerspruch zur Fixpunktfreiheit der π_i

[9] das heißt: beginne mit 1^-, nehme diesen Zykel ins Repräsentantensystem, nehme dann das minimale Element, das von diesem Zykel und seinem Partner noch nicht berücksichtigt wurde, usw.

zeigen, dass eine Parallelschlitzkonfiguration und ihre Normalform Rauzy-äquivalent sind[10].
Die Normalform ist geometrisch wie folgt charakterisiert: Betrachte einen Schlitz, der der untere eines Paares ist. Alle Schlitze, die echt in diesem enthalten sind, liegen unterhalb. Wenn wir einen Zykel der Länge $n > 2$ haben, dann liegen $n-1$ Schlitze davon übereinander, und zwar auf dem niedrigstmöglichen Imaginärteil. Wenn genau ein Schlitz eines Paares echt in einem längeren enthalten ist, dann ist dieser derjenige mit dem kleinstmöglichen Imaginärteil. Die aufgezählte Reihenfolge entspricht der Priorität, nach der diese drei Vorgaben zu beachten sind. Das ergibt ein eindeutig bestimmtes Element in dieser Rauzy-Äquivalenzklasse. Es ist durch eine endliche Folge von Rauzy-sprüngen zu erreichen. $\square$(2).

Aus dem Satz folgt, dass $\mathcal{L}^\circ$ kompaktifizierbar ist; und dass das Geschlecht, der Orientierungscharakter, die Dipolanzahl und die Anzahl zusätzlicher logarithmischer Singularitäten wohldefinierte Größen einer reduzierten Parallelschlitzkonfiguration sind und damit auch die Anzahl „virtueller Schlitzpaare“$h = 2m + k - c(1-g)$ (vergleiche 2.5). Die Kompaktifizierung werden wir mit $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ bezeichnen. Es gilt ferner: $s \leq 2h$, $r \leq h$. Gilt $r = h$, dann auch $s = 2h$. Reduzierte Parallelschlitzkonfigurationen mit $s = 2h$ heißen *generische Konfigurationen*. Sie entsprechen den generischen Parallelschlitzkonfigurationen unter der Reduktionsabbildung Φ.

2.8.6 Definition:

$RedPSK(g, c, m, k)$ sei die Menge aller reduzierten Parallelschlitzkonfigurationen auf m Ebenen, deren kompakte Realisierung das Geschlecht g, den Orientierungscharakter c und die Zahl k weiterer logarithmischer Singularitäten hat.

Bemerkung: Es sei $\sim$ die von den Konjugationen auf Ebenen und Translationen um imaginäre Zahlen erzeugte Äquivalenzrelation. Aus dem Satz folgt,

[10]Nebenbemerkung: Es ist i.a. nicht wahr, dass sich jede Parallelschlitzkonfiguration im Φ-Urbild einer reduzierten Parallelschlitzkonfiguration durch das oben angegebene Kochrezept finden läßt. Ein leichtes Gegenbeispiel ist $\pi_1 = (1^-2^+)(1^+2^-)$; $\pi_2 = (1^-1^+)(2^+2^-)$. Durch die möglichen Wahlen erreicht man nur zwei verschiedene Konfigurationen, die Rauzy-Äquivalenzklasse hat aber drei Elemente. Die nächstliegende Beweisstrategie - jede unreduzierte Konfiguration bestimmt eindeutig Zykel und ihre Zerlegung; ein Wechsel dieser Wahlen läßt sich durch einen Rauzy-Sprung realisieren - führt also nicht zum Ziel.

dass der Mengenquotient $RedPSK(g,c,m,k)/\sim$ bijektiv auf $PSG(g,c,m,k)$ abgebildet werden kann.

2.8.7 Der Raum der reduzierten Parallelschlitzkonfigurationen

Wir statten nun $RedPSK(g,c,m,k)$ mit der Quotiententopologie aus, das heißt, Φ *sei* stetig und offen. Es ist jetzt offensichtlich $RedPSK(g,c,m,k) \cong PSK(g,c,m,k)/Rauzy$.

2.8.8 Einige konvergente Folgen in $RedPSK$

Wir diskutieren jetzt einige Beispiele konvergenter Folgen und stetiger Wege in $RedPSK$. Sei jetzt $\mathcal{L}_n = (M_n, C_n, (\pi_j)_n)$ eine Folge von reduzierten Parallelschlitzkonfigurationen, r_n und s_n die Zahl der Niveaus bzw. Schlitze, und $\mathcal{L}_0 = (M_0, C_0, (\pi_j)_0)$ sei eine weitere, der Kandidat für die Grenzkonfiguration. Wir setzen voraus, dass $r_n = r$, $s_n = s$ und die Paarungsfunktionen π_{j_n} unabhängig vom Folgenindex n sind. Durch Auswahl einer Teilfolge läßt sich das immer erreichen. Wie sich zeigen wird, ergibt sich daraus für unsere Zwecke, nämlich einen Beweis des Uniformisierungssatzes zu führen, keine Einschränkung. Es ist klar, dass im Falle der Konvergenz gelten muss: $r_0 \leq r$, $s_0 \leq s$. Fragen der Vollständigkeit dieses Raumes bezüglich irgendeiner Metrik sind für unsere Stetigkeitsdiskussion irrelevant.
Ferner seien surjektive, monotone Abbildungen $d : \underline{s} \to \underline{s_0}$ sowie $e : \underline{r} \to \underline{r_0}$ gegeben, so dass gilt: Seien $c_j^{(n)}$ die Niveaus von $\mathcal{L}_n$ und $m_k^{(n)}$ die Imaginärteile der Schlitze von $\mathcal{L}_n$, ebenso für $\mathcal{L}_0$. Dann gelte:

$$\lim_{n\to\infty} c_j^{(n)} = c_{e(j)}^{(0)} \tag{2.20}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} m_k^{(n)} = m_{d(k)}^{(0)}. \tag{2.21}$$

Es ist evident, dass dies eine notwendige Bedingung für Konvergenz ist (unter der Voraussetzung, dass die Zahl der Niveaus und der Schlitze konstant ist und die Paarungsfunktionen ebenfalls gleich bleiben.). Das ganze Problem liegt in der Beschreibung der Paarungsfunktionen für die Grenzkonfiguration. Es kann passieren, dass mehrere Schlitze oder (dieser Fall ist weniger kompliziert) mehrere Niveaus im Limes zusammenfallen. Die Paarungsfunktionen werden in diesem Fall einen „Kollaps“erleiden, den wir jetzt beschreiben wollen.

