Übungen zur Vorlesung

Ausgewählte Themen der Topologie

Blatt 13 / Probeklausur M. Joachim, M. Palmer

Wintersemester 14/15 Abgabe Donnerstag, den 29.1.2015

Aufgabe 1 (2+2+3)

a) Es sei $(X, \mathcal{O})$ eine Topologie ud $A \subset X$ eine Teilmenge. Geben Sie die Definition der Teilraumtopologie auf A an.

b) Geben Sie einen Grund dafür an, warum das nachfolgende System $\mathcal{O}$ von Teilmengen der Menge $\{A, B, C, D\}$ keine Topologie auf $\{A, B, C, D\}$ ist.

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{A\}, \{C\}, \{A, B\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}, \{A, B, C, D\}\}$$

c) Es sei $X = \{A, B\}$. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{O}$ eine Menge von Teilmengen von X, die sowohl die leere Menge $\emptyset$ als auch die ganze Menge X enthält, so ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X.

Aufgabe 2 (2+2+2)

Es sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{9}^2 + \frac{y}{4}^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Geben Sie einen Punkt aus dem Innern $\overset{\circ}{X}$ an.

b) Geben Sie einen Punkt aus ∂X an, und begründen Sie, warum X nicht abgeschlossen ist.

c) Zeigen Sie: Die Menge X ist offen.

Aufgabe 3 (2+4)

a) Definieren Sie den Begriff "*Einbettung*".

b) Geben Sie jeweils an, ob es sich den beiden nachfolgenden Abbildungen um Einbettungen handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

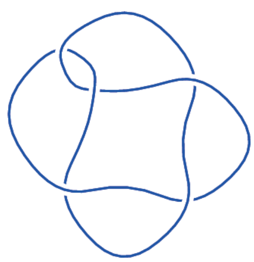
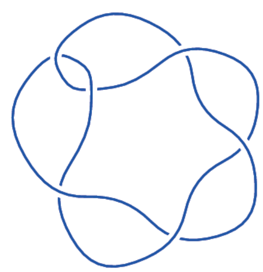
   i) $f : S^1 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (-x, y)$

   ii) $g : S^1 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (0, x \cdot y, 1)$

— *bitte wenden* —

Aufgabe 4: (2+2+2)
Welchen Wert haben die folgenden Knoteninvarianten für die beiden nachfolgenden Knoten? Tragen Sie den entsprechenden Wert in den zugehörigen Kasten ein.

	Knoten links	Knoten rechts
a) Entwirrungszahl		
b) Brückenzahl		
c) Färbungszahl		

Aufgabe 5: (6)

Berechnen Sie das Bracket-Polynom $\langle V \rangle$ für das nachstehende Knotendiagramm.

Aufgabe 6: (2+2+2+1 Punkte)

Es seien $E = \{A, B, C, D\}$ und $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ die Ecken- und Kantenmenge eines Graphens $\mathcal{G}$. Die Zuordnungsfunktion des Graphens $\mathcal{G}$ sei über die folgende Inzidenztafel gegeben:

	A	B	C	D
1	x			
2	x	x		
3	x		x	
4		x	x	
5			x	
6			x	x
7		x		x

a) Bestimmen Sie die Nachbarschaftstafel des Graphen.

b) Geben Sie alle Teilgraphen an, die genau fünf Kanten besitzen.

c) Bestimmen Sie zwei schlichte Teilgraphen von $\mathcal{G}$.

c) Wieviele schlichte Teilgraphen der Ordnung 4 besitzt der Graph?

Aufgabe 7: (2+2+2)

a) Zeigen oder widerlegen Sie: der $\mathcal{K}_4$ ist plättbar.

b) Es sei $\mathcal{G}$ ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung 8. Jede Ecke in $\mathcal{G}$ besitze Eckenordnung 5. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ nicht plättbar ist.

c) Formulieren Sie den Satz von Wagner.

Aufgabe 8: (3+3+2)

Es sei F_2 die Brezelfläche.

a) Geben Sie einen gerichteten Graphen $\widetilde{\mathcal{G}}$ an, dessen geometrische Realisierung $|\widetilde{\mathcal{G}}|$ eine zur Bestimmung der Eulercharakteristik geeignete Einbettung $|\widetilde{\mathcal{G}}| \to F_2$ besitzt.

b) Geben Sie für $\widetilde{\mathcal{G}}$ ein zugehöriges gerichtetes Graphendiagramm an, und skizzieren Sie, wie Sie $|\widetilde{\mathcal{G}}|$ geeignet nach F_2 einbetten können.

c) Bestimmen Sie mit den Sachverhalten aus a) und b) die Eulercharakterik von F_2.