

Übungen zur Vorlesung
AUSGEWÄHLTE THEMEN DER TOPOLOGIE

Blatt 1
Wintersemester 14/15

M. Joachim, M. Palmer
Abgabe Donnerstag, den 23.10.2014

Aufgabe 1: Wir betrachten die Mengen $M = \{A, B, C\}$ und $N = \{X, Y\}$. Zeigen Sie, dass die Mengen M und N nicht isomorph sind.

Aufgabe 2: Es seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow O$ Abbildungen von Mengen. Zeigen Sie: sind f und g beide injektiv, so ist die Verknüpfung $g \circ f : M \rightarrow O$ ebenfalls injektiv, und sind f und g beide surjektiv, so ist es auch $g \circ f$. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass die Umkehrungen dieser Aussagen nicht gelten.

Aufgabe 3: Es seien M und N zwei isomorphe Mengen, und $f : M \rightarrow N$ sei eine Bijektion. Wir erhalten nun zwei metrische Räume (M, d_M) und (N, d_N) , indem wir M und N mit den diskreten Metriken d_M bzw. d_N ausstatten. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 4*: Zeigen Sie: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist auch das Paar (X, d') mit der neuen Abbildung

$$d' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ein metrischer Raum.