2.8.9 Kollaps von Parallelschlitzkonfigurationen

Es ist von vorneherein ausgeschlossen, dass der Kandidat für die Grenzkonfiguration nicht regulär ist. Es kann selbstverständlich geschehen, dass die Niveaus und die Schlitze konvergieren, aber es gibt keine Grenzkonfiguration. Wenn solche Folgen in den Raum der Parallelschlitzkonfigurationen geliftet werden, konvergiert die Folge gegen eine singuläre Parallelschlitzkonfiguration. Mit anderen Worten: die Metrik, die durch die Abstände der Schlitzenden gegeben ist, ist nicht vollständig.
Wir behalten die Notation aus dem letzten Abschnitt bei. Sei $d : \underline{s} \to \underline{s_0}$ die Abbildung, die jedem Schlitz seinen Grenzwert zuordnet. d ist monoton und surjektiv. Sei $\underline{\tilde{s}}^{\pm} := \{n^+ | d(n) < d(n+1)\} \cup \{t^- | d(n-1) < d(n)\} \subset \underline{s}^{\pm}$. Das ist die Menge derjenigen Ufer, die im Grenzübergang nicht verschwinden. Dann ist $d|_{\underline{\tilde{s}}^{\pm}} : \underline{\tilde{s}}^{\pm} \to \underline{s_0}$ bijektiv. Auf $\underline{s}^{\pm}$ betrachte die Äquivalenzrelationen (für jeden Wert von j), die von folgenden Relationen erzeugt sei:
$n^+ \sim_j \pi_j(n+1)^-$, falls $d(n+1) = d(n)$,
$n^- \sim_j \pi_j(n-1)^+$, falls $d(n-1) = d(n)$.
Es gilt jetzt: Jede $\sim_j$-Äquivalenzklasse besitzt genau einen Vertreter in $\underline{\tilde{s}}^{\pm}$, folglich definiert diese Relation eine Abbildung $w_j : \underline{s}^{\pm} \to \underline{\tilde{s}}^{\pm}$. Die Eindeutigkeit ist trivial. Die Existenz folgt aus der Tatsache, dass unsere Konfiguration von einer *regulären* Parallelschlitzkonfiguration induziert wird, also für jeden Punkt in der offenen Realisierung eine Umgebung existiert, die homöomorph zur Einheitskreisscheibe ist.
Ferner gilt: sind $a, b \in \underline{s}^{\pm}$ j-äquivalent, so auch $\pi_j(a)$ und $\pi_j(b)$, denn π_j ist eine Involution. Definiere nun π_j^{coll} als diejenige Abbildung, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
\underline{s}^{\pm} \arrow[r, "w_j"'] \arrow[d, "\pi_j"] & \underline{s}/\sim_j \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d, "\pi_j/\sim_j"] & \underline{\tilde{s}}^{\pm} \arrow[r, "\cong", "d^{\pm}"'] & \underline{s_0}^{\pm} \arrow[d, "\pi_j^{coll}"] \\
\underline{s}^{\pm} \arrow[r, "w_j"'] & \underline{s}/\sim_j \arrow[r, "\cong"'] & \underline{\tilde{s}}^{\pm} \arrow[r, "\cong", "d^{\pm}"'] & \underline{s_0}^{\pm}
\end{tikzcd} \tag{2.22}$$

$\cong$ bedeute hier Bijektivität. Aus dem Gesagten folgt, dass π_j^{coll} durch diese Vorgabe eindeutig bestimmt ist und eine wohldefinierte Paarungsfunktion ist.
Als nächstes müssen wir den Kollaps von Niveaus betrachten. Das ist einfacher. Zunächst eine Notationskonvention über endliche lineare Mengen. Für jede lineare endliche Menge $A := \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$ sei die *Lückenmenge* $\breve{A}$ die lineare Menge der Lücken von A, also $\{|a_1, a_1|a_2, \ldots a_n|\}$. Sei nun $B := \{b_1 \ldots, b_m\}$ eine weitere lineare endliche Menge und $f : A \to B$ eine monotone surjektive Abbildung. Dann induziert f eine monotone injektive

Abbildung $\check{f} : \check{B} \to \check{A}$ durch:

$$b_i|b_{i+1} \mapsto max\{a|f(a) = b_i\}|min\{a|f(a) = b_{i+1}\}$$

für $i = 1, \dots n-1$. Weiterhin ist natürlich $\check{f}(|b_1) = |a_1$ und $\check{f}(b_m) = a_n|$ zu setzen.

Sei $e : \underline{r} \to \underline{r_0}$ die eben eingeführte monotone surjektive Abbildung. Man bemerke, dass unsere Paarungsfunktionen durch eine Abbildung $\pi : \check{C} \to \Sigma_{M^{\pm}}$ beschrieben werden kann. Dies ist sogar eine sehr treffende Beschreibung, denn die Paarungsfunktionen identifizieren ja Intervalle zwischen zwei Niveaus miteinander. Die kollabierte Paarungsfunktion sei jetzt ganz einfach definiert durch:
$\pi^{coll} := \pi \circ \check{e}$. Die Komposition dieser beiden Ausartungen liefert jetzt den Kollaps der Paarungsfunktion. Eine simple Überlegung zeigt, dass die beiden Ausartungen kommutieren, das heißt, es ist gleichgültig, ob zuerst die Niveaus und dann die Schlitze kollabieren oder umgekehrt. Wir können jetzt formulieren:

2.8.10 Lemma:

Es sei $\mathcal{L}_n$ eine Folge reduzierter Parallelschlitzkonfigurationen von gleichem topologischen Typus und $\mathcal{L}_0$ eine weitere reduzierte Parallelschlitzkonfiguration. Die Voraussetzungen 2.20 und 2.21 seien erfüllt. Ferner gelte für das Tupel der Paarungsfunktionen: $\pi^0 = \pi^{coll}$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_0$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass es möglich ist, Vervollständigungen der Konfigurationen so zu wählen, dass Paarungsfunktionen und Typfunktionen für alle Konfigurationen, auch für den Limeskandidaten, identisch sind. Weiterhin konvergieren dann die Schlitzenden, und die Konvergenz der Folge ist dann klar.
Im Hinblick auf Satz 2.8.5 reicht es, zu zeigen, dass für eine Folge unreduzierter Parallelschlitzkonfigurationen, deren Paarungs- und Typfunktionen alle gleich sind, und deren Grenzkonfiguration regulär ist, gilt, dass die Reduktion der Grenzkonfiguration $\pi_j^0 = \pi_j^{coll}$ erfüllt. Das ist aber nach scharfem Hinsehen völlig klar. $\square$.

Mithilfe dieser Konvergenzbedingung können wir im nächsten Kapital die Stetigkeit der Hilbert-Uniformisierung beweisen.

2.9 Ist der Raum der Parallelschlitzgebiete eine Mannigfaltigkeit?

Diese Frage ist offenbar äquivalent zu der, ob die im nächsten Kapitel behandelte Hilbert-Uniformisierungsabbildung vom Raum der Dipolfunktionen in den Raum der Parallelschlitzgebiete nicht nur stetig und bijektiv, sondern sogar ein Homöomorphismus ist. Die eine Richtung ist trivial, die andere folgt aus dem Satz von Brouwer über die Gebietsinvarianz. In [Bö] wird die Stetigkeit der Verklebeabbildung im dort behandelten einfachen Fall $m = 1$ und ohne logarithmische Singularitäten direkt bewiesen. Daraus folgt direkt, dass der Raum der Parallelschlitzgebiete eine Mannigfaltigkeit ist.
Es liegt nun nahe, direkt, ohne Zuhilfenahme der Hilbert-Uniformisierung, den Beweis zu führen, dass der Raum der Parallelschlitzgebiete eine Mannigfaltigkeit ist. Welche Dimension diese Mannigfaltigkeit haben muss, ist unmittelbar klar. Es muss $dim\ PSG(g, c, m, k) = 5m + 3k + 3c(g - 1)$ gelten. Denn: nach 2.5 muss eine Parallelschlitzkonfiguration, die eine Fläche von diesem Typus liefert, $2m + k + c(g - 1)$ Schlitzpaare haben. Für jedes Schlitzpaar haben wir genau drei reelle Freiheitsgrade (Imaginärteil und die beiden Realteile). Auf jeder der m Ebenen kann beliebig um imaginäre Zahlen translatiert werden, es müssen also m Dimensionen abgezogen werden.
Für den Augenblick nennen wir ein Parallelschlitzgebiet *generisch*, falls alle Schlitze seiner Repräsentanten disjunkt sind. Es ist klar, dass die Menge der generischen Parallelschlitzgebiete einen offenen und dichten Teilraum bilden. Es ist ganz leicht zu sehen, dass dieser Teilraum eine Mannigfaltigkeit ist. Die ganze Schwierigkeit liegt darin, die nicht-generischen Gebiete zu untersuchen. Der Beweis hierfür muss völlig elementar sein, aber er scheint ziemlich kompliziert und langwierig zu sein. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit darauf verzichtet. Ohne Beweis wird die folgende Aussage als Vermutung dahingestellt.

