WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

MASTERARBEIT

Perfekte (φ, Γ)-Moduln

Autor:
Marius KLEY

Betreuer:
Prof. Dr. Peter
SCHNEIDER

Abgabetermin: 22. März 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Erkenntnissen über die Strukturen von Kategorien von etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln. In dieser Einleitung wird erklärt, was diese Moduln sind, indem wir der Motivation der Konstruktion dieser Moduln folgen.
Wir betrachten eine endliche Körpererweiterung $L|\mathbb{Q}_p$ mit Ganzheitsring o. Eins der großen Ziele der Theorie lokaler Körper ist es, die absolute Galoisgruppe G_L von L identifizieren zu können. Nach der Theorie von Langland versucht man dieses Problem anzugehen, indem man die G_L-Darstellungen über o untersucht. Hier untersucht man endlich erzeugte o-Moduln, die eine, für gewisse Topologien stetige, G_L-Wirkung besitzen. Diese Kategorie ist wegen der Komplexität von G_L schwierig zu untersuchen. Die etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln ziehen ihre heuristische Motivation darüber, dass wir anstatt Wirkungen von G_L, die Wirkungen einer Faktorgruppe Γ_L betrachten wollen, die nach Arbeiten von Tate gut verstanden ist.

Ein großes Ergebnis von Fontaine war es, die Kategorie der G_L-Darstellungen über o mit einer gewissen Kategorie von etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln zu identifizieren. Frei nach der Philosophie "Ein Problem ist so schwer, wie das Problem mit dem man es identifiziert.", muss für dieses Ergebnis von Fontaine die Struktur des zugrundeliegenden Rings der etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln komplexer sein als der der G_L-Darstellungen, damit man zu der einfacheren Gruppe Γ_L übergehen kann. Wie genau die etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln anhand dieser Motivation definiert sind, werden wir im Verlaufe der Arbeit sehen.

In dieser Arbeit stellen wir neue Methoden und Beweise vor, die ein besseres Verständnis bringen, wie der Übergang der Moduln und Gruppen zwischen den Kategorien der G_L-Darstellungen und der (φ_L, Γ_L)-Moduln zustande kommt. Das Hauptergebnis ist eine Robustheitseigenschaft der Γ_L-Wirkungen. Dieses Ergebnis ist eine Kategorienäquivalenz zwischen etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln über unterschiedlichen Ringen. Für dieses Resultat haben wir einen neuen, direkten Beweis gefunden. Genauer geht es darum, dass wir den Restklassenkörper für den unterliegenden Ring der etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln auch mit seiner perfekten Hülle austauschen können und somit zu dem Ring übergehen können, der diesen perfekten Körper als Restklassenkörper hat, ohne das sich die Struktur der etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln ändert.

Vorausgesetzt zum Verständnis dieser Arbeit sind grundlegende Kenntnisse in Kategorientheorie, den Theorien von diskreten Bewertungsringen und Wittvektoren, der Theorie von unendlichen Galoisgruppen und Grundlagen von homologischer Algebra. Außerdem sollten einem die Begriffe des Tensorprodukts und der Skalarerweiterung bekannt sein.

Die Arbeit ist wie folgt strukturiert:
Im ersten Kapitel werden die großen Sätze der Algebra wiederholt und bewiesen, die für die Ergebnisse der Arbeit notwendig sind. Das sind das Nakayama-Lemma, die nicht-abelsche Version von Hilbert 90 und der Elementarteilersatz.
Im zweiten Kapitel werden dann etale φ_L-Moduln, Moduln mit weniger Struktur als die der etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln, in allgemeiner Fassung konstruiert und die Hauptaussagen für diese Moduln auf zwei verschiedene Arten bewiesen. Im ersten Teil konzentrieren wir uns noch auf den Spezialfall $L = \mathbb{Q}_p$. Hier werden die notwendigen Ringe konstruiert, die Kategorien definiert, die Ergebnisse von Fontaine formuliert und anschließend benutzt, um einen ersten Beweis für die Hauptaussagen für etale φ_L-Moduln zu haben. Im zweiten Teil verallgemeinern wir auf den Fall, dass $L|\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung ist. Am Anfang machen wir für diesen allgemeinen Fall eine alternative Konstruktion der Ringe. Dann konstruieren wir einen Funktor, der einen direkteren Beweis der Hauptaussage liefert und bessere Einblicke in die Verbindung der Kategorien von etalen φ_L-Moduln und gewisser Darstellungen über o gibt.
Im letzten Kapitel geht es dann darum, die Ergebnisse aus Kapitel zwei zu erweitern auf die mehrstrukturigen (φ_L, Γ_L)-Moduln. Dabei werden im ersten Teil über die Theorien von perfektoiden Körpern und Lubin-Tate Gruppengesetzen die Ringe konstruiert, die wir benötigen. Außerdem werden die Strukturen gewisser Galoisgruppen miteinander identifiziert, um einen Übergang zu Kapitel zwei zu bekommen. Im zweiten Teil wollen wir dann die (φ_L, Γ_L)-Moduln definieren und die Hauptergebnisse aus Kapitel zwei für diese Moduln umformulieren und beweisen.

1 Die tieferliegenden Sätze

Die Aussagen, die in diesem Kapitel bewiesen werden sind diejenigen grundlegenden Sätze der Algebra, die für den Hauptteil der Arbeit gebraucht werden. Die Beweise sind entnommen aus Mitschriften und Übungen der Vorlesungen "Höhere Algebra 1" bzw. "Höhere Algebra 2" aus dem Sommersemester 2013 bzw. Wintersemester 2013/14, die von Professor Peter Schneider an der Westfälischen Wilhelms-universität Münster gehalten wurden.

1.1 Das Lemma von Nakayama

In diesem Paragraphen sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer), nicht-trivialer Ring mit 1. Wir schreiben nun die Grundlagen für das Nakayama-Lemma auf. Dabei bezeichnet 0 je nach Kontext nicht nur das neutrale Element in einem R-Modul M, sondern auch den trivialen R-Modul und wenn nicht anders angegeben, ist mit einem R-Modul immer ein R-Linksmodul gemeint.

Definition 1.1.1. i) Ein R-Modul $M \neq 0$ heißt *einfach*, falls M und 0 die einzigen Untermoduln von M sind.

ii) Sei M ein R-Modul. Ein R-Untermodul $N \subset M$ heißt *maximal*, falls M/N einfach ist.

Bemerkung. Ein R-Untermodul $N \subset M$ ist maximal, genau dann wenn $N \subsetneq M$ ein echter Untermodul ist, sodass es keinen echten R-Untermodul $N' \subsetneq M$ gibt, wobei $N \subsetneq N'$ eine echte Inklusion ist.

Diese Aussage folgt direkt daraus, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \{N' \subset M \ R\text{-Untermodul} \mid N \subset N'\} &\to \{\overline{N'} \subset M/N \ R\text{-Untermodul}\ \} \\ N' &\mapsto N'/N \\ \mathrm{pr}^{-1}(\overline{N'}) &\leftarrow\!\shortmid \overline{N'} \end{aligned} \tag{1}$$

zueinander inverse Bijektionen sind, wobei $\mathrm{pr} : M \to M/N$ die Projektionsabbildung ist.

Zum Beweis des Nakayama-Lemmas benötigen wir folgende fundamentale Aussage über endlich erzeugte Moduln.

Lemma 1.1.2. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul und $L \subsetneq M$ ein echter R-Untermodul. Dann existiert ein maximaler R-Untermodul $N \subset M$ mit $L \subset N$. Insbesondere besitzt R maximale Linksideale.*

Beweis. Sei $\mathcal{N} := \{N \subsetneq M \ R\text{-Untermodul} \mid L \subset N\}$. Dann ist $\mathcal{N} \neq \emptyset$, weil $L \in \mathcal{N}$ ist. Außerdem ist $\mathcal{N}$ bezüglich der Inklusion induktiv geordnet. Sei dafür $\{N_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{N}$ eine total geordnete Teilmenge. Dann rechnet man leicht nach, dass $N := \bigcup_{i\in I} N_i \subset M$ ein R-Untermodul von M ist, weil $\{N_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{N}$ total geordnet ist. Für $N \in \mathcal{N}$ muss nur noch $N \neq M$ gezeigt werden. Sei dafür $(m_1, \ldots, m_n)$ ein R-Erzeugendensystem von M. Angenommen es wäre $N = M$. Dann gilt $m_1, \ldots m_n \in N$ und somit existiert schon ein $i_0 \in I$ mit $m_1, \ldots m_n \in N_{i_0}$, wieder weil $\{N_i\}_{i\in I}$ total geordnet ist. Das heißt $N_{i_0} = M$, aber das ist ein Widerspruch zu $N_{i_0} \in \mathcal{N}$. Somit gilt $N \in \mathcal{N}$. Nach Lemma von Zorn hat $\mathcal{N}$ ein maximales Element N. Dieses ist auch maximal nach Definition 1.1.1.ii), denn sonst hätten wir nach obiger Bemerkung einen echten R-Untermodul $N' \subsetneq M$ mit $N \subsetneq N'$. Deshalb gilt $N' \in \mathcal{N}$. Das ist aber ein Widerspruch zur Maximalität von N in $\mathcal{N}$. □

Der Leser, dem das Auswahlaxiom missfällt, sei auf Paragraph 1.3 verwiesen. Dort sehen wir, dass es einen elementareren Beweis dieser Aussage gibt, für all diejenigen Ringe R, für die wir das Nakayama-Lemma in dieser Arbeit benötigen.

Wir brauchen noch weitere Charakterisierungen für den Begriff "einfach" von Definition 1.1.1.i).

Proposition 1.1.3. *Für einen R-Modul $M \neq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

i) M ist einfach.

ii) Jedes Element $x \in M \backslash 0$ erzeugt M als R-Modul.

iii) Für jedes $x \in M\backslash 0$ existiert ein maximales Linksdeal $L_x \subset R$, so dass die R-lineare Abbildung

$$R/L_x \tilde{\to} M, \ r + L_x \mapsto rx$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Beweis.

i)⇒ii) Sei $x \in M\backslash 0$ beliebig. Da M einfach ist, ist $\langle x\rangle = M$, wobei $\langle x\rangle$ das R-Erzeugnis von x ist, weil $x \neq 0$ ist.

ii)⇒i) Sei $N \subset M$ ein R-Untermodul mit $N \neq 0$. Dann existiert $x \neq 0$ mit $x \in N$. Nach Voraussetzung erzeugt x den R-Modul M, es gilt also $N = M$.

ii)⇒iii) Nach Voraussetzung ist $f_x : R \to M,\ r \mapsto rx$ surjektiv für alle $x \in M\backslash 0$. Nach Homomorphiesatz gilt also zu zeigen, dass $L_x := \ker(f_x)$ ein maximales Ideal ist. Es ist $L_x \subsetneq R$ eine echte Inklusion, weil $1x = x \neq 0$ ist. Sei dafür $L \subsetneq M$ ein Linksideal mit $L_x \subset L$. Es gilt $f_x(L) \neq M$, denn sonst existiert ein $r \in L$ mit $(r-1)x = 0$. Damit ist $r-1 \in L_x \subset L$ und somit $1 \in L$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $L \neq R$ ist. Da wir schon i)⇔ii) gezeigt haben, gilt also $f_x(L) = 0$ und somit $L_x \subset L \subset L_x$. Also gilt $L_x = L$ und damit ist L_x maximal.

iii)⇒i) R/L ist einfach für jedes maximale Linksideal $L \subset R$. Da wir eine Isomorphie $f : M \to R/L_x$ für ein maximales Ideal L_x haben, ist M auch einfach, denn sei $N \subset M$ ein R-Untermodul mit $N \neq 0$. Dann ist $f(N) \neq 0$ wegen der Injektivität von f und somit gilt $f(N) = R/L_x$. Also gilt $N = f^{-1}(f(N)) = M$. □

Kommen wir zu den wichtigsten Objekten für das Nakayama-Lemma. Ab jetzt schreiben wir $\mathcal{N}$ für die Menge aller maximalen R-Untermoduln von M.

Definition 1.1.4. Sei M ein R-Modul.

i) Wir nennen $\mathcal{R}(M) := \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$ das *Radikal* von M.

ii) Wir nennen $\mathrm{Jac}(R) := \mathcal{R}(R)$ das *Jacobsen-Radikal* des Ringes R.

Bemerkung. Ist $\mathcal{N} = \emptyset$, so gilt nach der Konvention des Schnittes über eine leere Indexmenge, dass $\mathcal{R}(M) = M$ ist.

Wir sammeln nun die für uns wichtigen Eigenschaften des Radikals von M.

Proposition 1.1.5. *Sei M ein R-Modul.*

i) Ist $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R-Modul, so ist die Inklusion $\mathcal{R}(M) \subsetneq M$ echt. Insbesondere ist die Inklusion $\mathrm{Jac}(R) \subsetneq R$ echt.

ii) Ist $L \subset M$ ein R-Untermodul, so gilt $(\mathcal{R}(M) + L)/L \subset \mathcal{R}(M/L)$.

iii) Ist $f : L \to M$ ein Morphismus von R-Moduln. Dann gilt $f(\mathcal{R}(L)) \subset \mathcal{R}(M)$.

iv) $\mathrm{Jac}(R) \subset R$ ist ein (beidseitiges) Ideal von R.

v) Es gilt $\mathrm{Jac}(R)M \subset \mathcal{R}(M)$.

Beweis. Wir können in allen Beweisen ohne Einschränkungen von $M \neq 0$ ausgehen.

i) Für $L = 0$ in Lemma 1.1.2 haben wir $\mathcal{N} \neq \emptyset$ und somit $\mathcal{R}(M) \subsetneq M$.

ii)

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(M) + L)/L &= (\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N + L)/L \\ &\subset (\bigcap_{\substack{N \in \mathcal{N} \\ L \subset N}} N + L)/L \\ &= (\bigcap_{\substack{N \in \mathcal{N} \\ L \subset N}} N)/L \\ &= \bigcap_{\substack{N \in \mathcal{N} \\ L \subset N}} N/L \\ &= \mathcal{R}(M/L)\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit kommt dabei von (1), weil die Bijektion dort die maximalen Ideale erhält, weil die Bijektion offensichtlich die Inklusion respektiert. Für die vorletzte Gleichheit beachte, dass die zweite Bijektion von (1) durch Nehmen des Urbildes der Projektion gegeben ist. Somit respektiert die Bijektion auch Schnitte und damit gilt die vorletzte Gleichheit.

iii) Sei $N \in \mathcal{N}$ beliebig. Wir betrachten den injektiven R-linearen Homomorphismus

$$L/f^{-1}(N) \to M/N, \ x + f^{-1}(N) \mapsto f(x) + N.$$

Da M/N einfach ist, ist $L/f^{-1}(N)$ somit trivial oder isomorph zu M/N. Im ersten Fall ist also

$$f(\mathcal{R}(L)) \subset f(L) = f(f^{-1}(N)) \subset N$$

und im zweiten Fall ist $f^{-1}(N)$ maximal, also

$$f(\mathcal{R}(L)) \subset f(f^{-1}(N)) \subset N.$$

Da $N \in \mathcal{N}$ beliebig war, gilt also $f(\mathcal{R}(L)) \subset \mathcal{R}(M)$.

iv) Man überprüft leicht, dass

$$f_s : R \to R, \ r \mapsto rs$$

ein Morphismus von R-Moduln ist für jedes $s \in R$. Nach iii) gilt nun

$$\mathrm{Jac}(R)s = f_s(\mathrm{Jac}(R)) \subset \mathrm{Jac}(R)$$

und somit ist $\mathrm{Jac}(R)$ auch Rechtsideal und somit beidseitiges Ideal.

v) Sei $N \in \mathcal{N}$ beliebig. Dann ist also M/N einfach. Wähle nun irgendein $x + N \in M/N$ mit $x + N \neq 0$. Nach Proposition 1.1.3 existiert ein maximales Linksideal $I_N \subset R$, so dass

$$f_x : R/I_N \to M/N,\ r + I_N \mapsto rx + N$$

bijektiv ist. Insbesondere ist

$$f : R/\operatorname{Jac}(R) \to M/N,\ r + \operatorname{Jac} R \mapsto rx + N$$

ein wohldefinierter surjektiver Homomorphismus von R-Moduln. Seien nun $s \in \operatorname{Jac}(R)$ und $m \in M$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert nun ein $r \in R$, so dass $n := m - rx \in N$ ist und somit gilt

$$sm = srx + sn \in N,$$

denn nach iv) ist $sr \in \operatorname{Jac}(R)$ und damit gilt

$$srx + N = f(sr + \operatorname{Jac}(R)) = f(0 + \operatorname{Jac}(R)) = 0 + N.$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Jac}(R)M \subset N$ und weil $N \in \mathcal{N}$ beliebig war, somit auch $\operatorname{Jac}(R)M \subset \mathcal{R}(M)$. □

Jetzt sind wir so weit das Nakayama-Lemma in seiner allgemeinen Form zu beweisen.

