Übungen zur Vorlesung

Ausgewählte Themen der Topologie

Blatt 4 — M. Joachim, M. Palmer

Wintersemester 14/15 — Abgabe Donnerstag, den 13.11.2014

Aufgabe 13: Es seien $X = \{A, B\}$ und $Y = \{H, B, O\}$. Wir versehen die Mengen X und Y mit den Topologien $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{O}_Y$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X &= \{\emptyset, \{A\}, \{A, B\}\} \\ \mathcal{O}_Y &= \{\emptyset, \{H, B\}, \{H, B, O\}\} \end{aligned}$$

Prüfen Sie, ob die Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) = O$ und $f(B) = H$ stetig, bzw. offen ist.

Aufgabe 14: Es sei seien a, b zwei positive reelle Zahlen

$$\begin{aligned} S^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \\ E_{a,b} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} \end{aligned}$$

Geben Sie einen Homömorphismus von S^1 nach $E_{a,b}$ an.

Aufgabe 15: Es sei X eine Menge. Es sei $\mathcal{O}_1$ die diskrete Topologie auf X, und es sei $\mathcal{O}_2$ die Klumpentopologie auf X. Zeigen Sie, dass die Abbildung $id_X : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ kein Homöomorphismus ist, falls X mehr als zwei Elemente besitzt.

Aufgabe 16*: In der Vorlesung wurden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als metrischer Raum vorgestellt. Demzufolge besitzt $\mathbb{R}$ auch eine zugrundeliegenden Topologie. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wiederum sind eine Teilmenge der der reellen Zahlen. Zeigen Sie: für den Abschluss der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ gilt

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$