2.9.1 Hypothese:

Der Raum der Parallelschlitzgebiete vom topologischen Typ (g, c, m, k) ist eine $5m + 3k + 3c(g - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Kapitel 3

Die Hilbert-Uniformisierung

3.1 Der kritische Graph und die Abbildungsfunktion

Sei F eine geschlossene Kleinsche Fläche, $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m$ paarweise verschiedene Punkte auf der Fläche, $\xi_1, \ldots, \xi_m$ Richtungen in den Punkten $q_1, \ldots, q_m$. $\mathcal{P} := \{q_1 \ldots q_m, p_1, \ldots, p_k\}$ sei die Menge dieser Pole. Ferner sei an jedem Punkt q_i, $i = 1, \ldots, m$ eine Orientierung des Tangentialraumes $T_{p_i}F$ festgelegt. Sei nun u eine Dipolfunktion und es sei eine konforme Metrik auf TF gewählt. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\dot{\gamma}(t) = \nabla u(\gamma(t)) \tag{3.1}$$

für Funktionen $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to F \setminus \mathcal{P}$, I ein offenes Intervall. Es gilt nun für das Grenzverhalten der Flusslinien, das heißt, der Lösungen der Differentialgleichung:

$$\lim_{t \to \pm\infty} \gamma(t) \in \mathcal{P} \cup \nabla(u)^{-1}(0),$$

denn $u(\gamma(t))$ ist strikt monoton steigend (oder aber konstant, weil γ konstant).
Im Folgenden werden wir das Wort „Singularität“(entgegen einem gelegentlich anzutreffenden Sprachgebrauch) für die Dipole und logarithmischen Singularitäten reservieren (und die Nullstellen von $\nabla(u)$ nur „Nullstellen“oder „kritische Punkte“nennen).

3.1.1 Definition:

Der kritische Graph $\mathcal{K}$ *von* $(F; p_1, \ldots, p_k; \xi_1, \ldots, \xi_l; u)$ *ist die Vereinigung derjenigen Flusslinien, für die gilt:* $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t)$ *existiert*[1] *und es ist:* $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) \in \nabla(u)^{-1}(0)$.
Der erweiterte kritische Graph $\mathcal{K}_1$ *ist die Vereinigung aller Flusslinien, für die mindestens einer der Grenzwerte* $\lim_{t \to \pm\infty} \gamma(t)$ *exisiert und ein kritischer Punkt ist.*

Bemerkung Offenbar gilt $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$. Der kritische Graph hängt nicht von der Wahl der konformen Metrik ab, die zur Definition des Gradientenvektorfeldes benutzt wurde. Das liegt an dem "Wunder der Dimension Zwei". Zwei konforme Metriken unterscheiden sich genau um Multiplikation mit einer positiven reellen Funktion. Es ändert sich nur die Geschwindigkeit des Flusses. □

3.1.2 Satz:

Es sei $\mathcal{K}$ *der kritische Graph von* $(F; p_1, \ldots, p_k; \xi_1, \ldots, \xi_m; u)$. *Dann gilt:* $F \setminus \mathcal{K}$ *besteht aus genau* m *Zusammenhangskomponenten, deren jede zusammenziehbar ist.*

Beweis: Dies wird in [Da], Proposition 3.6, S.103 für $k = 0$, $m = 1$ bewiesen. Die Verallgemeinerung auf allgemeine Werte von m und k ist offenkundig: jede Komponente kann mittels des Flusses auf eine *hohe* Niveaulinie nahe einer Dipolsingularität retrahiert werden. Die logarithmischen Singularitäten spielen keine Rolle. Man sieht leicht, dass diese Niveaulinien homöomorph zu offenen Intervallen sind. □

3.1.3 Proposition:

$\mathcal{K}$ *ist ein endlicher CW-Komplex.*

Beweis: Es gibt wegen des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen und der Kompaktheit von F nur endlich viele Nullstellen von ∇u. Eine lokale Betrachtung des Flusses zeigt, dass jede Nullstelle nur von endlich vielen Flusslinien erreicht wird. Genauer: hat u in p eine kritischen Punkt, so kann immer eine konforme Karte, die um diesen Punkt zentriert ist, so gewählt

[1] Wenn γ in einer Singularität endet, kann diese durchaus in endlicher Zeit erreicht werden.

werden, dass $u = \Re z^m + const$ $(m > 1)$ bezüglich dieser lokalen Koordinate. Dann ist es leicht zu sehen, dass es genau m auslaufende und m einlaufende Flusslinien an diesem kritischen Punkt gibt. Die ersteren müssen nicht unbedingt zum kritischen Graphen dazugehören, liegen aber im erweiterten kritischen Graphen.
Daraus ergibt sich: wir haben endlich viele 0-Zellen, nämlich die Pole und logarithmischen Senken sowie die Nullstellen des Gradienten. Hinzu kommen endlich viele 1-Zellen, nämlich die kritischen Flusslinien. Die Anheftungsabbildungen werden gerade durch die Limites solcher Flusslinien geliefert. □.

3.1.4 Korollar:

$\mathcal{K}$ ist zusammenhängend.

Beweis: $\mathcal{K}$ ist nach der letzten Proposition kompakt. Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der "Poincare-Lefschetz-Dualitäts-Leiter"[2]. Die Koeffizientengruppe sei $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_2$, je nachdem, ob F orientierbar ist oder nicht. Alle vertikalen Pfeile sind Isomorphismen.

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(F,\mathcal{K}) & \longrightarrow & H^0(F) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{K}) & \longrightarrow & H_1(F,\mathcal{K}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_2(F\setminus\mathcal{K}) & \longrightarrow & H_2(F) & \longrightarrow & H_2(F,F\setminus\mathcal{K}) & \longrightarrow & H_1(F\setminus\mathcal{K}) \end{array} \tag{3.2}$$

Aus dem letzten Satz folgt, dass $H_i(F\setminus\mathcal{K}) = 0$ für $i > 0$. Also $H^0(\mathcal{K}) \cong H^0(F)$. □

Man bemerke, dass aus dem letzten Korollar folgt, dass jede (logarithmische und Dipol-)Singularität Limes mindestens einer kritischen Flusslinie ist. Im Weiteren werden wir dieses Korollar nicht benutzen. Die entsprechende Bemerkung über Parallelschlitzgebiete ist evident. Ist ein zusammenhängendes Parallelschlitzgebiet gegeben, so ist der Abschluß des Bildes der Schlitze in der kompakten Realisierung zusammenhängend.
Die Wahl der Orientierung auf dem Tangentialraum an jedem Dipol induziert in eindeutiger Weise Orientierungen auf den Komponenten von $F\setminus\mathcal{K}$ (einfacher Zusammenhang der Komponenten!) und daher Restriktionen der dianalytischen Struktur zu einer komplexen Struktur, die durch die Wahl der

[2][Br], S.352

Orientierung bestimmt ist. Seien A_i die Komponenten, und zwar folgendermaßen nummeriert:

Sei $u(x) < C \in \mathbb{R}$ für jede Nullstelle x von ∇u und es sei $q_i \in U_i$, $z_i : U_i \to \mathbb{E}$ eine dianalytische Karte mit $z_i(q_i) = 0$, die keine weitere Singularität von u und keine Nullstelle von ∇u enthält. Solche Umgebungen werden im Folgenden als „kleine Kreisscheiben um die Dipole“bezeichnet.
Dann kann C so groß gewählt werden, dass $u^{-1}(C,\infty) \cap U_i$ zusammenhängend ist, wie eine lokale Betrachtung zeigt. Dies nummeriert die Komponenten von $F \setminus \mathcal{K}$. Weil jede Komponente einfach zusammenhängend ist, ist $u|_{A_i}$ Realteil einer holomorphen Funktion

$$f_i : A_i \to \mathbb{C}.$$

f_i ist eindeutig bis auf Addition einer imaginären Konstante. Wird die Orientierung am Dipol q_i verändert, so wird f_i (modulo Addition einer imaginären Konstante) konjugiert.