Satz 1.1.6. (Lemma von Nakayama)
Sei M ein R-Modul und $N \subset M$ ein R-Untermodul, so dass M/N endlich erzeugt ist. Dann haben wir folgende Implikation.

$$N + \operatorname{Jac}(R)M = M \Rightarrow N = M$$

Beweis. Nach Proposition 1.1.5.v) gilt

$$N + \mathcal{R}(M) = M$$

und somit folgt mit Proposition 1.1.5.ii)

$$M/N = (\mathcal{R}(M) + N)/N \subset \mathcal{R}(M/N) \subset M/N.$$

Insgesamt gilt $\mathcal{R}(M/N) = M/N$. Da M/N endlich erzeugt ist, gilt wegen Proposition 1.1.5.i), dass $M/N = 0$ ist, also gilt $M = N$. □

Wir benötigen für die Beweise des Hauptteils der Arbeit nun eine spezielle Anwendung des Nakayama-Lemmas.

Definition 1.1.7. Ein Ring R heißt *lokal*, falls R genau ein maximales Linksideal $\mathfrak{m}$ besitzt.

Bemerkung. Im Fall eines lokalen Ringes R gilt also $\mathfrak{m} = \operatorname{Jac}(R)$ und somit ist nach Proposition 1.1.5.iv) $\mathfrak{m}$ ein maximales (beidseitiges) Ideal und insbesondere $R/\mathfrak{m}$ ein Ring. Um das zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \cdot : R/\mathfrak{m} \times R/\mathfrak{m} &\to R/\mathfrak{m} \\ (r+\mathfrak{m}, s+\mathfrak{m}) &\mapsto rs+\mathfrak{m} \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung ist. Die restlichen Ringaxiome folgen dann aus den Ringaxiomen von R. Seien also $r_1 - r_2 \in \mathfrak{m}$ und $s_1 - s_2 \in \mathfrak{m}$. Jetzt ist zu zeigen, dass $r_1 s_1 - r_2 s_2 \in \mathfrak{m}$ ist. Es gilt aber

$$r_1 s_1 - r_2 s_2 = (r_1 - r_2)s_1 + r_2(s_1 - s_2) \in \mathfrak{m}.$$

Lemma 1.1.8. *Ein Ring R ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, genau dann wenn $R \backslash R^\times$ ein (maximales) Ideal ist.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, weil jede Einheit den ganzen Ring erzeugt. Für die Hinrichtung zeigen wir $\mathfrak{m} = R \backslash R^\times$. $\mathfrak{m} \subset R\backslash R^\times$ gilt mit selben Argument wie die Rückrichtung. Sei also $r \in R\backslash R^\times$. Da $1 \notin Rr$, dem R-Erzeugnis von r, ist, gilt $r \in rR \subset \mathfrak{m}$ nach Lemma 1.1.2 und der Voraussetzung. Insgesamt gilt also $\mathfrak{m} = R\backslash R^\times$. $\square$

Proposition 1.1.9. *Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann ist $D := R/\mathfrak{m}$ ein Schiefkörper. Sei zusätzlich M ein endlich erzeugter R-Modul. Seien jetzt $x_1, \ldots, x_n \in M$ Elemente, so dass $(x_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, x_n + \mathfrak{m}M)$ eine D-Basis von $M/\mathfrak{m}M$ bilden. Dann ist $(x_1, \ldots, x_n)$ ein R-Erzeugendensystem von M.*

Beweis. Sei jetzt $r + \mathfrak{m} \neq 0 \in D$. Das heißt also $r \in R\backslash\mathfrak{m} = R^\times$ nach Lemma 1.1.8. Somit existiert $s \in R$ mit $rs = 1 = sr$ und die gleiche Rechnung gilt auch für die Restklassen in D. Also ist $r + \mathfrak{m} \in D^\times$ und damit ist D ein Schiefkörper.

Sei jetzt M ein endlich erzeugter R-Modul und $m_1, \ldots, m_n \in M$ Elemente, so dass $(m_1 + \mathfrak{m}M, \ldots m_n + \mathfrak{m}M)$ eine D-Basis von $M/\mathfrak{m}M$ bilden. Schreibe jetzt

$$N := \langle m_1, \ldots, m_n \rangle \subset M$$

für den von $(m_1, \ldots, m_n)$ erzeugten R-Modul von M. Dann gilt nach Voraussetzung

$$N + \operatorname{Jac}(R)M = N + \mathfrak{m}M = M$$

und somit nach Satz 1.1.6 gerade $M = N$, weil mit M auch M/N endlich erzeugt ist. $\square$

1.2 Der nicht-abelsche Hilbert 90

In diesem Abschnitt sei K ein beliebiger Körper. Wir brauchen für Hilbert 90 ein Ergebnis von Artin über die sogenannten "Charaktere".

Definition 1.2.1. Ist G eine beliebige Gruppe. Dann nennen wir einen Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to K^\times$ einen *K-wertigen Charakter* von G.

Wir fassen die K-wertigen Charaktere einer Gruppe G jetzt als Elemente des K-Vektorraums der Abbildungen von G nach K auf, den wir mit $\mathrm{Abb}(G, K)$ bezeichnen. Somit ergibt folgende Aussage Sinn.

Satz 1.2.2. (Emil Artin) *Sind $\chi_1, \dots, \chi_n$ verschiedene K-wertige Charaktere, so sind diese K-linear unabhängig in $Abb(G, K)$.*

Beweis. (Siehe Bos05, Satz 4.6.2) □

Kommen wir jetzt zu den Objekten die wir in Hilbert 90 untersuchen.

Definition 1.2.3. Sei G eine proendliche Gruppe und A eine (nicht notwendigerweise abelsche) topologische Gruppe.

A heißt G-Gruppe, falls eine stetige G-Wirkung auf A gegeben ist. Das bedeutet, es existiert eine bezüglich der Produkttopologie stetige Abbildung

$$G \times A \to A, (g, a) \mapsto ga,$$

mit folgenden Eigenschaften.

i) Es gilt $(gh)a = g(ha)$ für alle $g, h \in G$ und $a \in A$.

ii) Es gilt $g(a_1a_2) = ga_1ga_2$ für alle $g \in G$ und $a_1, a_2 \in A$.

Bemerkung. Man macht sich schnell klar, dass wegen ii) der Definition

$$g1_A = 1_A \text{ und } ga^{-1} = (ga)^{-1} \text{ für alle } g \in G$$

gilt.

Definition 1.2.4. Sei G eine proendliche Gruppe und A eine (nicht notwendigerweise abelsche) topologische Gruppe.

i) Ein *(stetiger) 1-Kozykel* von G mit Werten in A ist eine stetige Abbildung $c : G \to A$, so dass

$$c(gh) = c(g)gc(h) \text{ für alle } g, h \in G \text{ gilt.}$$

Wir schreiben $C^1(G, A)$ für die Menge aller stetigen 1-Kozykel.

ii) Wir definieren auf der $C^1(G, A)$ die Relation

$$b \sim c :\Leftrightarrow \exists a \in A : b(g) = a^{-1}c(g)ga \ \forall g \in G.$$

Bemerkung. i) Wegen $g1_A = 1_A$ und weil konstante Abbildungen immer stetig sind, ist

$$c_1 : G \to A, g \mapsto 1_A$$

immer ein 1-Kozykel und man nennt diesen den *trivialen* 1-Kozykel.

ii) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, denn $c \sim c$ haben wir wegen $g1_A = 1_A$, indem wir in der Definition der Relation $a = 1_A$ setzen. Ist $b \sim c$ durch ein $a \in A$ in der Definition der Relation gegeben, so gilt wegen $ga^{-1} = (ga)^{-1}$, dass $c \sim b$ durch a^{-1} gegeben ist. Ist jetzt $b \sim c$ durch $a_1 \in A$ und $c \sim d$ durch $a_2 \in A$, so ist wegen ii) von Definition 1.2.3 $b \sim d$ durch a_2a_1 gegeben. Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Definition 1.2.5.

i) Wir nennen ein $c \in C^1(G, A)$ für das $c \sim c_1$ gilt einen *1-Korand* von G mit Werten in A.

ii) Wir nennen $H^1(G, A) := C^1(G, A)/\sim$ die *erste Kohomologie* von G mit Werten in A.

Sei ab jetzt $L|K$ eine (nicht notwendigerweise endliche) Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(L|K)$. Dazu sollte der Leser mit G als proendlicher Gruppe vertraut sein. Vergleiche dazu (Neu92, Kapitel IV §1).

Satz 1.2.6. (Hilbert 90, der abelsche Fall)
Betrachten wir $L^\times$ mit der trivialen Topologie, so wird $L^\times$ mit der natürlichen G-Aktion zu einer G-Gruppe und es gilt

$$H^1(G, L^\times) = \{c_1\}.$$

Das heißt die Menge der 1-Kozykel ist gerade die Menge aller 1-Koränder von G mit Werten in $L^\times$.

Beweis. Dass die Wirkung

$$\rho : G \times L^\times \to L^\times, \ (\sigma, x) \mapsto \sigma(x) =: \sigma x$$

i) und ii) von Definition 1.2.3 erfüllt, ist klar. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass die Wirkung auch stetig ist, um zu zeigen, dass $L^\times$ so zu einer G-Gruppe wird. Da $L^\times$ die triviale Topologie trägt, genügt es zu zeigen, dass jedes $x \in L^\times$ einen offenen Stabilisator hat. Das heißt, es existiert eine offene Untergruppe $U \subset G$, so dass

$$\sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in U \text{ gilt.}$$

Da $L|K$ galoisch ist, ist jeder Zwischenkörper F von $L|K$ separabel über K und somit ist $K_x|K$ galoisch, wobei K_x die normale Hülle von $K(x)$ ist. Setze nun

$$U := \mathrm{Gal}(L|K_x).$$

Da $K_x|K$ endlich ist, ist diese Gruppe offen in der proendlichen Topologie von G und nach Definition gilt $\sigma(x) = x$ für alle $\sigma \in U$. Also ist die G-Wirkung stetig auf $L^\times$, denn sei $(\tau, y) \in \rho^{-1}(\{x\})$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt also nach oben gezeigtem

$$\rho(U\tau \times \{y\}) = \{x\}$$

und somit ist $U\tau \times \{y\} \subset \rho^{-1}(\{x\})$ eine offene Umgebung für (τ, y). Also ist ρ stetig.

Kommen wir jetzt zu der Aussage $H^1(G, L^\times) = \{c_1\}$. Wir untersuchen zunächst den Fall das $L|K$ endlich ist.

Sei $c \in C^1(G, L^\times)$ beliebig. Für $x \in L^\times$ setze

$$y := \sum_{\tau \in G} c(\tau)\tau x.$$

Wir rechnen nun für beliebiges $\sigma \in G$

$$\sigma y = \sum_{\tau} \sigma c(\tau)\sigma\tau x = \sum_{\tau} c(\sigma)^{-1} c(\sigma\tau)\sigma\tau x = c(\sigma)^{-1} y.$$

Die erste Gleichheit kommt von der Additivität von σ, die zweite von der Definition eines 1-Kozykels. Die letzte Gleichheit kommt daher, dass $(\tau \mapsto \sigma\tau)$ eine Bijektion auf G ist. Finden wir jetzt ein $x \in L^\times$, so dass $y \in L^\times$ ist, so gilt

$$c(y) = y \cdot \sigma y^{-1} \text{ für alle } \sigma \in G.$$

Damit ist c ein 1-Korand.

Jetzt definiere für beliebiges $\tau \in G$

$$\chi_\tau : L^\times \to L^\times, x \mapsto \tau x.$$

Wegen Multiplikativität von τ ist das ein L-wertiger Charakter von $L^\times$. Nach Satz 1.2.2 sind die $(\chi_\tau)_{\tau \in G}$ L-linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(L^\times, L)$, also ist wegen $c(\tau) \neq 0$

$$\sum_{\tau} c(\tau)\tau(\cdot) \neq 0 \in \mathrm{Abb}(L^\times, L).$$

Das heißt, es existiert ein $x \in L^\times$, so dass $y := \sum_\tau c(\tau)\tau x \neq 0$ ist.

Jetzt betrachten wir den Fall, dass $L|K$ beliebig ist. Sei dafür wieder $c \in C^1(G, A)$ beliebig. Da die Topologie auf $L^\times$ diskret ist, ist $c^{-1}(\{1\}) \subset G$ offen. Außerdem gilt

$$c(\mathrm{id}) = c(\mathrm{id}\,\mathrm{id}) = c(\mathrm{id})\,\mathrm{id}\,c(\mathrm{id}) = c(\mathrm{id})(\,\mathrm{id})$$

und somit $1 = c(\mathrm{id})$. Deshalb ist $c^{-1}(\{1\})$ eine offene Umgebung von $\mathrm{id} \in G$. Also existiert wegen der proendlichen Topologie von G ein offener Normalteiler $N_0 \subset G$, so dass

$$N_0 \subset c^{-1}(\{1\}) \text{ gilt.}$$

Insbesondere gilt

$$c(n_0\sigma) = c(n_0)n_0c(\sigma) = n_0c(\sigma) \text{ für alle } \sigma \in G.$$

Da $N_0 \subset G$ von endlichem Index ist, existieren $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in G$, sodass G die folgende disjunkte Vereinigung ist.

$$G = N_0\sigma_1 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, N_0\sigma_r.$$

Mit einem ähnlichem Argument wie bei dem Beweis der Stetigkeit der Wirkung finden wir eine endliche und galoische Teilerweiterung $L|F$ und $F|K$ die alle $c(\sigma_1), \ldots, c(\sigma_r)$ enthält. Sei jetzt $\sigma \in G$ beliebig. Dann existiert nach Zerlegung von G oben ein $i = 1, \ldots, r$ und $n_0 \in N_0$ mit $\sigma = n_0\sigma_i$. Demnach gilt nach oben berechnetem

$$c(\sigma) = n_0c(\sigma_i) \in n_0F^\times = F^\times.$$

Also gilt $\mathrm{im}(c) \subset F^\times$.

