Übungen zur Vorlesung

Ausgewählte Themen der Topologie

Blatt 10 / Miniklausur — M. Joachim, M. Palmer

Wintersemester 14/15 — Abgabe Donnerstag, den 8.1.2015

Aufgabe 1 (2+2+3)

a) Definieren Sie, was eine "*Topologie*" auf einer Menge X ist.

b) Begründen Sie, warum das nachfolgenden System $\mathcal{O}$ von Teilmengen der Menge $\{A, B, C\}$ keine Topologie ist.

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{A, B, C\}\}$$

c) Geben Sie drei Topologien auf der Menge $\{D, E, F\}$ an.

Aufgabe 2 (2+2+2)
Es sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \backslash \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $(0, 0) \in \partial X$.

b) Zeigen Sie: Die Menge X ist nicht abgeschlossen.

c) Zeigen Sie: Die Menge X ist nicht offen.

Aufgabe 3 (4)
Seien X und Y topologische Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a)	f ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(A)$ für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset Y$ abgeschlossen ist.	☐ wahr	☐ falsch
b)	f ist genau dann stetig, wenn für alle Teilmengen $A \subset Y$ die folgende Gleichung gilt: $f^{-1}(A \backslash \partial A) = (f^{-1}(A)) \backslash \partial(f^{-1}(A))$.	☐ wahr	☐ falsch
c)	f ist genau dann offen, wenn f umkehrbar und die Umkehrfunktion f^{-1} stetig ist.	☐ wahr	☐ falsch
d)	f ist genau dann eine Einbettung, wenn f offen, stetig und injektiv ist.	☐ wahr	☐ falsch

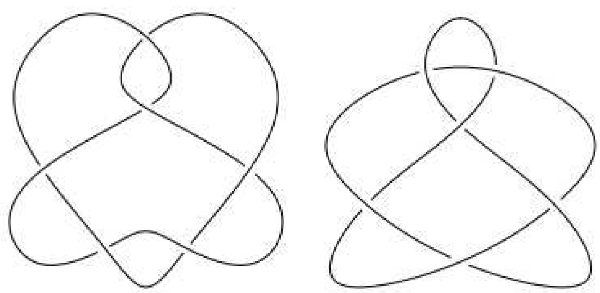
Aufgabe 4 (2+4)

a) Definieren Sie den Begriff "*Homöomorphismus*".

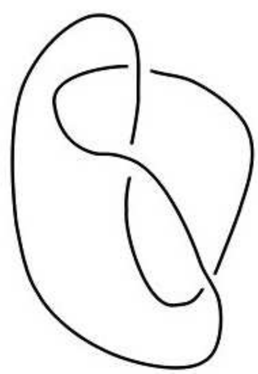
b) Seien X, Y und Z topologische Räume. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie: Falls f ein Homöomorphismus ist, dann ist g ein Homöomorphismus genau dann, wenn $g \circ f$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 5 (2+2+2)
Welchen Wert haben die folgenden Knoteninvarianten für die beiden nachfolgenden Knoten? Tragen Sie den entsprecheden Wert in den zugehörigen Kasten ein.

	Knoten links	Knoten rechts
a) Entwirrungszahl		
b) Brückenzahl		
c) Färbungszahl		



Aufgabe 6 (6)
Berechnen Sie das Bracket-Polynom $\langle V \rangle$ für das nachstehende Knotendiagramm.



Viel Erfolg!