3.1.5 Definition:

$$\bigcup_{i=1}^{m} f_i : F \setminus \mathcal{K} \to \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{C} = \mathbb{C} \times \underline{m}$$

heißt Abbildungsfunktion *des Tupels* $(F; p_1, \dots, p_k; \xi_1, \dots, \xi_m; u)$.
Der Grund dieser Bezeichnung ergibt sich aus dem folgenden Satz.

3.1.6 Satz:

Die Abbildungsfunktion ist auf jeder Komponente eine biholomorphe Funktion auf ihr Bild. Die Bildmenge ist die komplexe Ebene ohne eine endliche Anzahl von abgeschlossenen Halbgeraden, die in einem Punkt in $\mathbb{C}$ beginnen und in negative reelle Richtung fortlaufen.

Beweis: Zuerst die Injektivität von f_i. Seien $x, y \in A_i$ mit $f_i(x) = f_i(y)$. Sei Φ_t der Gradientenfluss. Wähle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\Phi_T(x) \in U_i$ (wie oben). Dann folgt $\Im f_i(\Phi_T(x)) = \Im f_i(x))$ (dies gilt für alle zulässigen Werte von t). Wähle $T' \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\Re f_i(\Phi_{T'}(y)) = \Re f_i(\Phi_T(x))$. Dann gilt $f_i(\Phi_T(x)) = f_i(\Phi_{T'}(y))$. Hieraus folgt $x = y$ und also, dass f_i injektiv ist. Denn $f_i|_{U_i}$ ist injektiv[3].

[3]Wir müssen zeigen, dass die Funktion $\Re(a \log z + \frac{1}{z})$ injektiv auf den Kreislinien $r\exp(it)$ für $t \in (-\pi + \delta, \pi - \delta)$ für ein kleines $\delta > 0$ ist. Das sieht man durch eine elementare Rechnung.

Folglich ist f_i eine biholomorphe Abbildung auf ihr Bild.
Bleibt die Beschreibung des Bildbereichs. Dass die Gerade $C + i\mathbb{R}$ (C wie oben) zu $f_i(A_i)$ gehört, ergibt sich wieder aus einer lokalen Betrachtung der Funktion. Mit z liegt auch $z + (0, \infty)$ in $f_i(A_i)$ und $z + (-\infty, 0)$ liegt genau dann in $f_i(A_i)$, wenn die entsprechende Flusslinie nicht in einer Nullstelle von ∇u endet. Das ist für alle bis auf endlich viele Werte von $\Im z$ der Fall. □

3.1.7 Proposition:

1. Die Eulerzahl von $\mathcal{K}$ ist:
$\chi(\mathcal{K}) = c(1 - g) - m$.
2. Falls ∇u nur einfache Nullstellen hat, besitzt $\mathcal{K}$ $k + 2m$ 0-Zellen durch die Singularitäten, $N = c(g - 1) + 2m + k$ weitere 0-Zellen durch die Nullstellen des Gradienten und genau $2N$ 1-Zellen.
3. In jedem Fall ist die Nullstellenzahl (ohne Vielfachheit gezählt) von $\nabla(u)$ kleiner gleich $2m + k - \chi$.

Beweis: ad1: $\chi(\mathcal{K}) = \chi(F) - \chi(F \setminus \mathcal{K}) = c(1 - g) - m$.
ad2: Benutze die Formeln 2.4 und 2.5.
$\mathrm{ind}_q \nabla u = -1$ für jede Nullstelle q von ∇u (wenn diese einfach ist).
$\mathrm{ind}_q \nabla u = +1$ für jede logarithmische Singularität q von ∇u.
$\mathrm{ind}_q \nabla u = +2$ für jeden Dipol q von ∇u.
Aus dem Satz von Poincare-Hopf folgt die Behauptung.
ad 3: Das geht genauso, denn die Nullstellenindices von $\nabla(u)$ sind immer negativ. □

Man beachte, dass diese Zahl von Kanten genau mit der Zahl der Schlitze übereinstimmt, die ein Parallelschlitzgebiet haben muss, damit eine Fläche vom gegeben Typus entsteht, siehe 2.5. Das ist natürlich alles andere als ein Zufall, sondern ganz wesentlich für die Eigenschaften der Hilbert-Uniformisierung.

3.2 Konstruktion der Hilbert-Uniformisierung

Es sei F eine kompakte Kleinsche Fläche, u eine Dipolfunktion auf F mit der am Beginn dieses Kapitels angegebenen Polverteilung, $\mathcal{K}$ der kritische Graph, $f : F \setminus \mathcal{K} \to \mathbb{C} \times \underline{m}$ die Abbildungsfunktion zu u.
Es gilt jetzt: Das Bild der Abbildungsfunktion $f(F \setminus \mathcal{K}_1) \subset \mathbb{C} \times \underline{m}$ ist die disjunkte Vereinigung von offenen Streifen der Form $\mathbb{R} \times (a, b)$, wobei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Wie üblich sei $\mathbb{C} \times \underline{m} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \underline{m})$, der erste Faktor

der Realteil, der zweite der Imaginärteil. Das Komplement des Bildes ist die disjunkte Vereinigung endlich vieler Geraden der Form $G_j = \{(it_j + x, k_j); x \in \mathbb{R}, k_j \in \underline{m}\}$, $j \in \underline{s}$. Ordne die Menge dieser Geraden gemäß der linearen Ordnung auf $\mathbb{R} \times \underline{m}$.
Wähle jetzt eine Folge:

$$-\infty < d_r < c_r < d_{r-1} < \ldots < d_1 < c_1 < d_0 < +\infty \tag{3.3}$$

mit folgender Eigenschaft:
Auf jeder Niveaufläche $u^{-1}(c_j)$ liegt mindestens eine Nullstelle von $\nabla(u)$; und für jede Nullstelle p von $\nabla(u)$ ist $u(p) = c_k$ für ein $k \in \underline{r}$.
Die nun folgende Konstruktion wird von der speziellen Wahl der Zwischenwerte d_i nicht abhängen. Es sei $\mathcal{Q}$ die Menge der Dipole (nicht die logarithmischen Singularitäten). Setze

$$S_i := u^{-1}(d_i) \cup \mathcal{Q}.$$

S_i ist eine disjunkte Vereinigung von Kreislinien und eine glatte kompakte Untermannigfaltigkeit von F. Sei $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ Der Imaginärteil der Abbildungsfunktion definiert eine Funktion:

$$\phi_i : S_i \cap (F \setminus \mathcal{K}_1) \to (\hat{\mathbb{R}} \times \underline{m}) \setminus \{(t_j, n_j | j \in \underline{s}\}. \tag{3.4}$$