Da $L^{N_0}|K$ nach Hauptsatz der Galoistheorie immer noch eine endliche galoische Erweiterung ist und die Komposition von galoischen Erweiterungen selber galoisch ist, können wir F so wählen, dass zusätzlich

$$L^{N_0} \subset F \text{ gilt.}$$

Nach dem Hauptsatz gilt also wieder $N_0 \supset \mathrm{Gal}(L|F) =: N$. Deshalb gilt

$$c(n\sigma) = nc(\sigma) = c(\sigma) \text{ für alle } n \in N,\ \sigma \in G,$$

weil $c(\sigma) \in F^\times$ ist. Damit existiert ein 1-Kozykel c' von $G/N = \mathrm{Gal}(F|K)$ mit Werten in $F^\times$, so dass $c = c' \circ \mathrm{pr}$ ist, wobei $\mathrm{pr} : G \to G/N$ die natürliche Projektion ist. Da $F|K$ endlich ist, finden wir nach dem zuerst gezeigten Fall ein $y \in F^\times \subset L^\times$, so dass

$$c(\sigma) = c'(N\sigma) = y\sigma y^{-1} \text{ ist.}$$

Also ist auch c ein 1-Korand. $\square$

Für unsere Zwecke brauchen wir aber noch eine nicht-abelsche Verallgemeinerung dieser Aussage über die Automorphismengruppe $\mathrm{GL}_n(L)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren dabei für $A := (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{GL}_n(L)$

$$\sigma(a_{ij})_{ij} := (\sigma(a_{ij}))_{ij}.$$

Das ist wohldefiniert, denn es gilt

$$\det(\sigma(A)) = \sigma(\det(A)),$$

weil die Determinante polynomiell über L ist.

Satz 1.2.7. *(Hilbert 90, der nicht-abelsche Fall)*
Durch die oben definierte Wirkung wird $GL_n(L)$ zu einer G-Gruppe, wenn wir $GL_n(L)$ mit der diskreten Topologie versehen. Dann gilt

$$H^1(G, GL_n(L)) = \{c_1\}.$$

Beweis. Dass die Wirkung i) von Definition 1.2.3 erfüllt, ist klar. Da σ additiv und multiplikativ auf den einzelnen Komponenten von $A \in \mathrm{GL}_n(L)$ wirkt, gilt auch $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$ und somit ii) von Definition 1.2.3.

Die Stetigkeit der Wirkung zeigt man so, wie die Stetigkeit der Wirkung in Satz 1.2.6 gezeigt wurde. Man muss die galoische Erweiterung, die dort K_x heißt so erweitern, dass alle Einträge einer Matrix A in K_x liegen.

Da $\mathrm{id}\, A = A$ ist für alle $A \in \mathrm{GL}_n(L)$, kann man sich mit einem analogen Argument, wie dem Argument im Beweis von Satz 1.2.6 auf den Fall beschränken, dass $L|K$ endlich ist. Insbesondere gilt hier auch $c(\mathrm{id}) = 1$.

Sei jetzt $c \in C^1(G,\mathrm{GL}_n(L))$ beliebig. Für $v \in L^n$ setze

$$f(v) := \sum_{\tau \in G} c(\tau)\tau v,$$

wobei G komponentenweise auf L^n wirkt. Wir zeigen nun zunächst, dass $f(L^n)$ den L-Vektorraum L^n erzeugt. Sei dafür $\lambda : L^n \to L$ eine beliebige Linearform, so dass

$$\lambda(f(v)) = 0 \text{ gilt für alle } v \in L^n.$$

Für alle $a \in L^\times$ und $v \in L^n$ rechnet man dann

$$0 = \lambda(f(av)) = \sum_\tau \lambda(c(\tau)\tau(av)) = \sum_\tau \lambda(c(\tau)\tau a \tau v) = \sum_\tau \tau a \lambda(c(\tau)\tau v).$$

Setze nun wieder

$$\chi_\tau : L^\times \to L^\times, a \mapsto \tau a.$$

Nach Satz 1.2.2 sind die $(\chi_\tau)_\tau$ wieder L-linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(L^\times, L)$ und somit gilt nach obiger Rechnung

$$\lambda(c(\tau)\tau v) = 0 \text{ für alle } v \in L^n, \tau \in G.$$

Für $\tau = \mathrm{id}$ gilt insbesondere wegen $c(\mathrm{id}) = 1$ und $\mathrm{id}\, v = v$, dass

$$\lambda(v) = 0 \text{ ist, für alle } v \in L^n.$$

Somit ist $\lambda = 0$ und somit der von $f(L^n)$ erzeugte Untervektorraum schon gleich L^n. Denn sonst gäbe es eine Linearform $\lambda : L^n \to L$ die nicht Null ist, aber so dass $\lambda(f(L^n)) = 0$ ist, weil es für jeden Untervektorraum $U \subset L^n$ einen anderen Untervektorraum U' gibt, so dass $U \oplus U' = L^n$ ist.

Wähle jetzt $v_1, \ldots, v_n$, so dass $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine L-Basis von L^n bildet. Definiere $X \in L^{n\times n}$ durch

$$Xe_i := v_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Setze nun

$$Y := \sum_{\tau\in G} c(\tau)\tau X \in L^{n\times n}.$$

Dann gilt

$$Ye_i = \sum_{\tau\in G} c(\tau)\tau X e_i = \sum_{\tau\in G} c(\tau)\tau v_i = f(v_i) \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

Damit ist $Y \in \mathrm{GL}_n(L)$, weil es eine Basiswechselmatrix ist. Wir rechnen nun wie im Beweis von Satz 1.2.6 für beliebiges $\sigma \in G$

$$\sigma Y = \sum_{\tau\in G} \sigma c(\tau)\sigma\tau X = \sum_{\tau\in G} c(\sigma)^{-1} c(\sigma\tau)\sigma\tau X = c(\sigma)^{-1} Y,$$

also $c(\sigma) = Y\sigma Y^{-1}$ für alle $\sigma \in G$. Somit ist c ein 1-Korand. $\square$

1.3 Der Elementarteilersatz

Sei R in diesem Paragraphen ein Hauptidealring.

Satz 1.3.1. *(Elementarteilersatz, Version 1)*
Ist M ein freier R-Modul von endlichem Rang und $N \subset M$ ein Untermodul. Dann existieren $x_1, \dots x_n \in M$, die sich zu einer R-Basis von M ergänzen lassen und Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R \backslash \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften.

i) Die Elemente $\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n$ bilden eine R-Basis von N.

ii) Es gilt $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$.

Die α_i sind dabei bis auf Assoziiertheit eindeutig durch N bestimmt und unabhängig von der Wahl der $x_1, \dots, x_n$. Wir nennen die α_i die Elementarteiler *von N in M.*

Beweis. (Siehe Bos05, Theorem 2.9.2) □

Satz 1.3.2. *(Elementarteilersatz, Version 2)*
Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann existiert ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$ so dass gilt

$$M \cong R^n \oplus M_{tor}.$$

Dabei ist M_{tor} der Torsionsmodul von M. Sei weiterhin $\mathbb{P}$ ein Repräsentantensystem aller Primelemente bis auf Assoziiertheit. Dann gilt

$$M_{tor} = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} M_p,$$

wobei

$$M_p = \{x \in M \mid p^n x = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \text{ ist.}$$

Dann gibt es für jedes p eindeutige natürliche Zahlen

$$1 \leq \nu(p,1) \leq \dots \leq \nu(p, r_p),$$

so dass

$$M_p \cong \bigoplus_{j_p=1}^{r_p} R/p^{\nu(p,j_p)} R \text{ gilt.}$$

Fast alle r_p sind dabei gleich Null. Wir nennen die $p^{\nu(p,j_p)}$ die Elementarteiler *von M.*

Beweis. (Siehe Bos05, Korollar 2.9.7 & Korollar 2.9.8) □

In der Arbeit werden wir beide Sätze immer mit Elementarteilersatz referenzieren.

2 Die φ_L-Moduln

Wir fixieren für den Rest der Arbeit eine Primzahl p. Ab dem zweiten Paragraphen dieses Kapitels fixieren wir zusätzlich eine endliche Körpererweiterung $L|\mathbb{Q}_p$, dessen Ganzheitsring o, ein Primelement $\pi \in o$ und dessen Restklassenkörper k. In diesem Kapitel wollen wir zunächst einmal eine Kategorie konstruieren, die aus Moduln besteht, die weniger Struktur aufweisen als die (φ_L, Γ_L)-Moduln, die φ_L-Moduln. Wir wollen hier zunächst einige Kategorienäquivalenzen zeigen, die im nächsten Kapitel dann auf die Kategorien der (φ_L, Γ_L)-Moduln fortgesetzt werden. Wir gehen dabei auf zwei verschiedene Weisen vor. Zunächst arbeiten wir noch mit $\mathbb{Q}_p$ statt mit L und benutzen die Methoden von Fontaine, um die Verbindung von den $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$-Moduln zu gewissen Darstellungen über $\mathbb{Z}_p$ zu etablieren. Im zweiten Teil kommt dann die von uns entwickelte direkte Methode zum Einsatz, um die Ergebnisse zu verallgemeinern und ein besseres Verständnis zu den Darstellungen zu gewinnen.

2.1 Die Methode Fontaines

Sei in diesem Abschnitt E ein beliebiger Körper der Charakteristik p. Wir teilen diesen Paragraphen in zwei Abschnitte. Zunächst wollen wir die notwendigen Konstruktionen machen. Dann zitieren wir die Ergebnisse von Fontaine, mit denen wir die von uns gewünschten Aussagen über die $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$-Moduln beweisen.

2.1.1 Die Konstruktionen der Ringe

Der Ring über dem wir die $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$-Moduln aufbauen wollen, ist ein gewisser Ring, der E als Restklassenkörper besitzt. Wir beginnen nun damit, die Existenz eines solchen Ringes zu sichern und gehen dabei nach (Mat86, § 26-29) vor. Für den Rest der Arbeit sind dabei alle Ringe kommutativ.

Definition 2.1.1. i) Sei k ein Körper und A eine k-Algebra. Dann heißt A *separabel*, falls für jede Körpererweiterung $K|k$ die k-Algebra $A \underset{k}{\otimes} K$ keine nilpotenten Elemente enthält.

ii) Sei A ein Ring, B eine A-Algebra und $I \subset B$ ein Ideal. Dann heißt die topologische A-Modul Struktur auf B die I*-adische* Topologie, die dadurch gegeben ist, dass die $(I^n)_n$ ein fundamentales Umgebungssystem der 0 bilden. Dies ist sogar eine Topologie von A-Algebren, weil I ein Ideal ist.

iii) Sei A ein Ring, B eine A-Algebra und $I \subset B$ ein Ideal. Wir betrachten B mit der I-adischen Topologie. Jetzt heißt B *I-glatt über A*, falls es für jede A-Algebra C, jedes Ideal $N \subset C$ mit $N^2 = 0$ und jeden A-Algebrenmorphismus $u : B \to C/N$, der stetig für die diskrete Topologie auf C/N ist (d.h. es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $u(I^n) = 0$) ein A-Algebrenmorphismus $v : B \to C$ existiert, so dass $\mathrm{pr} \circ v = u$ ist, wobei mit $\mathrm{pr} : C \to C/N$ die Projektion gemeint ist.

Bemerkung. Beachte, dass der Lift v aus Definition 2.1.1.iii) selber stetig bezüglich der diskreten Topologie auf C sein muss. Denn weil u stetig ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$v(I^n) = N, \text{ also } v(I^{2n}) = N^2 = 0.$$

Matsumura baut in den Paragraphen 26 und 28 von (Mat86) die Theorien über separable Algebren und I-adische Glattheit auf. Wir formulieren jetzt die für uns wichtigen Ergebnisse dieser Theorien.

Satz 2.1.2. *i) Ist A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k und B eine flache A-Algebra. Sei $k \underset{A}{\otimes} B$ 0-glatt über k. Dann ist B $\mathfrak{m}B$-glatt über A.*

ii) Ist k ein Körper, der perfekt ist im Sinne des Separabelitätsbegriffs für algebraische Körpererweiterungen, so ist jede beliebige Körpererweiterung $K|k$ separabel im Sinne von Definition 2.1.1.i).

iii) Jede nach Definition 2.1.1.i) separable Körpererweiterung $K|k$ ist 0-glatt über k.

Beweis. (Siehe Mat86, Theorem 28.10 für i), Theorem 26.3 für ii) und Theorem 26.9 für iii))

Für die Existenz des von uns gewünschten Ringes, brauchen wir noch ein paar grundlegende Aussagen über die Theorie des Ganzheitsbegriffs (Siehe Neu92, § 2).

Satz 2.1.3. *Sei A ein Integritätsbereich.*

i) Ist $A \subset B$ eine Ringerweiterung und $\alpha \in B$ ganz über A, so ist $A[\alpha]$ ganz über A und endlich erzeugt als A-Modul.

ii) Jeder Hauptidealring ist ganzabgeschlossen.

iii) Ist A ganzabgeschlossen, $K := Quot(A)$ der Quotientenkörper von A und $L|K$ eine endliche Körpererweiterung, so ist ein Element $\alpha \in L$ genau dann ganz über A, falls das Minimalpolynom von α über K Koeffizienten in A hat.

Beweis. (Siehe Neu92, Satz 2.2 für i) und Seite 8-9 für ii) und iii))

Wir erarbeiten jetzt eine verallgemeinerte Konstruktion von dem Ring, den wir benötigen.

Lemma 2.1.4. *i) Sei A ein diskreter Bewertungsring (ab jetzt DBR) mit t als Uniformisierer und k als Restklassenkörper. Für $K|k$ existiert ein DBR $B \supset A$ mit gleichem Uniformisierer t und K als Restklassenkörper.*

ii) Sei A ein $\mathfrak{m}$-adisch vollständiger DBR, d.h. $A \cong \lim_n A/\mathfrak{m}^n$, mit Restklassenkörper K und R ein DBR mit Uniformisierer p, Charakteristik 0 und Restklassenkörper k. Dann setzt sich jede Körpererweiterung $\phi_0 : k \to K$ fort zu einem lokalen Ringmorphismus $\phi : R \to A$.

Beweis. (angelehnt an Mat86, Theorem 29.1 und 29.2)
Zu i). Ohne Einschränkungen ist $t \neq 0$, weil die Aussage sonst trivial ist. Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Transzendenzbasis von $K|k$. Setze

$$A' := A[(X_i)_{i\in I}], A_1 := (A')_{tA'}.$$

A' ist also der Polynomring mit Variablen in Bijektion zur obigen Transzendenzbasis und A_1 die Lokalisierung von A' an dem Primideal tA'. Das ist ein Primideal, weil

$$A'/tA' \cong k[(X_i)_{i\in I}] \text{ ein Integritätsbereich ist.}$$

Sei nun $f \in A'$ ein Polynom mit $f \neq 0$. Da f nur endlich viele Koeffizienten aus A hat, existiert also ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$f \in t^n A' \backslash t^{n+1} A' \text{ ist.}$$

Da jedes Element $h \in A_1$ mit $h \neq 0$ von der Form $h = \frac{f}{g}$ mit $f, g \in A',\ f \neq 0$ und $g \notin tA'$ ist, gibt es auch ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$h \in t^n A_1 \backslash t^{n+1} A_1 \text{ ist.}$$

Insbesondere gilt

$$\bigcap_n t^n A_1 = 0.$$

Nach (Mat86, Theorem 4.1.ii)) ist tA_1 das einzige maximale Ideal von A_1 und nach (Sch16, Remark 1.1.20) ist A_1 ein Hauptidealring. Insgesamt ist A_1 ein DBR. Außerdem gilt, weil Faktorisieren und Lokalisieren vertauschen (siehe Mat86, Theorem 4.2), dass

$$A_1/tA_1 \cong Quot(A'/tA') \cong Quot(k[(X_i)_{i\in I}]) = k((x_i)_{i\in i}) \text{ ist.}$$

Da wir unsere Suche nach dem geforderten B also auch für A_1 fortsetzen können und der Restklassenkörper von A_1 den Körper K als algebraische Erweiterung hat, können wir ohne Einschränkungen $K|k$ algebraisch annehmen.