Es gilt:
ϕ_i ist ein Homöomorphismus von der disjunkten Vereinigung offener Intervalle.
$\phi_i(q_k) = (\infty, k)$ für jeden Dipol q_k.
ϕ_0 kann zu einem Homöomorphismus $S_0 \to \hat{\mathbb{R}} \times \underline{m}$ fortgesetzt werden.
Sei nun

$$\Psi_i := \phi_i^{-1} : (\hat{\mathbb{R}} \times \underline{m}) \setminus \{(t_j, n_j) | j \in \underline{s}\} \to S_i \cap (F \setminus \mathcal{K}_1) \tag{3.5}$$

die Umkehrabbildung. Wir erhalten nun aus diesen Daten eine reduzierte Parallelschlitzkonfiguration: Die Menge $\{(t_j, n_j | j \in \underline{s}\}$ von Ψ_i sei die Folge der Imaginärteile, die kritischen Niveaus bilden die Folge der Realteile. Die Paarungsfunktionen π_j seien durch folgende Vorschriften festgelegt:
1. π_i *sei* fixpunktfrei.
2. Es gelten die folgenden Bedingungen:

$$\pi_i((t_j,k_j)^+) := \begin{cases} (t_{j'},k_{j'})^- & \text{, falls } \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Psi_i(t_j+\epsilon,k_j) = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Psi_i(t_{j'}-\epsilon,k_{j'}) \\ (t_{j'},k_{j'})^+ & \text{, falls } \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Psi_i(t_j+\epsilon,k_j) = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Psi_i(t_{j'}+\epsilon,k_{j'}). \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\pi_i((t_j,k_j)^-) := \begin{cases} (t_{j'},k_{j'})^- & \text{, falls } \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Psi_i(t_j-\epsilon,k_j) = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Psi_i(t_{j'}-\epsilon,k_{j'}) \\ (t_{j'},k_{j'})^+ & \text{, falls } \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Psi_i(t_j-\epsilon,k_j) = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Psi_i(t_{j'}+\epsilon,k_{j'}). \end{cases} \tag{3.7}$$

Damit ist π_j eindeutig festgelegt, denn die Forderung 1.) macht die Alternative 2.) eindeutig. Offenbar gilt: $\pi_0(t_j,k_j)^{\pm} = (t_j,k_j)^{\mp}$, denn auf der höchsten Niveaulinie ist die Abbildungsfunktion stetig. Ein scharfer Blick auf die Definition zeigt zusätzlich, dass π_i eine Involution ist. Die beiden Minimalitätsbedingungen (c und d aus Definition 2.8.1) sind ebenfalls erfüllt. Wäre nämlich c falsch, so könnte die Abbildungsfunktion auf ein größeres Gebiet fortgesetzt werden, und zwar derart, dass dieses größere Gebiet einen kritischen Punkt enthielte. Damit könnte die Abbildungsfunktion nicht injektiv sein. Wäre d falsch, so gäbe es ein „kritisches Niveau“, das gar keinen kritischen Punkt enthält. Das war aber ausgeschlossen.

Wir haben jetzt also jeder Dipolfunktion auf einer Kleinschen Fläche eine reduzierte Parallelschlitzkonfiguration zugeordnet. Diese Konstruktion war noch von zwei Wahlen abhängig: Erstens können wir andere Orientierungen an den Dipolsingularitäten wählen. Dies hat zur Folge, dass die reduzierte Koniguration an einer Ebene konjugiert wird. Zweitens können wir eine andere Abbildungsfunktion wählen, d.h. auf jeder Ebene eine beliebige imaginäre Zahl hinzuaddieren. Damit wird die Konfiguration auf einer Ebene um diese imaginäre Zahl translatiert. Ansonsten ist die Konstruktion eindeutig. Ferner merken wir an, dass die Konstruktion unabhängig von der Wahl spezieller Repräsentanten im Bündel der Dipolfunktionen ist; wählen wir einen anderen Repräsentanten, so erhalten wir dieselbe reduzierte Konfiguration, abgesehen von Konjugationen und Translationen. Von der Wahl spezieller Werte der d_i hängt die Konstruktion ebenfalls nicht ab. Der normierte Fluss zum Vektorfeld $X := \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}$ liefert passende Homöomorphismen der Niveaulinien.

3.2.1 Definition:

Die eben konstruierte Abbildung

$$\mathcal{H} : \bigcup_{g,c,k} \mathcal{D}(g,c,m,k) \to \bigcup_{g,c,k} \mathrm{RedPSG}(g,c,m,k)$$

nennen wir Hilbert-Uniformisierung.

Die Bildung der disjunkten Vereinigung ist vorerst nötig. Dass wir uns davon befreien können, ist eine simple Folgerung aus dem nun folgenden Satz. Wir erinneren uns an die Verklebeabbildung

$$\mathcal{G} : \mathrm{RedPSG}(g,c,m,k) \to \mathcal{D}(g,c,m,k).$$

Hier war es per definitionem der Räume $\mathrm{RedPSG}(g,c,m,k)$ klar, dass $\mathcal{G}$ die topologischen Invarianten g, c, m und k erhält.

Wir haben jetzt:

3.2.2 Satz:

$\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ sind zueinander invers.

Beweis: 1. $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$: Sei eine Dipolfunktion u auf einer punktierten und gerichteten Kleinschen Fläche F gegeben. Den zugehörigen Punkt im Bündel der Dipolfunktionen bezeichnen wir mit P. Wir müssen einen dianalytischen Diffeomorphismus $\phi : F \to \mathcal{F}(\mathcal{H}(F,P))$ finden, wobei $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ die kompakte Realisierung einer reduzierten Parallelschlitzkonfiguration $\mathcal{L}$ war. Dieser Diffeomorphismus muss ferner die Dipolfunktionen invariant lassen. Sei $\mathcal{L}^\circ \subset \mathbb{C} \times \underline{m}$ die offene Realisierung einer reduzierten Parallelschlitzkonfiguration und $\iota : \mathcal{L}^\circ \to \mathcal{F}(\mathcal{L})$ die tautologische Abbildung, welche nach Definition eine offene dianalytische Einbettung ist.
Die Abbildungsfunktion f der gegeben Fläche und der gegeben Dipolfunktion definiert also eine offene dianalytische Einbettung:

$$\iota \circ f : F \setminus \mathcal{K} \to \mathcal{L}^\circ(\mathcal{H}(F,P)) \to \mathcal{F}(\mathcal{H}(P)), \tag{3.8}$$

die offensichtlich die Dipolfunktion invariant lässt. Wir müssen zeigen, dass $\iota \circ f$ eine dianalytische Fortsetzung zu einem Diffeomorphismus besitzt. Zunächst erhalten wir eine stetige Fortsetzung $\phi : F \to \mathcal{F}(\mathcal{H}(P))$, was durch scharfes Hinsehen auf die Definition der Hilbert-Uniformisierung folgt. Die Identifizierung waren gerade so eingerichtet. Sei nun $x \in \mathcal{K}$ ein Punkt, aber keine Singularität und auch kein kritischer Punkt der Dipolfunktion u. Wir wählen eine kleine, zusammenziehbare Umgebung U von x, welche keinen

Pol oder Stagnationspunkt enthalte. Auf U ist u Realteil einer holomorphen Abbildung, welche sich von v durch imaginäre additive Konstanten unterscheidet. Man kann nun dianalytische Karten der Fläche $\mathcal{F}(\mathcal{H}(P))$ so wählen, dass ϕ bezüglich dieser beiden Karten die Identität ist. Damit ist ϕ dianalytisch. Aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz folgt jetzt, dass ϕ auch in den Polstellen und in den kritschen Punkten dianalytisch ist. Dass ϕ ein Diffeomorphismus ist, ist nunmehr trivial. ϕ ist eine zunächst verzweigte Überlagerung der Blätterzahl Eins, denn die Blätterzahl einer dianalytischen Abbildung zwischen kompakten Flächen lässt sich durch das Zählen der Urbilder eines einzigen generischen Punktes „berechnen“[4]. Aber es kann keine Verzweigungspunkte geben, denn sonst wäre die Blätterzahl größer als Eins. Das heißt ϕ ist injektiv, surjektiv ist ϕ wegen der Kompaktheit von F [5], damit ist ϕ der gesuchte Diffeomorphismus. Das zeigt $\mathcal{G}(\mathcal{H}(F,P)) = (F;P)$.
2. $\mathcal{H} \circ \mathcal{G}$: Sei $\mathcal{L}$ eine reduzierte Parallelschlitzkonfiguration. Auf der offenen Realisierung von $\mathcal{L}$ ist die Identität eine geeignete Abbildungsfunktion. Scharfes Hinsehen auf die Definitionen zeigt wieder, dass die Ψ_j genau die Verklebevorschriften für $\mathcal{L}$ reflektieren. Damit ist der Satz bewiesen. □

3.2.3 Korollar:

$\mathcal{H} : \mathcal{D}(g,c,m,k) \to RedPSG(g,c,m,k)$ ist eine Bijektion. □.

Es gilt sogar vielmehr.

3.2.4 Satz:

$\mathcal{H}$ ist stetig.

Bevor der Beweis im nächsten Abschnitt geführt wird, notieren wir eine wichtige Folgerung aus diesem Satz.

3.2.5 Theorem:

$\mathcal{H} : \mathcal{D}(g,c,m,k) \to RedPSG(g,c,m,k)$ ist ein Homöomorphismus genau dann, wenn $RedPSG(g,c,m,k)$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Beweis: Es gelte die Vermutung 2.9.1. Dann sind $\mathcal{D}(g,c,m,k)$ und RedPSG(g,c,m,k) beides topologische unberandete offene Mannigfaltigkeiten derselben Dimension, nämlich
$3c(g-1) + 5m + 3k$.

[4]siehe etwa im Buch [Fo]
[5]ebd

$\mathcal{H}$ ist eine stetige Bijektion. Nach dem Satz von BROUWER über die Gebietsinvarianz[6] ist $\mathcal{H}$ sogar offen, m.a.W.: ein Homöomorphismus.
Die andere Richtung ist trivial. $\square$.

Dies war das Ziel dieser Arbeit.

3.3 Der Beweis des Stetigkeitssatzes

1.Beweisschritt: Vorbereitungen. Nun zum Beweis der Stetigkeit der Hilbert-Uniformisierung, also von Satz 3.2.4. Es sei x_n eine Folge in $\mathcal{D}(g, c, m, k)$, die gegen ein Element $x_\infty \in \mathcal{D}(g, c, m, k)$ konvergiere. Wir müssen zeigen: Jede Teilfolge (y_k) von (x_n) besitzt eine Teilfolge (v_m), so dass $\mathcal{H}(v_m) \to \mathcal{H}(x)$. Oder auch so: Jede Folge (x_n), die gegen x_∞ konvergiert, besitzt eine Teilfolge, so dass die Bilder gegen $\mathcal{H}(x_\infty)$ konvergieren. Daraus folgt durch ein elementares Argument (am Ende des Beweises von Satz 1.5.5) die Folgenstetigkeit von $\mathcal{H}$. Daraus folgt aber die Stetigkeit, denn die beteiligten Räume sind metrisierbar[7].
Wir benutzen jetzt den Konvergenzsatz 1.5.5. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass alle x_n und der Grenzpunkt x_∞ über einer offenen Menge $U \subset \mathcal{M}(F, p_1, ...p_k; \xi_1, ..., \xi_m)$ liegen, über der die Einschränkung der Faserung $\mathcal{S}(F) \to \mathcal{M}(p_1, ...p_k; \xi_1, ..., \xi_m)$ trivial ist. Wir können also einen stetigen Schnitt $U \to \mathcal{S}(F)$ wählen. Das wird durch den Satz von Earle und Eells ermöglicht. Dieser Schnitt definiert eine Trivialisierung der Sobolevraum-Bündel über dem Modulraum. Also gibt es eine fasertreue Einbettung von Vektorbündeln: $\mathcal{D}(g, c, m, k)|_U \hookrightarrow \mathcal{S}(F) \times W^{2,-1}(F; \mathbb{R})$. Wir können also x_n und x_∞ als Funktionen auf einer festen (topologischen) Fläche F betrachten. Die konformen Strukturen X_n, bezüglich derer diese Funktionen Dipolfunktionen sind, sind jedoch noch variabel. Wir schreiben $(u_n, X_n) \to (u_\infty; X_\infty)$. Nach Definition der Produkttopologie haben wir $X_n \to X_\infty$. Daraus folgt: Ist eine lokale Orientierung gewählt, so induziert die konforme Struktur lokal fast-komplexe Strukturen J_n; und es gilt $J_n \to J_\infty$ gleichmäßig mit allen Ableitungen. Satz 1.5.5 impliziert jetzt, dass $u_n \to u_\infty$ kompakt mitsamt allen Ableitungen auf der Fläche ohne die Singularitätenmenge.

2.Beweisschritt: Die Konvergenz der kritischen Punkte. Sei jetzt $p \in Crit(u_\infty)$ und K eine Kreisscheibe um p, die keine weiteren Kritischen

[6] siehe [Br], IV.19.9., S. 235
[7] das ist offensichtlich

Punkte oder Singularitäten von u enthält. Sei ω_n eine Folge von 1-Formen definert auf K mit folgenden Eigenschaften:

1. $\omega_n \to \omega_\infty$, eine 1-Form, in der C^1-Norm,

2. $\omega_n(p) \neq 0$ für alle $n = \infty, 1, 2, \ldots$,

3. ω_n ist eine $(1,0)$-Form bezüglich J_n für alle $n = \infty, 1, 2, \ldots$

Eine solche Folge konstruiert man wie folgt: Sei ω_∞ eine $J-$holomorphe (1,0)-Form, die bei p nicht verschwindet. Setze $\omega_n := (1 - iJ_n)\omega_\infty$. Für jedes n, gibt es eine Funktion h_n ohne Nullstellen nahe p so dass $h_n\omega_n$ holomorph ist. Wähle $J-n$-holomorphe Funktionen g_n mit $\partial_n u_n = g_n h_n \omega_n$.
Nach dem Residuensatz und den gemachten Wahlen gilt:

$$\sum_{q\in K} ord_q \partial_n u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{\partial_n g_n}{g_n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} (-dlogh_n + dlog(\frac{\partial_n u_n)}{\omega_n}) \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{\partial_\infty g_\infty}{g_\infty} = ord_p g_\infty \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Die Konvergenz ist eine Folge von 1.5.5. Wir haben gezeigt:

Für jede Wahl von Kreisscheiben um die verschiedenen Nullstellen des Gradienten von u_∞, also der Grenzfunktion, gibt es einen Folgenindex, von dem ab alle kritischen Punkte der u_n in den gewählten Kreisscheiben liegen.

3.Beweisschritt: Die Konvergenz der Realteile. Seien $-\infty < c_{r_n}^{(n)} < \ldots < c_2^{(n)} < c_1^{(n)} < \infty$ die kritischen Niveaus der einzelnen Funktionen. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_\infty \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_\infty$ gilt: Zu jedem kritischen Niveau $c_i^{(n)}$ von u_n gibt es ein kritisches Niveau c_j^∞ von u_∞ mit $|c_i^{(n)} - c_j^\infty| < \epsilon$.
Ferner ist die Zahl der kritischen Niveaus r_n der Funktion u_n gleichmäßig beschränkt durch die maximale Anzahl der Nullstellen von du_n, und die ist: $R = c(g-1) + 2m + k$. Daraus folgt: Wir können eine Teilfolge wählen, so dass $r_{n+1} = r_n = r$ für alle n gilt. Zwangsläufig gilt dann:

$$r_\infty \leq r \text{ und}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_j^n = c_i^\infty \text{ für ein } i = i(j),$$

denn im Limes können nicht mehrere kritischen Niveaus auseinanderspringen. Das bedeutet die Konvergenz der Realteile. Es gibt jetzt eine monotone surjektive Abbildung $e : \underline{r} \to \underline{r_\infty}$, $e(j) := i$, falls $\lim_{n\to\infty} c_j^n = c_i^\infty$. Falls $r_\infty = r$, dann muss $e = id$ gelten.