Sei nun L ein algebraischer Abschluss von $Quot(A)$ und $\mathfrak{F}$ die Menge aller Tupel

$$(B, \varphi) \text{ mit } A \subset B \subset L \text{ ist DBR und } \varphi : B \to K \text{ ist Ringmorphismus mit } \ker(\varphi) = tB.$$

$\mathfrak{F}$ ist nicht leer, weil $(A, \mathrm{pr}) \in \mathfrak{F}$ ist, wobei $\mathrm{pr} : A \to A/tA$ die Projektion ist. Wir definieren eine Halbordnung auf $\mathfrak{F}$ durch

$$(B, \varphi) \leq (C, \psi) :\Leftrightarrow B \subset C \text{ und } \varphi = \psi_{|B}.$$

Sei nun $(B_i, \varphi_i)_{i\in I}$ eine total geordnete Kette in $\mathfrak{F}$. Definiere

$$B_0 := \bigcup_{i\in I} B_i.$$

Da die B_i durch die Inklusion total geordnet sind, ist B_0 ein Ring. Außerdem zeigen wir jetzt, dass

$$\mathfrak{m}_0 := \bigcup_{i\in I} \ker(\varphi_i)$$

das einzige maximale Ideal von B_0 ist. Sei dafür $b \in B_0$ und $x \in \mathfrak{m}_0$ gegeben. Es existieren also $i, j \in I$, so dass $b \in B_i$ und $x \in \ker(\varphi_j)$ ist. Da entweder $B_i \subset B_j$ oder $\varphi_j = \varphi_{i_{|B_j}}$ ist können wir also $i = j$ annehmen und somit ist $bx \in \ker(\varphi_i) \subset \mathfrak{m}_0$. Deshalb ist es ein Ideal. Nach Lemma 1.1.8 genügt es jetzt zu zeigen, dass

$$B_0 \backslash \mathfrak{m}_0 = B_0^\times \text{ ist.}$$

Sei also $x \in B_0\backslash\mathfrak{m}_0$. Dann existiert nach Definition von B_0 und $\mathfrak{m}_0$ ein $i \in I$ mit $x \in B_i\backslash\mathfrak{m}_0 \cap B_i \subset B_i\backslash \ker(\varphi_i)$. Da $t \neq 0$ und B_i ein DBR ist, gilt nach Lemma 1.1.8 also

$$x \in B_i^\times \subset B_0^\times.$$

Sei umgekehrt $x \in B_0^\times$. Dann ist $x \notin \mathfrak{m}_0$, denn sonst wäre auch $1 \in \mathfrak{m}_0$, weil wir schon gezeigt haben, dass es ein Ideal ist. Dann gäbe es aber wieder ein $i \in I$ mit $1 \in \ker(\varphi_i)$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von Ringmorphismen in einen nicht-trivialen Ring.

Da jedes $\ker(\varphi_i)$ von t erzeugt wird, gilt auch $\mathfrak{m}_0 = tB_0$. Für jedes $x \in B_0$ mit $x \neq 0$ existiert ein $i \in I$ so, dass $x \in B_i$ ist. Demnach existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$x = t^n u \text{ für ein } u \in B_i^\times \text{ ist,}$$

weil die B_i DBR mit Uniformisierer t sind. Angenommen t^{n+1} wäre in B_0 ein Teiler von x. Dann wäre

$$\frac{x}{t^{n+1}} = \frac{u}{t} \in B_0.$$

Da $u \in B_i^\times \subset B_0^\times$ ist, wäre aber auch $\frac{1}{t} \in B_0$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $t \in \mathfrak{m}_0$ keine Einheit in B_0 ist. Hier gilt also auch

$$\bigcap_n \mathfrak{m}_0^n = \bigcap_n t^n B_0 = 0,$$

und somit ist B_0 ein DBR, wieder nach (Sch16, Remark 1.1.20).

Setze jetzt $\varphi_0 = \varphi_i$ auf B_i. Das ist wohldefiniert nach Definition der partiellen Ordnung. Dann gilt nach Definition von φ_0 und $\mathfrak{m}_0$

$$\ker(\varphi_0) = \mathfrak{m}_0 = tB_0.$$

Also besitzt die totale Kette $(B_i, \varphi_i)_i$ eine obere Schranke durch (B_0, φ_0). Nach Lemma von Zorn hat $\mathfrak{F}$ also ein maximales Element. Nennen wir so eins (B, φ). Wir müssen jetzt noch zeigen, dass $\varphi : B \to K$ surjektiv ist, denn dann gilt $B/tB \cong K$, weil $\ker(\varphi) = tB$ ist.

Nehmen wir dazu das Gegenteil an und nehmen uns ein $a \in K \backslash \varphi(B)$. $\varphi(B)$ ist ein Körper, weil B ein DBR und $tB = \ker(\varphi)$ somit ein Primideal ungleich Null, also maximal ist. Da $K|k$ algebraisch ist, können wir das Minimalpolynom $f \in \varphi(B)[X]$ von a über $\varphi(B)$ betrachten. Wähle jetzt ein normiertes Urbild $\overline{f}$ von f unter φ. Dann ist $\overline{f}$ selber irreduzibel in $B[X]$, weil die einzige Zerlegung von $\overline{f}$ in Nichteinheiten eine Zerlegung in zwei nicht-konstante Polynome wäre, weil $\overline{f}$ normiert ist. Dann wäre aber auch f eine Zerlegung von zwei nicht-konstanten Polynomen. Das ist ein Widerspruch dazu, dass f irreduzibel ist. Nach dem Lemma von Gauß (siehe Bos05, Satz 2.7.7) ist $\overline{f}$ somit auch in $Quot(B)[X]$ irreduzibel. Jetzt zeigen wir

$$B' := B[X]/(\overline{f}) \cong B[\alpha],$$

wobei $\alpha \in L$ ein Element mit $\overline{f}(\alpha) = 0$ ist. Denn ist $g(\alpha) = 0$ für ein $g \in B[X]$, so gilt nach oben gezeigtem $\overline{f} \mid g$ in $Quot(B)[X]$. Demnach ist

$\overline{f}$ in der Primfaktorzerlegung von g in $Quot(B)[X]$ und somit auch in der Primfaktorzerlegung in $B[X]$, wieder nach Lemma von Gauß.

Nach Satz 2.1.3.i) ist B' also ganz über B und endlich erzeugt. Da B noethersch ist, ist es auch B', weil jedes Ideal in B' schon als B-Modul endlich erzeugt ist.

Man rechnet, weil $\varphi(t) = 0$ ist,

$$B'/tB' = B[X]/(t, \overline{f}) \cong \varphi(B)[X]/(f) \cong \varphi(B)(a).$$

Demnach ist tB' ein maximales Ideal in B'. Sei nun $\mathfrak{m}' \subset B'$ ein weiteres maximales Ideal in B'. Wir zeigen nun

$$B \cap \mathfrak{m}' \neq 0.$$

Sei dafür $x \in \mathfrak{m}'$ mit $x \neq 0$ beliebig. Da B' ganz über B und B nach Satz 2.1.3.ii) ganzabgeschlossen ist, hat das Minimalpolynom von x über $Quot(B)$ Koeffizienten in B. Da $x \neq 0$ ist, gilt für den konstanten Koeffizienten b_0 des Minimalpolynoms, dass $b_0 \neq 0$ ist. Somit gilt wegen

$$x^n + \cdots + b_1 x + b_0 = 0,$$

dass $b_0 \in B \cap \mathfrak{m}'$ ist. Also ist $B \cap \mathfrak{m}' \neq 0$ und somit $B \cap \mathfrak{m}' = tB$, weil B DBR mit Uniformisierer t ist. Demnach gilt $\mathfrak{m}' = tB'$. Also ist B' ein lokaler, noetherscher Ring, mit maximalem Hauptideal. Nach (Ser79, Proposition I.2.2) ist B' also ein DBR, weil jedes Element in B' nicht nilpotent ist.

Da $\overline{f}$ als Urbild des normierten f Grad größer gleich zwei hat, ist die Inklusion $B \subsetneq B'$ echt, und weil sich φ durch $X \mapsto a$ auf B' fortsetzen lässt, haben wir somit einen Widerspruch zur Maximalität erreicht. Das bedeutet $\varphi(B) = K$ wie gewünscht.

Zu ii). Schreibe $S := \mathbb{Z}_{(p)}$ für die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ an $p\mathbb{Z}$. Da

$$p = 0 \in R/pR = k \text{ ist,}$$

ist $k|\mathbb{F}_p$ eine Körpererweiterung. Also hat auch A einen Restklassenkörper der Charakteristik p. Also gilt $p \in \mathfrak{m}$. Für jedes $n \in \mathbb{Z} \backslash p\mathbb{Z}$ gilt also $n \cdot 1_A \notin \mathfrak{m}$ und somit $n \cdot 1_A \in A^\times$ nach Lemma 1.1.8, denn sonst wäre auch

$$1_A = 1 \cdot 1_A = ggT(p, n) \cdot 1_A \in \mathfrak{m}.$$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung ist A somit ein S-Modul. Da nach Lemma 1.1.8 $R \backslash pR = R^\times$ ist, argumentieren wir analog wie für A, dass R ein

S-Modul ist. Demnach ergibt folgendes Tensorprodukt Sinn und wir rechnen mit der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts

$$\mathbb{F}_p \underset{S}{\otimes} R = S/pS \underset{S}{\otimes} R \cong R/pR = k.$$

Da $\mathbb{F}_p$ perfekt ist, ist nach Satz 2.1.2.ii) $k|\mathbb{F}_p$ separabel im Sinne von Definition 1.1.1.i), also ist das Tensorprodukt $\mathbb{F}_p \underset{S}{\otimes} R$ 0-glatt über $\mathbb{F}_p$ nach Satz 2.1.2.iii). Mit Satz 2.1.2.i) ist R also pR-glatt über S, weil R torsionsfrei und somit flach über dem Hauptidealring S ist.

Siehe (Mat86, Theorem 4.1.i)) dafür, dass S ein Hauptidealring ist, und (Bou72, Proposition I.2.4.3.ii)) dafür, dass R flach über S ist.

Über diese Eigenschaft wollen wir jetzt sukzessive das gewünschte ϕ zu A liften. Bemerke, dass

$$pR = \ker(R \to k \overset{\phi_0}{\to} K = A/\mathfrak{m}) \text{ ist.}$$

Demnach haben wir für $C_1 := A/\mathfrak{m}^2$ und $N := \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ einen Ringmorphismus

$$u_1 : R \to C/N = A/\mathfrak{m},$$

der stetig bezüglich der pR-adischen Topologie ist. Da R und $A/\mathfrak{m}$ S-Moduln sind, ist u_1 ein S-Algebrenmorphismus, weil jeder $\mathbb{Z}$-lineare Morphismus zwischen zwei S-Moduln automatisch S-linear ist. Da R pR-glatt über S ist, haben wir somit

$$u_2 : R \to C = A/\mathfrak{m}^2, \text{ mit } \operatorname{pr} \circ u_2 = u_1.$$

Sukzessive bekommen wir nach der Bemerkung nach Definition 2.1.1 so $u_n : R \to A/\mathfrak{m}^n$ und $\operatorname{pr} \circ u_{n+1} = u_n$. Also bekommen wir nach universeller Eigenschaft des projektiven Limes

$$\phi : R \to \lim_n A/\mathfrak{m}^n \cong A,$$

für den $\operatorname{pr} \circ \phi = \phi_0 \circ \operatorname{pr}$ gilt, wie gewünscht. Außerdem gilt deswegen $\phi(pR) \subset \mathfrak{m}$ und somit ist ϕ lokal. □

Bemerkung. Sei B ein diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer π und perfektem Restklassenkörper. Sind A und R aus Lemma 2.1.4.ii) B-Algebren, so dass R flach über B ist, π der Uniformisierer von R und $\phi_0 : k \to K$ ein B-Algebrenmorphismus, so beweist man wie im Beweis von Lemma 2.1.4.ii), dass man als Lift $\phi : R \to A$ von ϕ_0 sogar einen B-Algebrenmorphismus bekommt.

Jetzt können wir unseren Ring konstruieren.

Proposition 2.1.5. *Es existiert bis auf Isomorphie genau ein vollständiger DBR $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ mit Uniformisierer p, Charakteristik 0 und Restklassenkörper E. Dieser ist eine flache $\mathbb{Z}_p$-Algebra. Außerdem haben wir einen Lift des Frobenius $(\cdot)^p : E \to E$, welcher ein $\mathbb{Z}_p$-Algebrenmorphismus $\varphi : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ist.*

Beweis. Wende Lemma 2.1.4.i) an auf $A = \mathbb{Z}_p$, um B mit Uniformisierer p und Restklassenkörper E zu bekommen und beachte, dass die p-adische Vervollständigung $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} := \hat{B}$ immer noch die gesuchten Eigenschaften hat.

Da der Frobenius auf $\mathbb{F}_p$ die Identität ist, ist $(\cdot)^p : E \to E$ somit ein $\mathbb{Z}_p$-Algebrenmorphismus. Da außerdem, wegen $p \neq 0 \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ flach über $\mathbb{Z}_p$ ist, bekommen wir die Existenz von φ als $\mathbb{Z}_p$-Algebrenmorphismus nach der Bemerkung nach Lemma 2.1.4.ii) für $A = R = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.
Zur Eindeutigkeit: Sei B ein weiterer Ring mit den gewünschten Eigenschaften. Nach Lemma 2.1.4.ii) haben wir $\phi : \mathcal{O}_E \to B$ mit $\phi_0 = \mathrm{id}_E$. Dieser ist injektiv, weil $\phi(p) = p \neq 0$ ist und somit ist $\ker(\phi) \neq p\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, also $\ker(\phi) = 0$. Er ist aber auch surjektiv, denn, weil $\phi_0 = \mathrm{id}_E$ ist, gilt

$$B = \mathrm{im}(\phi) + pB.$$

Damit bekommen wir für ein beliebiges $b \in B$ eine Zerlegung

$$b = e_0 + pb_0,\ e_0 \in \mathrm{im}(\phi),\ b_0 \in B.$$

Sukzessive bekommen wir dann

$$b = e_0 + \cdots + p^n e_n + p^{n+1} b_n,\ e_i \in \mathrm{im}(\phi),\ b_n \in B.$$

Da $\mathrm{im}(\phi) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ p-adisch vollständig ist und $p^n \in \mathrm{im}(\phi)$ ist, gilt somit

$$b = \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n e_n \in \mathrm{im}(\phi).$$

Also ist ϕ surjektiv. Insgesamt ist ϕ also bijektiv.

□

Für das wichtigste Beispiel von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ sollte der Leser die Theorie der Wittvektoren kennen, wie sie in (Sch07, §5) eingeführt wird.

Beispiel 2.1.6. Sei E perfekt. Dann liefert uns die Theorie der Wittvektoren $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = W(E)$ (siehe Sch07, Satz 5.22.iii)) und für φ wählen wir den Frobenius auf den Wittvektoren.

Wir fixieren ab jetzt ein Paar $(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \varphi)$ zu E aus Proposition 2.1.5 und schreiben

$$\mathcal{E} := Quot(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}).$$

Beachte, dass $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ der Ring der ganzen Zahlen von $\mathcal{E}$ ist.

Da sie von integraler Bedeutung für unsere Arbeit ist, und wir ein paar Aussagen leicht verallgemeinern wollen, wiederholen wir hier die Theorie von unverzweigten Erweiterungen aus (Sch16, §1.2). Sei dafür ab jetzt K ein vollständiger, nicht-archimedischer Körper mit diskretem Absolutbetrag. Wir bezeichnen mit π_K den Uniformisierer, den Ring der ganzen Zahlen mit $\mathcal{O}_K$ und mit k_K den Restklassenkörper. Zum Beispiel $K = \mathcal{E}$, $k_K = E$, und $\pi = p$. Siehe (Sch16, Eigenschaft c) von §1.2), dass es für jede endliche Körpererweiterung $L|K$ eine eindeutige Fortsetzung des nicht-archimedischen, diskreten Absolutbetrags auf K gibt. Bezüglich dieser Fortsetzung ist auch L vollständig. Wir bezeichnen dann π_L, $\mathcal{O}_L$ und k_L analog wie für K.

Bemerkung 2.1.7. Nach (Sch16, Eigenschaft c) von §1.2) und Satz 2.1.3.ii)+iii) ist ein Element $L|K$ genau dann in $\mathcal{O}_L$, falls sein Minimalpolynom über K Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$ hat.

Kommen wir jetzt zur Theorie der unverzweigten Erweiterungen.

Definition 2.1.8. Eine endliche Körpererweiterung $L|K$ heißt *unverzweigt*, falls

$$[L : K] = [k_L : k_K] \text{ und } k_L|k_K \text{ separabel ist.}$$

Dabei sind k_L bzw. k_K die Restklassenkörper von L bzw. K.

Wir formulieren nun ein paar grundlegenden Eigenschaften der unverzweigten Erweiterungen.

Lemma 2.1.9. *Sei $L|K$ unverzweigt und $F|K$ endlich.*

i) Es gilt $[F : K] = [k_F : k_K]$ genau dann, wenn π_K auch ein Primelement von F ist.

ii) Sind $L_1|K$ und $L_2|K$ zwei endliche Körpererweiterungen und sei $\sigma : L_1 \to L_2$ ein K-Algebrenisomorphismus. Dann ist L_1 genau dann unverzweigt, wenn es L_2 ist.

iii) $L|K$ ist separabel. Genauer sei ein beliebiges primitives Element $\alpha \in k_L$ gegeben, das heißt es gelte

$$k_L = k_K(\alpha).$$

Dann ist jedes Urbild $a \in \mathcal{O}_L$ von α unter der Projektion ein primitives Element von $L|K$ und von $\mathcal{O}_L|\mathcal{O}_K$. Außerdem gilt für das Minimalpolynom $P \in \mathcal{O}_K[X]$ von a über K (siehe Bemerkung 2.1.7), dass $P \mod \pi_K\mathcal{O}_K[X]$ das Minimalpolynom von α ist.

iv) Sind $L_1|K$ und $L_2|K$ unverzweigt, so auch $L_1L_2|K$.

v) Ist $F_2|F_1|K$ eine Kette von endlichen Körpererweiterungen, so ist $F_2|K$ unverzweigt genau dann, wenn $F_2|F_1$ und $F_1|K$ unverzweigt sind.

Beweis. Für i) (siehe Sch16, Eigenschaft d) von §1.2).

Für ii), beachte, dass $[L_1 : K] = [L_2 : K]$ ist, weil σ K-linear ist. Außerdem gilt nach (Sch16, Eigenschaft c) von §1.2), dass σ den Absolutbetrag erhält. Demnach induziert σ einen Isomorphismus von k_K-Algebren $\overline{\sigma} : k_{L_1} \to k_{L_2}$. Demnach ist $k_{L_1}|k$ genau dann separabel, wenn es auch $k_{L_2}|k$ ist. Außerdem gilt $[k_{L_1} : k_K] = [k_{L_2} : k_K]$, aus gleichem Grund wie über K oben, also $[L_1 : K] = [k_{L_1} : k_K]$ genau dann, wenn $[L_2 : K] = [k_{L_2} : k_K]$ ist, nach obiger Gleichheit.

Zu iii) (siehe Sch16, Lemma 1.2.4), zu iv) (siehe Sch16, Lemma 1.2.5.iii)) und zu v) (siehe Sch16, Lemma 1.2.5.i)). □

Fixieren wir einen algebraischen Abschluss $\overline{K}|K$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_K$ die Menge aller unverzweigten Erweiterungen über K, die in $\overline{K}$ enthalten sind.

Nach Lemma 2.1.9.iv) ist

$$K^{nr} := \bigcup_{L \in \mathcal{N}_K} L$$

eine Körperweiterung $K^{nr}|K$. Nach Lemma 1.2.9.i) und (Sch16, Eigenschaft c) von §1.2) hat diese einen diskreten, nicht-archimedischen Absolutbetrag mit Uniformisierer π_K, bezüglich dessen er aber nicht mehr vollständig zu seien braucht. Außerdem ist sie normal über K nach Lemma 1.2.9.ii). Nach Lemma 1.2.9.iii) gilt $K^{nr} \subset K^{sep}$, wobei K^{sep} der separable Abschluss von K in $\overline{K}$ ist. Zusammengefasst ist $K^{nr}|K$ galoisch. Wir nennen $K^{nr}|K$ die *maximal unverzweigte Erweiterung* von $K^{sep}|K$. Nach Definition und Lemma 1.2.9.v) sind die endlichen Teilkörper von $K^{nr}|K$ genau die unverzweigten Erweiterungen von K in $\overline{K}$. Außerdem hat $K^{nr}|K$ folgende universelle Eigenschaft.

Satz 2.1.10. (Universelle Eigenschaft von $K^{nr}|K$)

i) Der Restklassenkörper von K^{nr} ist ein separabel-algebraischer Abschluss k_K^{sep} von k_K.

ii) Sei $f : \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K$ ein lokaler Morphismus, so dass die auf k_K induzierte Abbildung

$$\overline{f} : k_K \to k_K$$

eine Fortsetzung $\overline{f'} : k_K^{sep} \to k_K^{sep}$ *hat. Dann existiert ein eindeutiger lokaler Morphismus*

$$f' : \mathcal{O}_{K^{nr}} \to \mathcal{O}_{K^{nr}} \text{ mit } f'_{|\mathcal{O}_K} = f,$$

der ein Lift von $\overline{f'}$ *ist.*

Beweis. Für i) (siehe Sch16, Proposition 1.2.6.i)).

Für ii) zeigen wir zunächst die folgende analoge Aussage für ene endliche unverzweigte Erweiterungen $L|K$. Sei $\overline{f'} : k_L \to k_{K^{sep}}$ eine Fortsetzung von $\overline{f} : k_K \to k_K$. Dann existiert ein eindeutiger lokaler Morphismus

$$f' : \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_{K^{nr}} \text{ mit } f'_{|\mathcal{O}_K} = f,$$

der ein Lift von $\overline{f'}_{|k_L}$ ist.

Sei dafür zunächst $L|K$ normal. Seien $\alpha \in k_L$, $a \in \mathcal{O}_L$, $P \in \mathcal{O}_K[X]$ und $\overline{P} := P \mod \pi_K \mathcal{O}_K[X]$ wie aus Lemma 1.2.9.iii). Da alle Nullstellen von P schon in $\mathcal{O}_L$ liegen (siehe Bemerkung 2.1.7), ist k_L auch ein Zerfällungskörper von $\overline{P}$. Wir definieren

$$Q := f(P) \in \mathcal{O}_K[X] \text{ durch anwenden von } f \text{ auf den Koeffizienten.}$$

Wie im Beweis von Lemma 2.1.4.i) zeigt man mit Hilfe des Lemmas von Gauß und Lemma 1.2.9.iii), dass wir die folgende natürliche Isomorphie

$$\mathcal{O}_K[X]/P\mathcal{O}_K[X] \cong \mathcal{O}_L$$

durch $X \mapsto a$ haben. Sei zunächst $\beta := \overline{f'}(\alpha)$. Wähle jetzt ein Urbild $b \in \mathcal{O}_{K^{nr}}$ von β unter der Projektion. Dann gilt für $F := K(b)$ das $\mathrm{im}(\overline{f'}) \subset k_F$ ist. Die Existenz und Eindeutigkeit des gewünschten f' übersetzt sich jetzt mit der universellen Eigenschaft des Polynomrings zur Existenz eines eindeutigen

$$x \in \mathcal{O}_{K^{nr}} \text{ mit } Q(x) = 0 \text{ und } x \mod \pi_K \mathcal{O}_{K^{nr}} = \overline{f'}(\alpha).$$

Da $\overline{f'}_{|k_K} = \overline{f}$ ist und beides Ringmorphismen sind, gilt für alle $y \in k_L$, dass

$$\overline{Q}(\overline{f'}(y)) = \overline{f'}(\overline{P}(y)) \text{ ist,}$$

wobei $\overline{Q}$ analog zu $\overline{P}$ definiert ist. Da $\overline{f'}$ injektiv ist haben wir also eine Bijektion zwischen den Nullstellen von $\overline{P}$ in k_L und den Nullstellen von $\overline{Q}$ in k_K. Da $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ den selben Grad haben und $\overline{P}$ vollständig in k_L zerfällt ist $\overline{Q}$ also auch separabel und zerfällt vollständig in k_F. Demnach ist $\overline{f'}(\alpha)$ einfache

Nullstelle von $\overline{Q}$. Nach Hensel's Lemma (siehe Bou72, III.4.3) angewandt auf $\mathcal{O}_F[X]$ existiert demnach genau ein $x \in \mathcal{O}_{K^{nr}}$ mit den gewünschten Eigenschaften, weil $\pi_K\mathcal{O}_{K^{nr}} \cap \mathcal{O}_F = \pi_K\mathcal{O}_F$ ist und mit weiteren Anwendungen von Hensels Lemma alle Nullstellen von Q in $\mathcal{O}_F$ liegen.

Sei jetzt $L|K$ beliebig unverzweigt. Sei L_g die galoische Hülle von $L|K$.

Da $K^{nr}|K$ galoisch ist, ist L_g wegen Minimalität in K^{nr} enthalten und somit unverzweigt. Wähle jetzt eine beliebige Körpererweiterung

$$\overline{f_g} : k_{L_g} \to k_{K^{sep}} \text{ mit } \overline{f_g}_{|k_L} = \overline{f'}.$$

Wenden wir jetzt den obigen Fall auf $\overline{f_g}$ an, so bekommen wir ein eindeutiges $f_g : \mathcal{O}_{L_g} \to \mathcal{O}_F$ mit $f_{g|\mathcal{O}_K} = f$, dass ein Lift von $\overline{f_g}$ ist. Definiere nun $f' := f_{g|\mathcal{O}_L}$. Dann ist f' ein geforderter Lift von $\overline{f'}$, weil

$$\pi_K\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L \cap \pi_K\mathcal{O}_{L_g} \text{ ist.}$$

Angenommen es gäbe einen zweiten Lift f'' für den $f''_{|\mathcal{O}_K} = f$ und $f'' \neq f'$ gilt. Dann könnten wir die universelle Eigenschaft für f' und f'' anwenden um $f_g^{(1)} \neq f_g^{(2)}$ als Lifts von $\overline{f_g}$ zu bekommen. Für diese gilt aber

$$f_g^{(1)}{}_{|\mathcal{O}_K} = f = f_g^{(2)}{}_{|\mathcal{O}_K}.$$

Das ist ein Widerspruch zu der in dem normalen Fall schon gezeigten Eindeutigkeit.

Kommen wir jetzt zur eigentlichen Aussage. Sei also $\overline{f'} : k_K^{sep} \to k_K^{sep}$. Sei $b \in \mathcal{O}_{K^{nr}}$ beliebig. Sei $L|K$ eine endliche unverzweigte Erweiterung. Schränke jetzt ein zu

$$\overline{f_L} := \overline{f'}_{|k_L} : k_L \to k_K^{sep}.$$

Nach vorhin gezeigtem finden wir also einen eindeutigen Lift

$$f_L : \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_{K^{nr}} \text{ von } \overline{f_b} \text{ mit } f_{L|\mathcal{O}_K} = f.$$

Damit definieren wir nun

$$f' : \mathcal{O}_{K^{nr}} \to \mathcal{O}_{K^{nr}}, x \mapsto f_L(x), \text{ wobei } x \in L \subset K^{nr} \text{ endlich über } K \text{ ist.}$$

Nach Eindeutigkeit der f_L ist dies wohldefiniert, denn ist $K(x) \subset L$, so ist nach Eindeutigkeit der Lifts

$$f_{L|K(x)} = f_{K(x)}.$$

Da

$$\pi_K\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L \cap \pi_K\mathcal{O}_{K^{nr}} \text{ für alle } K^{nr}|L|K \text{ gilt,}$$

ist f' ein Lift von $\overline{f'}$, für den $f'_{|\mathcal{O}_K} = f$ gilt. Der Lift ist ein Ringmorphismus, denn er ist auf jeder endlichen Teilerweiterung ein Ringmorphismus. Außerdem ist er lokal, weil es ein Lift der Restklassenkörper ist. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der einzelnen f_L. $\square$

Zunächst eine wichtige erste Anwendung der universellen Eigenschaft von $K^{nr}|K$.

Satz 2.1.11. *Die natürliche Abbildung*

$$\mathrm{Gal}(K^{nr}|K) \to \mathrm{Gal}(k_K^{sep}|k_K),\ \sigma \mapsto (\sigma_{|\mathcal{O}_{K^{nr}}}) \mod \pi_K \mathcal{O}_{K^{nr}}$$

ist ein topologischer Isomorphismus.

Zusätzlich induziert $F \mapsto k_F$ eine Bijektion zwischen den Zwischenkörpern von $K^{nr}|K$ und von $k_K^{sep}|k_K$. Außerdem ist $F|K$ galoisch genau dann, wenn $k_F|k_K$ galoisch ist. In dem Fall sind die Galoisgruppen natürlich isomorph.

Beweis. Wende die universelle Eigenschaft an auf

$$f := \mathrm{id}_{\mathcal{O}_K} \text{ und } \overline{f'} \in \mathrm{Gal}(k_{K^{sep}}|k_K) \text{ beliebig.}$$

Dadurch bekommen wir einen eindeutigen Lift

$$f' \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K-alg}(\mathcal{O}_{K^{nr}}).$$

Da $f'(\pi_K) = \pi_K \neq 0$ ist, ist f' injektiv, und somit setzt sich f' zu einer eindeutigen K-Einbettung $\sigma : K^{nr} \to K^{nr}$ fort. Diese ist bijektiv, weil sie auf allen endlichen Galoiszwischenerweiterungen bijektiv ist. Insgesamt bekommen wir also ein eindeutiges Urbild von $\overline{f'}$ unter der geforderten Abbildung. Also ist die Abbildung bijektiv.

Um zu zeigen, dass die Abbildung offen ist, genügt es nach Definition der proendlichen Topologie zu zeigen, dass für jeden endlichen Zwischenkörper $L|K$ gilt, dass

$$\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{nr}|L) \Leftrightarrow (\sigma_{|\mathcal{O}_{K^{nr}}}) \mod \pi_K \mathcal{O}_{K^{nr}} \in \mathrm{Gal}(k_K^{sep}|k_L) \text{ ist.}$$

Das gilt aber, weil wir im Beweis der universellen Eigenschaft gesehen haben, dass der Lift schon auf endlichen Teilerweiterungen von $K^{nr}|K$ eindeutig ist. Somit ist $(\sigma_{|\mathcal{O}_L}) \mod \pi_K \mathcal{O}_L = \mathrm{id}_{k_L}$ genau dann, wenn $\sigma_{|L} = \mathrm{id}_L$ ist.

Um zu zeigen, dass die Abbildung stetig ist, genügt es zu zeigen, dass jeder endliche Zwischenkörper $k_K^{sep}|k_K(\alpha)|k_K$ von der Form k_L ist für ein unverzweigtes $L|K$. Das ist aber im Beweis von (Sch16, Lemma 1.2.4) gezeigt worden.