4.Beweisschritt: Die Konvergenz der kritischen Graphen. Als nächstes manipulieren wir die Gradientenvektorfelder der Dipolfunktionen etwas. Bekanntlich darf man den Gradienten mit einer positiven Funktion multiplizieren, ohne den kritischen Graphen zu verändern. In den Singularitäten sind überdies Nullstellen dieser Funktion gestattet. Wir wählen eine derartige Funktion so, dass alle Punkte unter diesem Fluss eine *unendliche* Lebensdauer haben. Wählen wir eine solche Funktion h so, dass $h(z) = |z|$ um logarithmische Singularitäten, $h(z) = |z|^4$ um die Dipole herum, und $h \equiv 1$ in (sehr kleinen Umgebungen) der Nullstellen von du_∞, die alle Nullstellen der du_n enthalten, sowie $h = \|df\|^{-2}$ außerhalb etwas größerer Umgebungen (h darf durchaus mit n variieren, solange die Variation stetig in der C^∞-Topologie bleibt), so ist das Vektorfeld $h\nabla u$ gleichmäßig Lipschitz-stetig, und die unendliche Lebensdauer ist garantiert. Sei nun $\mathbb{N}^{-1} := \{0, \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie ausgestattet, und sei

$$\Phi : F \times \mathbb{N}^{-1} \times \mathbb{R} \to F \tag{3.10}$$

die Lösungsabbildung, also

$$\Phi(x, n^{-1}, 0) := x \text{ und } \frac{d}{dt}\Phi(x, n^{-1}, t) := h_n(\Phi(x, n^{-1}, t))\nabla u_n(\Phi(x, n^{-1}, t)).$$

Nach dem bekannten Satz über die stetige Abhängigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von Anfangswerten und Parametern ist Φ stetig (in allen drei Variablen).

Wir formulieren diese Aussage um:
Sei $x \in F \setminus \mathcal{K}_1^\infty$, das heißt, $\lim_{t\to\pm\infty} \Phi(x, 0, t)$ ist eine Dipolsingularität oder eine logarithmische Singularität. Aus der Majorisierung der kritischen Niveaus und der Stetigkeit von Φ folgt jetzt: Es gibt eine offene Umgebung U von x und ein $N \in \mathbb{N}$, so, dass für alle $y \in U$, $n \geq N$ gilt: $\lim_{t\to\pm\infty} \Phi(y, n, t)$ ist wieder eine Dipolsingularität oder eine logarithmische Singularität (und zwar jeweils dieselbe). Mit anderen Worten: $x \in F \setminus \mathcal{K}_1^\infty$, dann gibt es U und N (wie oben), so dass $y \in F \setminus \mathcal{K}_1^n$ ($y \in U, n \geq N$). Dasselbe gilt für den (nicht erweiterten) kritischen Graphen.
Sei nun U eine Umgebung von $\mathcal{K}_1^\infty$ oder $\mathcal{K}^\infty$. Ein einfaches Kompaktheitsargument ($F \setminus U$ ist kompakt) zeigt: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{K}_1^n \subset U$ und $\mathcal{K}^n$ für alle $n \geq N$. Dasselbe geht für die nicht erweiterten kritischen Graphen.

5.Beweisschritt: Die Konvergenz der Imaginärteile. Wir kommen nun zur Konvergenz der Imaginärteile. Zunächst folgt aus dem bisher Bewie-

senen, dass es eine endliche obere und eine endliche untere Schranke für die höchsten und niedrigsten kritischen Niveaus der Funktionen u_n gibt.
Außerdem gibt es Kreislinien Γ mit folgenden Eigenschaften: Γ ist eine „sehr hohe"Niveaulinie von u_∞; sie berührt einen Dipol in einem Punkt, und kein kritischer Punkt irgend eines u_n liege auf der Linie oder darüber. Der Schnitt dieser Niveaulinie mit dem kritischen Graphen besteht aus genau einem Punkt, nämlich dem Dipol. Halte für den Rest des Beweises eine Orientierung an dem Dipol fest, und wähle einen Punkt $q \in \Gamma$ (nicht der Dipol), und setze für alle n: $\Im(g_n(q)) = 0$ (g_n sei der Imaginärteil der Abbildungsfunktion. Damit sind die Abbildungsfunktionen eindeutig bestimmt.
Seien jetzt u_n Dipolfunktionen und g_n harmonisch konjugiert. Eine sehr leichte Rechnung zeigt, dass

$$u_n(x) + ig_n(x) = f(q) + 2\int_q^x \partial_n u_n$$

für jeden Weg, der x und q verbindet. Für jedes einfach zusammenhängende Kompaktum K in F (ohne Dipole usw.) mit $q \in K$ folgt also die Abschätzung[8]:

$$\|g_n - g\|_{C^0(K)} \leq |u_n(q) - u_\infty(q)| + 2diam(K)\|u_n - u_\infty\|_{C^1(K)} \to 0.$$

Mit anderen Worten: Auf jeder Teilmenge, die keinen der kritischen Graphen schneidet (auf der also alle Abbildungsfunktionen simultan definiert sind), konvergiert die Folge der Abbildungsfunktionen kompakt gegen die Abbildungsfunktion des Limes. Hieraus folgt, dass die Imaginärteile der Konfigurationen konvergieren müssen.
Ähnlich wie eben können wir jetzt noch einmal eine Teilfolge wählen, so dass erstens $s_n = s_{n+1} = s$ und $s_\infty \leq s$ und zweitens für alle Funktionen der Folge die Paarungsfunktionen identisch sind, genauer gesagt: ist $M^{(n)} = \{(t_1^{(n)}, k_1^{(n)}), (t_2^{(n)}, k_2^{(n)}), \ldots, (t_s^{(n)}, k_s^{(n)})\} \subset \mathbb{R} \times \underline{m}$ die Folge der Imaginärteile für die Konfiguration zur Funktion u_n; und ist $M^{(n);\pm}$ ihre Verdopplung, sowie $\phi_n : \underline{s}^\pm \to M^{(n);\pm}$ die kanonische ordnungserhaltende Bijektion, so gilt für alle $j = 0; 1, \ldots r$: $\phi^{-1} \circ \pi_j^n \circ \phi \in \Sigma_{\underline{s}^\pm}$ ist unabhängig von n. Das geht, wieder weil die Menge aller möglichen Permutationen endlich ist.

6. und letzter Beweisschritt: Für diese Teilfolge verifizieren wir die Konvergenz $\mathcal{H}(u_n, X_n) \to \mathcal{H}(u_\infty, X_\infty)$ in PSG.

[8] $diam(K)$ sei der Durchmesser von K, also $diam(K) = \sup_{p,q \in K} \inf_{c(0)=p, c(1)=q} L(c)$, wobei $L(c)$ die Länge eines C^1-Weges sei; und das Infinum werde über alle derartigen Wege in K, die p und q verbinden, genommen.

Nach Konstruktionen sind die Voraussetzungen 2.20 und 2.21 von Seite 63 erfüllt. Außerdem sind die Anzahlen der Schlitze und Niveaus gleich und alle Paarungsfunktionen gleich. Es ist nur noch zu zeigen, dass die Voraussetzung von Lemma 2.8.10 erfüllt ist, dass also $\pi^{(0)} = \pi^{coll}$ gilt. Das ist aber klar und ergibt sich durch scharfes Hinsehen auf 3.6, 3.7 und 2.8.9. Damit sind wir fertig. $\square$.