Der Zusatz folgt sofort aus dem Hauptsatz der Galoistheorie, weil der Isomorphismus topologisch ist. $\square$

Bevor wir zu unserem $\mathcal{E}$ zurückkommen, wollen wir noch kurz die Vervollständigung $\widehat{K^{nr}}$ von K^{nr} bezüglich des Absolutbetrages behandeln.

Diese hat auch Restklassenkörper k_K^{sep}. Da für einen lokalen Morphismus $f' : \mathcal{O}_{K^{nr}} \to \mathcal{O}_{K^{nr}}$ gilt, dass

$$\pi_K^n \mathcal{O}_{K^{nr}} \subset f'^{-1}(\pi_K^n \mathcal{O}_{K^{nr}}) \text{ ist, für alle } n \in \mathbb{N},$$

sind diese f' stetig bezüglich der π_K-adischen Topologie, denn dann gilt für $a \in f'^{-1}(\pi_K^n \mathcal{O}_{K^{nr}})$, dass immer noch $a + \pi_K^n \mathcal{O}_{K^{nr}} \subset f'^{-1}(\pi_K^n \mathcal{O}_{K^{nr}})$ ist.

Damit setzt sich das eindeutige f' von der universellen Eigenschaft fort zu einem eindeutigen

$$\widehat{f'} : \mathcal{O}_{\widehat{K^{nr}}} \to \mathcal{O}_{\widehat{K^{nr}}}.$$

Wir sprechen hier jetzt auch von der universellen Eigenschaft von $\widehat{K^{nr}}$.

Wir wollen im Abschluss zu diesem Abschnitt noch die Verbindung des von uns konstruierten Ringes $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ mit den Wittvektoren von E aufbauen.

Bemerkung 2.1.12. Nach Satz 2.1.10.i) ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ der DBR aus Proposition 2.1.5 für E^{sep}. Nach universeller Eigenschaft von $\widehat{K^{nr}}$ können wir das φ aus Proposition 2.1.5 so wählen, dass es mit einem φ von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ verträglich ist. Wir fixieren ab jetzt einen Lift φ mit seiner Fortsetzung bezüglich der universellen Eigenschaft und nennen ab jetzt beide $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$. Wir schreiben ab jetzt kurz $G_E := \mathrm{Gal}(E^{sep}|E)$ für die absolute Galoisgruppe von E. Nach Satz 2.1.11 und weil die Galoisautomorphismen den Betrag erhalten, gilt

$$G_E = \mathrm{Gal}(\mathcal{E}^{nr}|\mathcal{E}) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}-alg}(\widehat{\mathcal{E}^{nr}}) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}-alg}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}).$$

Da die $\sigma \in G_E$ mit dem Frobenius auf E^{sep} kommutieren, kommutiert nach universeller Eigenschaft auch $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ mit den $\sigma \in G_E$.

Lemma 2.1.13. *Es existieren injektive $\mathbb{Z}_p$-Algebramorphismen ψ_E und $\psi_{E^{sep}}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd}
W(E) & W(E) \arrow[l, "f_E"'] \arrow[r, "\subset"] & W(E^{sep}) \arrow[r, "f_{E^{sep}}"] & W(E^{sep}) \\
\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \arrow[u, "\psi_E"] & \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \arrow[u, "\psi_E"] \arrow[l, "\varphi_{\mathbb{Q}_p}"] \arrow[r, "\subset"'] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \arrow[u, "\psi_{E^{sep}}"] \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{Q}_p}"'] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \arrow[u, "\psi_{E^{sep}}"]
\end{tikzcd}$$

Dabei ist f_E bzw. $f_{E^{sep}}$ der Frobenius auf $W(E)$ bzw. $W(E^{sep})$.

Zusätzlich kommutieren die natürlichen Galoiswirkungen von G_E auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ und $W(E^{sep})$ mit $\psi_{E^{sep}}$.

Beweis. (angelehnt an Fon90, 1.3.2)
Wir konstruieren explizit nur ψ_E. $\psi_{E^{sep}}$ existiert analog. Es ist $p \neq 0$ in $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ und wir haben mit $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ einen Lift des Frobenius auf $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Demnach existiert nach (Sch16, Proposition 1.1.23) ein $\mathbb{Z}_p$-Algebrenmorphismus

$$s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : \mathcal{O}_\mathcal{E} \to W(\mathcal{O}_\mathcal{E}) \text{ mit } s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \circ \varphi_{\mathbb{Q}_p} = f_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \circ s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}},$$

wobei $f_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ der Frobenius auf $W(\mathcal{O}_\mathcal{E})$ ist. Wir definieren nun

$$\psi_E := W(\mathrm{pr}) \circ s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : \mathcal{O}_\mathcal{E} \to W(E).$$

Da $W(E)$ ein Integritätsbereich ist, ist $\ker(\psi_E) = 0$ oder $\ker(\psi_E) = p\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Es ist aber

$$\psi_E(p) = p \neq 0$$

in $W(E)$. Also ist ψ injektiv.

Wir beweisen jetzt, dass das linke Quadrat kommutiert. Das rechte geht dann wieder ganz analog. Beachte, dass der Frobenius auf den Wittvekoren auf allen Komponenten durch Polynome über $\mathbb{Z}$ gegeben ist. Deswegen gilt

$$f_E \circ W(\mathrm{pr}) = W(\mathrm{pr}) \circ f_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}.$$

Zusammen mit dem Verhalten von $s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ erhalten wir also

$$f_E \circ \psi_E = \psi_E \circ \varphi_{\mathbb{Q}_p}.$$

Jetzt beweisen wir die Kommutativität des mittleren Diagramms. Nach Bemerkung 2.1.12 sind die beiden $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ miteinander verträglich. Genauso gilt

$$f_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}|\mathcal{O}_\mathcal{E}} = f_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}.$$

Da $s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ nach (Sch16, Proposition 1.1.23) eindeutig mit der Eigenschaft ist, dass

$$s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \circ \varphi_{\mathbb{Q}_p} = f_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \circ s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \text{ ist,}$$

gilt also auch

$$s_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}|\mathcal{O}_\mathcal{E}} = s_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}.$$

Insbesondere gilt auch

$$\psi_{E^{sep}|\mathcal{O}_\mathcal{E}} = \psi_E.$$

Kommen wir nun zum Beweis des Zusatzes. Nach Bemerkung 2.1.12 gilt

$$\sigma \circ W(\mathrm{pr}) = W(\mathrm{pr}) \circ \sigma \text{ für alle } \sigma \in G_E.$$

Demnach genügt es zu zeigen, dass

$$\sigma \circ s_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}} = s_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}} \circ \sigma \text{ für alle } \sigma \in G_E \text{ gilt.}$$

Mit Bemerkung 2.1.12 und (Sch16, Proposition 1.1.23) rechnet man für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\Phi_n \circ s_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}} \circ \sigma &= \varphi_{\mathbb{Q}_p}^n \circ \sigma \\
&= \sigma \circ \varphi_{\mathbb{Q}_p}^n \\
&= \sigma \circ \Phi_n \circ s_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}} \\
&= \Phi_n \circ \sigma \circ s_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet Φ_n das n-te Wittpolynom. Die letzte Gleichheit folgt daraus, dass die Φ_n polynomiell über $\mathbb{Z}$ sind und die σ $\mathbb{Z}$-Algebrenmorphismen sind. Insgesamt folgt nun

$$\Phi_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}} \circ (s_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}} \circ \sigma) = \Phi_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}} \circ (\sigma \circ s_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}).$$

Dabei ist $\Phi_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}} = (\Phi_0, \Phi_1, \dots)$. Da $p \neq 0 \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ ist, ist $\Phi_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}$ injektiv (siehe Sch07, Lemma 5.3) und somit gilt die gewünschte Kommutativität. □

Bemerkung. Nach Lemma 2.1.13 erhält f_E also $\mathrm{im}(\psi)$. Für das maximale Ideal $V_1(E)$ von $W(E)$ gilt $p \in V_1(E)$. Deshalb ist $V_1(E) \cap \mathrm{im}(\psi) = p\,\mathrm{im}(\psi)$. Da f_E ein Lift des Frobenius auf $W(E)$ ist, ist $f_{E|\mathrm{im}(\psi)}$ somit ein Lift des Frobenius auf $\mathrm{im}(\psi)$. Das heißt, wählen wir $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \mathrm{im}(\psi)$ als Unterring von $W(E)$, so können wir als Lift des Frobenius immer den Frobenius auf $W(E)$ nehmen.

2.1.2 Die Äquivalenzen

In diesem Abschnitt wollen wir die wichtigsten Ergebnisse von Fontaine zitieren, um damit unser Hauptergebnis zu beweisen. Bevor wir zur Definition der $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$-Moduln kommen, behandeln wir noch kurz die Konstruktion der perfekten Hülle.

Definition 2.1.14. Wir definieren für einen Körper k der Charakteristik p die *perfekte Hülle* von k durch

$$k^{perf} := \{x \in \overline{k} \mid x^{p^n} \in k \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dabei ist $\overline{k}$ ein fixierter algebraischer Abschluss von k.

Bemerkung. k^{perf} ist ein Körper, denn seien $x, y \in k^{perf}$. Das heißt es existieren n und m mit $x^{p^n}, y^{p^m} \in k$ und indem wir zum Maximum übergehen bekommen wir $n = m$. Da p-Potenzieren auf Körpern der Charakteristik p additiv und multiplikativ ist, gilt also auch $x + y, xy \in k^{perf}$. Außerdem ist

$$(-x)^{p^n} = (-1)^{p^n} x^{p^n} \in k$$

und

$$(x^{-1})^{p^n} = (x^{p^n})^{-1} \in k.$$

Somit ist k^{perf} ein Körper, weil die restlichen Axiome von $\overline{k}$ vererbt werden.

k^{perf} besitzt nun die folgenden Eigenschaften.

Lemma 2.1.15. *Sei k ein Körper der Charakteristik p*

i) k^{perf} ist der größte Zwischenkörper von $\overline{k}|k$, der rein inseparabel über k ist. Das heißt für jedes separable Element $x \in k^{perf}$ gilt $x \in k$.

ii) k^{perf} ist der kleinste perfekte Körper von $\overline{k}|k$. Insbesondere ist $\overline{k}|k^{perf}$ galoisch.

iii) Es gilt $k^{perf} \cap k^{sep} = k$, $k^{sep}k^{perf} = (k^{sep})^{perf} = \overline{k}$. Die Einschränkung induziert einen topologischen Isomorphismus

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}|k^{perf}) \to \mathrm{Gal}(k^{sep}|k).$$

Beweis. Zu i) betrachte ein separables $x \in k^{perf}$. Sei $x^{p^n} \in k$ Dann ist

$$(X - x)^{p^n} = X^{p^n} - x^{p^n} \in k[X]$$

ein Polynom mit Nullstelle x. Da x die einzige Nullstelle ist, ist das nur für $n = 0$ separabel. Also ist $X - x \in k[X]$ das Minimalpolynom von x über

k. Also $x \in k$. Sei nun $K|k$ eine rein inseparable Körpererweiterung in $\overline{k}$. Sei $x \in K\backslash k$ beliebig und $g(X) \in k[X]$ das Minimalpolynom von x. Da x inseparabel ist, gilt $g'(X) = 0$ für die formale Ableitung von $g(X)$. Das heißt der Grad eines jedes Monoms von $g(X)$ ist eine p-Potenz. Wähle nun das $n \in \mathbb{N}$ so, dass das $f \in k[X]$ mit

$$f(X) := g(X^{p^n}) \text{ separabel ist.}$$

Da $x^{p^n} \in K$ als Nullstelle von f separabel ist, gilt $x^{p^n} \in k$. Somit ist $x \in k^{perf}$. Da x beliebig war, gilt also $K \subset k^{perf}$. Somit ist die Maximalität bewiesen.

Zu ii). k^{perf} ist perfekt, denn sei $x \in k^{perf}$. Dann gilt für $x^{\frac{1}{p}} \in \overline{k}$, dass

$$(x^{\frac{1}{p}})^{p^{n+1}} = x^{p^n} \in k \text{ ist für ein } n.$$

Also ist $x^{\frac{1}{p}} \in k^{perf}$ und somit k^{perf} perfekt. Sei nun $K|k$ ein perfekter Körper in $\overline{k}$ und $x \in k^{perf}$ beliebig. Dann ist $x^{p^n} \in k \subset K$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Da p-Potenzieren auf K bijektiv ist, gilt $x = (x^{p^n})^{\frac{1}{p^n}} \in K$ und somit ist $k^{perf} \subset K$. Damit ist die Minimalität gezeigt.

Der Zusatz, dass $\overline{k}|k^{perf}$ galoisch ist, folgt nun daraus, dass algebraisch abgeschlossene Körper immer normal als Körpererweiterung sind.

Zu iii) Sei $x \in k^{perf} \cap k^{sep}$. Dann gilt nach i), dass $x \in k$ ist, also

$$k^{perf} \cap k^{sep} = k.$$

Da $(k^{sep})^{perf}$ die maximal rein inseparable Erweiterung von k^{sep} ist, gilt

$$(k^{sep})^{perf} = \overline{k}.$$

Da $k^{sep}k^{perf}$ als Körpererweiterung von k^{perf} selber perfekt ist und weil es k^{sep} enthält, gilt nach ii) und dem eben gezeigtem

$$\overline{k} = (k^{sep})^{perf} \subset k^{sep}k^{perf} \subset \overline{k}.$$

Insgesamt also $k^{sep}k^{perf} = \overline{k}$.

Für die Galoisgruppen zeigen wir allgemeiner, dass für jede Galoiserweiterung $K|k$ die folgende Einschränkung bijektiv ist.

$$\operatorname{Gal}(K^{perf}|k^{perf}) \to \operatorname{Gal}(K|k),\ \sigma \mapsto \sigma_{|K}$$

Beachte, dabei, dass $K^{perf}|k^{perf}$ selber galoisch ist, denn das $K^{perf} \subset \overline{k}$ ist liegt daran, dass $K \subset \overline{k}$ ist und der Definition der perfekten Hülle. Separabelität folgt aus der Perfektheit von k^{perf}. Normalität folgt aus der Normalität von $K|k$ und der Definition der perfekten Hülle. Wir definieren eine Umkehrabbildung durch

$$\tau \mapsto \sigma,$$

indem wir

$$\sigma(x) := (\tau(x^{p^n}))^{\frac{1}{p^n}} \text{ für alle } x \in K^{perf} \text{ setzen,}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $x^{p^n} \in K$ ist. Das ist wohldefiniert, denn seien $n, m \in \mathbb{N}$, so dass $x^{p^n}, x^{p^m} \in K$ sind. Sei zum Beispiel $n \geq m$, so gilt wegen Multiplikativität von τ

$$(\tau(x^{p^n})^{\frac{1}{p^n}})^{p^n} = \tau((x^{p^m})^{p^{n-m}}) = (\tau(x^{p^m})^{\frac{1}{p^m}})^{p^n}.$$

Da p-Potenzieren injektiv ist, ist σ wohldefiniert. Es gilt außerdem $\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{perf}|k^{perf})$, denn, weil $\tau_{|k} = \mathrm{id}_k$ ist, gilt

$$\sigma(x) = \tau(x^{p^n})^{\frac{1}{p^n}} = (x^{p^n})^{\frac{1}{p^n}} = x, \text{ für alle } x \in k^{perf}.$$

Da p^n-Potenzieren und p^n-te Wurzel ziehen Ringmorphismen auf K^{perf} sind, ist σ auch ein Ringmorphismus. Außerdem ist σ surjektiv, denn sei $y \in K^{perf}$ beliebig. Dann gilt $y^{p^n} \in K$. Da τ auf K bijektiv ist, existiert genau ein $x_0 \in K$ mit $\tau(x_0) = y^{p^n}$. Somit gilt für $x \in K^{perf}$ mit $x^{p^n} = x_0$, dass

$$\sigma(x) = \tau(x_0)^{\frac{1}{p^n}} = y \text{ ist.}$$

Also ist $\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{perf}|k^{perf})$, und es gilt

$$\sigma_{|K}(x) = \tau(x^{p^n})^{\frac{1}{p^n}} = \tau(x)^{\frac{p^n}{p^n}} = \tau(x) \text{ für alle } x \in K.$$

Genauso rechnet man, dass $\sigma(x^{p^n})^{\frac{1}{p^n}} = \sigma(x)$ ist für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{perf}|k^{perf})$ und $x \in K^{perf}$. Somit sind die Einschränkung und $\tau \mapsto \sigma$ invers zueinander.