Kapitel 4

Anhang

Symbolverzeichnis

Elementarmathematik

$\underline{n} = \{1, \dots n\}$

$\Im(z)$ Imaginärteil der komplexen Zahl z

$\Re(z)$ Realteil der komplexen Zahl z

Σ_M, Σ_n Permutationsgruppe einer endlichen Menge M, Permutationsgruppe von $\underline{n}$

$(a_1 \dots a_n)$ Zykelschreibweise für Permutationen

$Gl^{\pm}(V)$ Gruppe der komplex-linearen und komplex-antilinearen Automorphismen des komplexen Vektorraums V

pr^X Projektion $pr^X : X \times Y \to X$

Differentialgeometrie

T_pM, TM, Tf Tangentialraum im Punkt p an eine Mannigfaltigkeit M, Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, Differential einer differenzierbaren Abbildung f zwischen zwei Mannigfaltigkeiten

$\mathbb{S}(F)$ Richtungsbündel der Mannigfaltigkeit M

$d, \partial, \overline{\partial}$ Cartansche Ableitung von Differentialformen, Wirtinger-Operatoren

$X \dashv \omega$ Einsetzen des Tangentialvektors X in die Differentialform ω

$T^{1,0}M$, $T^{0,1}M$, $\Lambda^{p,q}T^*M$ Holomorphes Tangentialbündel, antiholomorphes Tangentialbündel, Bündel der (p,q)-Formen auf einer fast-komplexen Mannigfaltigkeit M

Δ, $*$ Laplaceoperator auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, Hodge-Sternoperator auf einer Riemannschen orientierten Mannigfaltigkeit

$P \times_G V$ assoziiertes Vektorbündel zu einer topologischen Gruppe G, einem G-Prinzipalbündel P und einer linearen G-Darstellung V

$\Gamma(M; E)$ Vektorraum der glatten Schnitte eines Vektorraumbündels E über einer glatten Mannigfaltigkeit M

∇u Gradientenvektorfeld einer reellen Funktion u auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit

$ind_p V$ lokaler Nullstellenindex am Punkte p eines Tangentialvektorfelds V

$\dot{\gamma}$ Ableitung einer glatten Kurve in einer Mannigfaltigkeit nach dem Parameter

Funktionalanalysis

$W^{2,s}(F; E)$, $\|u\|_s$, $\|u\|_{C^k}$ L^2-Sobolevraum der Schnitte des Vektorbündels E über der Fläche F zum Index $s \in \mathbb{Z}$, Sobolev-s-Norm, C^k-Norm

$L(X; Y)$ Banachraum der stetigen linearen Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen zwei Banachräumen

$U^\perp$, f^{ad}, $\mathrm{ind} f$ orthogonales Komplement eines Unterraumes U in einem Hilbertraum; adjungierte Abbildung zu einer stetigen linearen Abbildung f zweier Hilberträume, Fredholmindex eines Fredholmoperators

Algebraische Topologie

$H^k_{dR}(M)$ k-te de-Rham-Kohomologiegruppe einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M

$c(F)$, $g(F)$, $\chi(F)$ Orientierungscharakter, Geschlecht und Eulerzahl einer kompakten unberandeten Fläche F

$deg(h)$ Abbildungsgrad einer differenzierbaren Abbildung h zwischen zwei kompakten, gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten

$L(f)$ Lefschetzzahl einer Selbstabbildung f einer kompakten Mannigfaltigkeit

$w_1(L)$ 1. Stiefel-Whitney-Klasse des reellen Vektorbündels L

Teichmüllertheorie

$\mathcal{S}(F)$ Menge der komplexen beziehungsweise Menge der dianalytischen Strukturen auf der differenzierbaren Fläche F

$\mathrm{Diff}(F), \mathrm{Diff}_0(F), \mathrm{Diff}(F;P), \mathrm{Diff}_0(F;P), \mathrm{Diff}(F;P;\Xi), \mathrm{Diff}_0(F;P;\Xi)$ spezielle Untergruppen der Diffeomorphismengruppe von F

$\Gamma(F), \Gamma(F;P), \Gamma(F;P;\Xi)$ Abbildungsklassengruppen
$\mathcal{T}(F), \mathcal{T}(F;P)m, \mathcal{T}(F;P;\Xi)$ Teichmüllerräume

$\mathcal{M}(F), \mathcal{M}(F;P), \mathcal{M}(F;P;\Xi)$ Modulräume

$\mathcal{D}(F, p_1, ...p_{m+k}; \xi_1, ..., \xi_m), \mathcal{D}(g, c, m, k)$ Bündel der Dipolfunktionen

Parallelschlitzgebiete

$\mathring{\mathcal{F}}(\mathcal{L}), \mathcal{F}'(\mathcal{L}), \mathcal{F}^*(\mathcal{L}), \mathcal{F}(\mathcal{L})$ offene, halb-abgeschlossene, abgeschlossene und kompakte Realisierung der Parallelschlitzkonfiguration $\mathcal{L}$

$\widetilde{PSK}(m,h), PSK(m,h), PSK(g,c,m,k)$ Menge aller Parallelschlitzkonfigurationen mit h Schlitzpaaren auf m Ebenen, Teilmenge der regulären und zusammenhängenden Parallelschlitzkonfigurationen, Menge der PSK auf m

Ebenen mit topologischem Typ g, c, m, k

$RedPSK(g, c, m, k)$ Menge der reduzierten Parallelschlitzkonfigurationen mit topologischem Typ g, c, m, k

$PSG(g, c, m, k)$ Menge der Parallelschlitzgebiete vom topologischen Typ g, c, m, k

Literaturverzeichnis

[1] Hans Wilhelm Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1980.

[2] [Ati] Michael Francis Atiyah: *K-Theory*, New York, Amsterdam, 1967.

[3] [Bö] Carl-Friedrich Bödigheimer: *The Topology of Moduli Spaces, Part I: Hilbert Uniformization*, Mathematica Gottingensis. Schriftenreihe des Sonderforschungsbereiches Geometrie und Analysis. Heft 7 (1990) Göttingen, 1990.

[4] [Br] Glen Bredon: *Topology and Geometry* Graduate Texts in mathematics 139, Springer, New York, 1993.

[5] [BT] Raoul Bott, Loring Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics 82, Springer, 1982.

[6] [Da] Susanne Dahlmann: *Über den Modulraum gerichteter Tori*, Diplomarbeit in Mathematik, Bonn, 1996.

[7] [EaEe] Clifford J. Earle, James Eells: *A Fibre Bundle Description of Teichmüller Theory*, Journal of Differential Geometry 3 (1969) 19-43.

[8] [FL] Wolfgang Fischer, Ingo Lieb: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, Braunschweig/Wiesbaden, 1988.

[9] [Fo] Otto Forster: *Riemannsche Flächen.* Heidelberger Taschenbücher 184. Springer, Berlin Heidelberg, 1977.

[10] [Hir] Morris W. Hirsch: *Differential Topology*, Graduate Texts in mathematics 33, Springer, New York, 1976.

[11] [Hör] Lars Hörmander: *An Introduction to complex Analysis in several Variables*, Springer 1992.

[12] [Hu] Dale Husemöller: *Fibre Bundles*, Third Edition, Springer Verlag, 1994.

[13] [Jä] Klaus Jänich: *Vektoranalysis* Berlin, Heidelberg, 1992.

[14] Jürgen Jost: *Partial Differential Equations* Graduate texts in Mathematics, Springer, New York, 2002.

[15] [Kob] Heinz Kober: *Dictionary of conformal Representations* 2ed., New York, Dover, 1957.

[16] [LM] H. Blaine Lawson, Marie-Louise Michelson: *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series 38, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[17] [Tay] Michael E. Taylor: *Partial Differential Equations, Volume I, Basic Theory*, Applied Mathematical Sciences 115. Springer, New York, 1996.

[18] [Tay3] Michael E. Taylor: *Partial Differential Equations, Volume III, Nonlinear Equations*, Applied Mathematical Sciences 117. Springer, New York, 1996.

[19] [toD] Tammo tom Dieck: *Topologie*. 2. Auflage. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2000.

[20] [Zaw] Myint Zaw: *The Moduli Space of Non-Classisal Directed Klein Surfaces*, Inaugural-Dissertation, Bonn 1998.