Um zu zeigen, dass die Abbildung ein Homöomorphismus ist, zeigen wir zunächst, dass jeder endliche Zwischenkörper F_0 von $K^{perf}|k^{perf}$ die perfekte Hülle eines endlichen Zwischenkörpers F von $K|k$ ist. Wir definieren

$$F := \{x \in K | \exists y \in F_0 : \ y^{p^n} = x \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Seien $x, y \in F$. Dann existieren $x_0, y_0 \in F_0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $x_0^{p^n} = x$ und $y_0^{p^m} = y$. Da F_0 als algebraische Körpererweiterung eines perfekten Körpers selbst perfekt ist, können wir $n = m$ wählen. Demnach gilt

$$x + y = (x_0 + y_0)^{p^n}, xy = (x_0 y_0)^{p^n} \in F,$$

weil F_0 ein Körper ist. Außerdem sind $x^{-1} = (x_0^{-1})^{p^n}$ und $-x = (-x_0)^{p^n} \in F$. Beachte dabei für letztere Gleichheit, dass für Körper der Charakteristik $p = 2$ die Identität $1 = -1$ gilt.

Demnach ist F ein Körper. Es gilt außerdem $F^{perf} = F_0$, denn weil F_0 perfekt ist, genügt es nach ii) zu zeigen, dass $F_0 \subset F^{perf}$ ist. Sei also $x_0 \in F_0$ beliebig. Da $F_0 \subset K^{perf}$ ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x_0^{p^n} \in K$ ist. Nach Definition von F gilt aber schon $x_0^{p^n} \in F$. Somit ist $x_0 \in F^{perf}$. Insgesamt gilt also $F_0 = F^{perf}$.

Wir wollen jetzt noch zeigen, dass $F|k$ einen endlichen Körper enthält, der immer noch F_0 als perfekte Hülle hat. Sei dafür $(x_1, \ldots, x_m)$ ein k^{perf}-Erzeugendensystem von F_0. Nach Definition von F existiert jetzt ein minimales $r \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_1^{p^r}, \ldots, x_n^{p^r} \in F \text{ gilt,}$$

weil alle irgendwann nach K potenziert werden. Wir definieren nun

$$F_e := k(x_1^{p^r}, \ldots, x_n^{p^r}) \subset F.$$

Dies ist endlich über k und wir zeigen, dass $F_e^{perf} = F_0$ ist. Da $F_0 = F^{perf}$ ist, ist $F_e^{perf} \subset F_0$ klar. Sei also $x_0 \in F_0$ beliebig. Dann gilt

$$x_0 = a_1 x_1 + \ldots a_n x_n \text{ mit } a_i \in k^{perf} \text{ für alle.}$$

Wähle nun $m \geq r$ groß genug, so dass $a_i^{p^m} \in k$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$x_0^{p^m} = a_1^{p^m} x_1^{p^m} + \cdots + a_n^{p^m} x_n^{p^m} \in F_e.$$

Also ist $x_0 \in F_e^{perf}$. Insgesamt also $F_e^{perf} = F_0$.

Wenden wir den Beweis der Bijektivität der Einschränkungsabbildung jetzt für F_e statt für k an, bekommen wir

$$\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{perf}|F_0) \text{ genau, dann wenn } \sigma_{|K} \in \mathrm{Gal}(K|F_e) \text{ ist.}$$

Nach Definition der Topologien der proendlichen Gruppen ist die Einschränkungsabbildung also offen. Um zu zeigen, dass es ein Homöomorphismus ist, muss jetzt noch gezeigt werden, dass für jede endliche Körpererweiterung $F|k$ mit $F \subset K$ $F^{perf}|k^{perf}$ endlich ist. Denn dann gilt wieder mit dem Beweis der Bijektivität oben für F statt für k, dass

$$\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{perf}|F^{perf}) \text{ ist, genau dann, wenn } \sigma_{|K} \in \mathrm{Gal}(K|F) \text{ ist}$$

und somit die Umkehrabbildung offen ist. Sei dafür $(x_1, \ldots x_n)$ eine k-Basis von F. Dann zeigen wir, dass

$$F^{perf} = k^{perf}(x_1, \ldots, x_n)$$

und somit endlich über k^{perf} ist. Sei dafür $x \in F^{perf}$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $x^{p^n} \in F$ ist. Schreibe

$$x^{p^n} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Dann gilt

$$x = a_1^{\frac{1}{p^n}} x_1^{\frac{1}{p^n}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{p^n}} x_n^{\frac{1}{p^n}} \in k^{perf}(x_1, \ldots, x_n),$$

denn $a_i^{\frac{1}{p^n}} \in k^{perf}$ ist klar, und weil $k^{perf}(x_1, \ldots, x_n)$ als algebraische Körpererweiterung eines perfekten Körpers selber perfekt ist, gilt $x_i^{\frac{1}{p^n}} \in k^{perf}(x_1, \ldots, x_n)$. Somit ist $F^{perf} = k^{perf}(x_1, \ldots, x_n)$ endlich über k^{perf}. $\square$

Definieren wir nun die $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$-Moduln in allgemeiner Situation.

Definition 2.1.16. i) Sei R ein kommutativer Ring, $\varphi : R \to R$ ein Ringendomorphismus und M ein R-Modul. Dann heißt $\varphi_M : M \to M$ *φ-semilinear*, falls φ_M additiv ist und $\varphi_M(rm) = \varphi(r)\varphi_M(m)\ \forall r \in R,\ m \in M$ gilt.

ii) Sei (R, φ) wie in i). Dann definieren wir die Kategorie der *etalen φ-Moduln über R* Φ_R^{et}, als die endlich erzeugten R-Moduln (M, φ_M) wie in i), so dass die R-lineare Abbildung

$$\varphi_M^{lin} : R \underset{\varphi,R}{\otimes} M \to M,\ r \otimes m \mapsto r\varphi_M(m)$$

bijektiv ist. Dabei ist

$$R \underset{\varphi,R}{\otimes} M$$

das gewöhnliche Tensorprodukt über R, wenn wir R als R-Modul über φ betrachten. Die Morphismen sind dabei gegeben als die R-Modulmorphismen, die mit den φ_M kommutieren. Wir nennen diese φ-Morphismen.

Beispiel 2.1.17. (R, φ) heißt der triviale φ-Modul. Dieser ist etal, weil $1 \in \mathrm{im}(\varphi)$ ist und falls

$$\sum r_i \otimes s_i \mapsto \sum r_i \varphi(s_i) = 0 \text{ ist},$$

so gilt

$$\sum r_i \otimes s_i = \sum r_i \varphi(s_i) \otimes 1 = 0.$$

Somit ist die Abbildung bijektiv.

Für interessantere Beispiele beachte, dass die Ringe mit denen wir arbeiten wollen, Hauptidealringe sind. Dann gilt nämlich folgendes.

Proposition 2.1.18. *Seien (R, φ) und (M, φ_M) wie in Definition 2.1.6.i). Ist R ein Hauptidealring, so ist die Etalheitsbedingung aus Definition 2.1.16.ii) äquivalent dazu, dass φ_M^{lin} surjektiv ist, also dass das Bild von φ_M ein R-Erzeugendensystem von M ist. Dieses ist wiederum äquivalent dazu, dass φ_M jedes R-Erzeugendensystem von M auf ein R-Erzeugendensystem von M abbildet.*

Beweis. Nach Beispiel 2.1.17 gilt $R \cong R \underset{\varphi,R}{\otimes} R$ in der Kategorie der R-Linksmoduln, wenn wir $R \underset{\varphi,R}{\otimes} R$ mit der natürlichen R-Wirkung auf der linken Komponente betrachten. Sei $\mathbb{P}$ ein Repräsentantensystem aller Primelemente aus R bezüglich Assoziiertheit. Da nach dem Elementarteilersatz

$$M \cong R^n \oplus \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \bigoplus_{j_p=1}^{r_p} R/p^{\nu(p,j_p)}R \text{ gilt,}$$

rechnen wir mit Additivität und Rechtsexaktheit des Tensorprodukts

$$\begin{aligned} R \underset{\varphi,R}{\otimes} M &\cong R \underset{\varphi,R}{\otimes} (R^n \oplus \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \bigoplus_{j_p=1}^{r_p} R/p^{\nu(p,j_p)}R) \\ &\cong (R \underset{\varphi,R}{\otimes} R)^n \oplus \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \bigoplus_{j_p=1}^{r_p} R \underset{\varphi,R}{\otimes} (R/p^{\nu(p,j_p)}R) \\ &\cong R^n \oplus \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \bigoplus_{j_p=1}^{r_p} (R \underset{\varphi,R}{\otimes} R)/p^{\nu(p,j_p)}(R \underset{\varphi,R}{\otimes} R) \cong M. \end{aligned}$$

Ist φ_M^{lin} nun surjektiv, so gilt nach Homomorphiesatz

$$(R \underset{\varphi,R}{\otimes} M)/\ker(\varphi_M^{lin}) \cong M \cong R \underset{\varphi,R}{\otimes} M.$$

Die Eindeutigkeit des Elementarteilersatzes liefert dann also $\ker(\varphi_M^{lin}) = 0$. Demnach ist φ_M^{lin} schon bijektiv.

Für die letzte Äquivalenz ist nur zu zeigen, dass für ein R-Erzeugendensystem $(m_i)_i \subset M$ auch $(\varphi(m_i))_i$ ein R-Erzeugendensystem ist, falls das Bild von φ_M ein R-Erzeugendensystem ist. Nach dieser Voraussetzung genügt es also zu zeigen, dass jedes Element im Bild von φ_M durch $(\varphi(m_i))_i$ erzeugt wird. Sei also $\varphi_M(y) \in \mathrm{im}(\varphi_M)$ beliebig. Schreibe $y = \sum_i r_i m_i$ mit $r_i \in R$. Dann rechnet man mit φ-Semilinearität von φ_M

$$\varphi_M(y) = \sum_i \varphi(r_i)\varphi_M(m_i).$$

□

Ist R jetzt ein Hauptidealring, so gelten nach Proposition 2.1.18 folgende Beispieleohne weitere Rechnung, weil man direkt sieht, dass die jeweiligen semilinearen Abbildungen ein Bild haben, welches den entsprechenden Modul erzeugt. Das bedeutet nicht, dass diese Beispiele nicht auch über allgemeineren Ringen gelten können.

Beispiel 2.1.19. i) Sei (R', φ') ein weiterer Hauptidealring wie aus Definition 2.1.16.i) und $\psi : R \to R'$ ein Ringmorphismus, so dass

$$\varphi' \circ \psi = \psi \circ \varphi \text{ gilt.}$$

Ist (M, φ_M) jetzt in Φ_R^{et}, so ist die Skalarerweiterung

$$(R' \underset{R}{\otimes} M, \varphi' \otimes \varphi_M) \text{ in } \Phi_{R'}^{et}.$$

ii) Sind (M, φ_M) und (N, φ_N) in Φ_R^{et}, so auch $(M \underset{R}{\otimes} N, \varphi_M \otimes \varphi_N)$.

iii) Sei $M := R^n$, so ist eine semilineare Abbildung auch durch eine Basis $(e_i)_i$ eindeutig bestimmt. Definiere

$$\varphi_M : M \to M,\ e_i \mapsto e_{i+1},\ e_n \mapsto ue_1,\ i \in \{1, \ldots, n-1\},\ u \in R^{\times}.$$

Dann ist (M, φ_M) in Φ_R^{et}.

Wir benötigen nun noch eine Definition, bevor wir den Hauptsatz von Fontaine formulieren können.

Definition 2.1.20. Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_p$-Modul. Wir versehen V mit der p-adischen Topologie. Das ist analog definiert wie Definition 2.1.1.ii). Sei

$$\rho_V : G_E \times V \to V,\ (\sigma, v) \mapsto \sigma v$$

eine stetige Wirkung von G_E auf V, so dass

$$\sigma(av) = a\sigma(v) \text{ für alle } \sigma \in G_E,\ a \in \mathbb{Z}_p,\ v \in V \text{ gilt.}$$

Wir nennen V mit solch einer Wirkung versehen eine *G_E-Darstellung über $\mathbb{Z}_p$*. Versehen mit den $\mathbb{Z}_p$-linearen Morphismen, die mit den G_E-Wirkungen vertauschen, bezeichnen wir mit

$$Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E)$$

die Kategorie aller G_E-Darstellungen über $\mathbb{Z}_p$.

Bemerkung. Nach Proposition 2.1.5 haben wir eine Einbettung $\mathbb{Z}_p \subset \mathcal{O}_\mathcal{E}$. Betrachten wir $G_E = \mathrm{Gal}(\mathcal{E}^{nr}|\mathcal{E})$, so induziert die natürliche Wirkung von G_E auf $\mathcal{E}^{nr}$ die triviale Wirkung auf $\mathbb{Z}_p$. So gesehen gilt für V in $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E)$ die Identität

$$\sigma(av) = \sigma(a)\sigma(v) \text{ für alle } \sigma \in G_E,\ a \in \mathbb{Z}_p,\ v \in V.$$

Wir nennen eine solche Wirkung G_E-*semilinear*.

Da $\mathbb{Z}_p$ p-adisch vollständig ist, zeigt man mit Hilfe des Elementarteilersatzes, dass V ebenfalls p-adisch vollständig ist, dass heißt wir haben die natürliche Isomorphie

$$V \cong \varprojlim_n V/p^nV.$$

Außerdem ist jede $\mathbb{Z}_p$-lineare Abbildung automatisch stetig bezüglich der p-adischen Topologie. Deshalb brauchen wir so etwas für die Morphismen nicht zu fordern.

Jetzt formulieren wir das Theorem von Fontaine.

Theorem von Fontaine. *Für $V \in Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E)$ beschreibt*

$$\boldsymbol{D}_\mathcal{E}(V) := ((\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V)^{G_E}, \varphi_{\mathbb{Q}_p} \otimes \mathrm{id}_V)$$

einen Funktor $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E) \to \Phi^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$, der eine Kategorienäquivalenz ist. Dabei hat $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$ die diagonale G_E-Wirkung $\rho \otimes \rho_V$, wobei ρ die natürliche G_E-Wirkung auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ ist. Ein quasi-inverser Funktor ist dabei gegeben durch

$$\boldsymbol{V}_\mathcal{E}(M) := ((\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M)^{\varphi = \mathrm{id}}, \rho \otimes \mathrm{id}_M).$$

Dabei ist $\varphi := \varphi_{\mathbb{Q}_p} \otimes \varphi_M$.

Zusätzlich erhalten beide Funktoren die Elementarteiler.

Beweis. (Siehe Bri09, Theorem 3.2.5) □

Bemerkung. Zum Beweis dieser Aussagen sei an dieser Stelle erwähnt, dass wir schon einige Vorbereitungen getroffen haben, um Teile des Beweises selber durchführen zu können. Zum Beispiel erhält $\varphi_{\mathbb{Q}_p} \otimes \mathrm{id}_V$ die G_E-invarianten von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$ nach Bemerkung 2.1.12 und, wie wir später sehen werden, ist es wichtig, dass die nach obiger Bemerkung G_E-semilineare Wirkung auf V eine G_E-semilineare Wirkung auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$ induziert. In dem nächsten Paragraphen werden wir ein besseres Verständnis erarbeiten, wie die Rolle der φ- und G_E-Invarianten für diese Funktoren aussieht.

Zunächst sammeln wir noch ein paar Zwischenaussagen aus dem Beweis zu dem Theorem von Fontaine, die wir für den Beweis unserer Hauptaussage brauchen. Davor beweisen wir noch eine allgemeine Aussage über topologische Räume, die wir noch häufiger brauchen werden.

Lemma 2.1.21. *Seien X, Y, Z topologische Räume und*

$$\rho : X \times Y \to Z \text{ stetig.}$$

Seien nun $U \subset X,\ V \subset W,\ W \subset Z$ Teilräume versehen mit der Teilraumtopologie bzw. $\sim_X, \sim_Y, \sim_Z$ Äquivalenzrelationen auf den jeweiligen Räumen und $X/\sim_X,\ Y/\sim_Y,\ Z/\sim_Z$ versehen mit der Quotiententopologie.

Seien die Quotientenabbildungen von X und Y zusätzlich offen.

Ist die von ρ induzierten Abbildung

$$\rho_1 : U \times V \to W$$

bzw.

$$\rho_2 : X/\sim_X \times Y/\sim_Y \to Z/\sim_Z$$

wohldefiniert, so ist sie schon stetig.

Beweis. Wir betrachten die folgenden kommutativen Diagramme.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\rho"] & Z \\ U \times V \arrow[u, "\iota_U \times \iota_V"] \arrow[r, "\rho_1"'] & W \arrow[u, "\iota_W"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y"'] & Z \arrow[d, "\mathrm{pr}_Z"] \\ X/\sim_X \times Y/\sim_Y \arrow[r, "\rho_2"'] & Z/\sim_Z \end{tikzcd}$$

Dabei sind $\mathrm{pr}_X,\ \mathrm{pr}_Y,\ \mathrm{pr}_Z$ die Projektionen und $\iota_U,\ \iota_V,\ \iota_W$ die Inklusionen.

Sei nun zuerst $O \subset W$ offen. Nach Definition der Teilraumtopologie ist

$$O = \iota_W^{-1}(\tilde{O}),$$

wobei $\tilde{O} \subset Z$ offen ist. Da ρ und $\iota_U \times \iota_V$ stetig sind ist also auch

$$(\iota_U \times \iota_V)^{-1}(\rho^{-1}(\tilde{O})) = \rho_1^{-1}(\iota_W^{-1}(\tilde{O})) = \rho_1^{-1}(O) \subset U \times V \text{ offen.}$$

Also ist ρ_1 stetig.

Sei jetzt $O \subset Z/\sim_Z$ offen. Da pr_Z und ρ stetig sind, ist also

$$\rho^{-1}(\mathrm{pr}_Z(O)) = (\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y)^{-1}(\rho_2^{-1}(O)) \subset X \times Y \text{ offen.}$$

Da $\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y$ mit pr_X und pr_Y offen und surjektiv ist, ist also auch

$$\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y((\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y)^{-1}(\rho_2^{-1}(O))) = \rho_2^{-1}(O) \subset X/\sim_X \times Y/\sim_Y \text{ offen.}$$

□

Die Bedingung, dass die Projektionen offen sind, ist in unseren Anwendungen immer erfüllt, weil die Projektion einer topologischen Gruppe G auf eine Faktormenge G/H für eine Untergruppe $H \subset G$ immer offen ist (Siehe Bou66, Lemma III.§2.4.2).

Satz 2.1.22. *i) Die Kategorien $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E)$ und $\Phi^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ sind abelsch, wobei* $\ker(f)$ *und* $\operatorname{coker}(f)$ *die Kerne und Kokerne aus den Kategorien der entsprechenden Moduln sind.*

ii) $\boldsymbol{D}_\mathcal{E}$ ist exakt.

iii) Sei R ein vollständiger DBR mit Restklassenkörper E, Uniformisierer π und $K := Quot(R)$. Sei M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\widehat{K^{nr}}}$-Modul mit semilinearer G_E-Wirkung, die stetig für die π-adische Topologie ist. Dann ist der natürliche Morphismus

$$\mathcal{O}_{\widehat{K^{nr}}} \underset{R}{\otimes} M^{G_E} \to M$$

ein Isomorphismus.

iv) Sei M ein etaler $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$-Modul über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Dann haben wir einen etalen G_E-invarianten $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$-Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \mathbf{V}_\mathcal{E}(M) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M.$$

Beweis. Zum Teil von i) über $\Phi^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ siehe (Bri09, Lemma 3.2.3), zu ii) und iii) siehe (Bri09, Lemma 3.2.6) und zu iv) siehe (Bri09, Lemma 3.2.7).

Jetzt bleibt nur noch übrig zu zeigen, dass $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E)$ abelsch ist. Sei dafür $f : (V, \rho_V) \to (W, \rho_W)$ ein Morphismus in dieser Kategorie. Da f mit den Wirkungen vertauscht, schränken sich die G_E-Wirkungen ein zu wohldefinierten Wirkungen auf $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$. Insbesondere haben wir auch eine induzierte Wirkung auf $\operatorname{coker}(f)$. Die G_E-Semilinearität dieser Wirkungen kommt direkt von der Semilinearität von ρ_V und ρ_W. Es muss also noch gezeigt werden, dass

$$\rho_{\ker(f)} : G_E \times \ker(f) \to \ker(f)$$

und

$$\rho_{\operatorname{coker}(f)} : G_E \times \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(f)$$

bezüglich der p-adischen Topologie stetig sind. Nach Lemma 2.1.21 genügt es zu zeigen, dass die p-adischen Topologie von $\ker(f)$ mit der Teilraumtopologie und die p-adische Topologie von $\operatorname{coker}(f)$ mit der Quotiententopologie übereinstimmt.

Fangen wir mit $\ker(f)$ an. Dazu benutzen wir, dass nach Lemma 2.1.21 schon gilt, dass die Teilraumtopologie von $\ker(f)$ eine Struktur eines topologischen $\mathbb{Z}_p$-Moduls besitzt. Demnach genügt es zu zeigen, dass die fundamentalen Nullumgebungen beider Topologien ineinander enthalten sind. Beachte, dass nach dem Elementarteilersatz ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$p^{n_0}V \subset \ker(f) \text{ und somit } p^{n_0+n}V \subset p^n \ker(f) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Demnach haben wir

$$p^{n+n_0} \ker(f) \subset p^{n+n_0}V \cap \ker(f) = p^{n+n_0}V \subset p^n \ker(f) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit liegen die Nullumgebungssysteme ineinander.

Jetzt zu $\operatorname{coker}(f)$. Da die Projektion auf $\operatorname{coker}(f)$ offen ist, ist $\operatorname{coker}(f)$ ein topologischer $\mathbb{Z}_p$-Modul nach Lemma 2.1.21. Wieder weil die Projektion offen ist, bildet

$$\operatorname{pr}(p^nV) = p^n \operatorname{coker}(f) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

eine basisoffenes Umgebungssystem der Null. Somit ist die p-adische Topologie die Quotiententopologie auf $\operatorname{coker}(f)$. $\square$

Als letzte Vorbereitung wiederholen wir das Schlangen- bzw. Fünferlemma.

Lemma 2.1.23. (Fünferlemma & Schlangenlemma)

i) Betrachte das folgende exakte, kommutative Diagramm von R-Moduln über einem beliebigen kommutativen Ring R.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & D \arrow[r] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "j"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

Sind jetzt g und i bijektiv, j injektiv und f surjektiv, so ist h bijektiv.

ii) Betrachte das folgende exakte, kommutative Diagramm von R-Moduln über einem beliebigen kommutativen Ring R.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' &
\end{tikzcd}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to \ker(f) \to \ker(g) \to \ker(h) \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(g) \to \operatorname{coker}(h).$$

Beweis. (Siehe Mat86, Appendix B The five lemma & The snake lemma)

Kommen wir nun zu den perfekten $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$-Moduln. Wir schreiben ab jetzt $F := E^{perf}$. Nach Beispiel 2.1.6 ist der Ring aus Proposition 2.1.5 für F gerade $W(F)$ und wir können als Lift des Frobenius auf F

$$\varphi_{\mathbb{Q}_p} := f_F \text{ wählen.}$$

Dabei ist f_F der Frobenius auf $W(F)$ (Siehe Sch07, Satz 5.11.i)). Da F perfekt ist, ist

$$F^{sep} = \overline{F} = \overline{E}$$

ein algebraischer Abschluss von E. Sei nun $\mathcal{F} := Quot(W(F))$. Dann ist

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{F}^{nr}}} = W(\overline{F}).$$

Da $f_{\overline{F}|W(F)} = f_F$ ist, setzen wir $\varphi_{\mathbb{Q}_p} = f_{\overline{F}}$ auf $W(\overline{F})$. Außerdem gilt nach Betragserhalten der Galoisautomorphismen, Satz 2.1.11 und Lemma 2.1.15.iii), dass

$$\mathrm{Aut}_{W(F)-alg}(W(\overline{F})) = \mathrm{Gal}(\mathcal{F}^{nr}|\mathcal{F}) = G_F = G_E \text{ ist.}$$

Somit gilt

$$\mathbf{D}_{\mathcal{F}}(V) = (W(\overline{F}) \underset{W(F)}{\otimes} V)^{G_E}.$$

Nach Lemma 2.1.13 und (siehe Bou72, Proposition I.2.4.3.ii)) ist $W(F)$ flach über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Damit beweisen wir nun folgende Aussage.

Satz 2.1.24. *Ist V eine p-adische Darstellung, dann ist folgende Abbildung ein natürlicher Isomorphismus in $\Phi^{et}_{W(F)}$.*

$$W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}(V), x \otimes (e \otimes v) \mapsto x \cdot e \otimes v$$

Beweis. (Angelehnt an Fon90, Proposition 1.3.3)

Nach Beispiel 2.1.19 ist $W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathbf{D}_{\mathcal{E}}(\mathbf{V})$ in $\Phi^{et}_{W(F)}$. Dass es ein φ-Morphismus und eine natürliche Transformation ist, liegt daran das der Lift vom Frobenius multiplikativ ist und die $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ nach Lemma 2.1.13 und universeller Eigenschaft der maximal unverzweigten Erweiterung verträglich sind miteinander.

Nach dem Elementarteilersatz sind $W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathbf{D}_{\mathcal{E}}(V)$ und $\mathbf{D}_{\mathcal{F}}(V)$ als endlich erzeugte Moduln p-adisch vollständiger Ringe selber p-adisch vollständig. Da $\mathbf{D}_{\mathcal{F}}$ und $W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathbf{D}_{\mathcal{E}}(\cdot)$ exakt sind nach Satz 2.1.22.ii), können wir die Aussage per Induktion nach n zeigen, dass dies für alle V gilt, die von p^n annuliert werden. Denn dadurch haben wir folgendes kommutative Diagramm mit Isomorphien in den Spalten.

$$\begin{tikzcd}
W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathbf{D}_\mathcal{E}(V) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbf{D}_\mathcal{F}(V) \arrow[d] \\
\lim W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathbf{D}_\mathcal{E}(V)/p^i(W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathbf{D}_\mathcal{E}(V)) \arrow[rr] \arrow[d] & & \lim \mathbf{D}_\mathcal{F}(V)/p^i\mathbf{D}_\mathcal{F}(V) \arrow[d] \\
\lim W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathbf{D}_\mathcal{E}(V/p^iV) \arrow[rr] & & \lim \mathbf{D}_\mathcal{F}(V/p^iV)
\end{tikzcd}$$

I.A. (n=1) Da $pV = 0$ ist, sind wir hier im Fall einer $\mathbb{F}_p$-Darstellung V. Wir wollen also zeigen, dass

$$F \underset{E}{\otimes} \mathbf{D}_E(V) \to \mathbf{D}_F(V) \text{ ist,}$$

wobei

$$\mathbf{D}_E(V) = (E^{sep} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E} \text{ und } \mathbf{D}_F(V) = (\overline{E} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E}$$

ein Isomorphismus von F-Vektorräumen ist. Sei dafür $(e_i)_{i=1,\dots,d}$ eine Basis von $\mathbf{D}_F(V) = (\overline{E} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E}$ über F. Die e_i sind eine endliche Summe von Tensoren

$$e_i = \sum_j e_j^{(i)} \otimes v_j^{(i)} \text{ mit } e_j^{(i)} \in E^{sep} \text{ und } v_j^{(i)} \in V.$$

Außerdem ist

$$\varphi_{\mathbf{D}_F(V)} \text{ durch } \varphi_{\mathbb{Q}_p} \otimes \mathrm{id}$$

gegeben. Deshalb reicht es zu zeigen, dass für alle $e \in \overline{E}$ ein $r \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $e^{p^r} \in E^{sep}$ ist, um zu zeigen, dass für ein s alle

$$\varphi^s_{\mathbf{D}_F(V)}(e_i) = 1 \cdot (\sum_j (e_j^{(i)})^{p^s} \otimes v_j^{(i)})$$

im Bild unserer Abbildung liegen. Das folgt aber aus Lemma 2.1.15.iii) und der Definition der perfekten Hülle. Da $\mathbf{D}_F(V)$ etal ist, ist

$$\varphi^s_{\mathbf{D}_F(V)}(e_i) = (\varphi^{lin}_{\mathbf{D}_F(V)})^s(1 \otimes e_i)$$

eine Basis von $\mathbf{D}_F(V)$ über F und somit ist unsere Abbildung surjektiv. Da $\mathbf{D}_\mathcal{F}$ bzw. $\mathbf{D}_\mathcal{E}$ die Elementarteiler von V erhalten, erhalten $\mathbf{D}_F$ bzw. $\mathbf{D}_E$ die Dimension von V. Somit ist die Abbildung auch bijektiv.

I.S. $(n \mapsto n+1)$ Sei V durch p^{n+1} annulliert. Nach Satz 2.1.22.ii) ist der Funktor $W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathbf{D}_{\mathcal{E}}(\cdot)$ exakt. Also haben wir folgendes kommutative, exakte Diagramm und dann nach Fünferlemma und der Induktionsvoraussetzung unsere Behauptung für $n+1$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathbf{D}_{\mathcal{E}}(p^nV) \arrow[r] \arrow[d] & W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathbf{D}_{\mathcal{E}}(V) \arrow[r] \arrow[d] & W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathbf{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{D}_{\mathcal{F}}(p^nV) \arrow[r] & \mathbf{D}_{\mathcal{F}}(V) \arrow[r] & \mathbf{D}_{\mathcal{F}}(V/p^nV) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Sei ab jetzt E ausgestattet mit einer nicht-archimedischen Bewertung, bezüglich der er vollständig ist und perfektem Restklassenkörper. Wir bezeichnen mit $\hat{F}$ bzw. $\hat{F}^{alg} \subset \hat{\overline{E}}$ die Vervollständigung von F bzw. den algebraischen Abschluss von $\hat{F}$. Mit gleichem Beweis wie für (Sch16, Remark 1.4.1.i)) gilt, das Vervollständigungen von algebraisch abgeschlossenen, nicht-archimedisch bewerteten Körpern selber algebraisch abgeschlossen sind. Deswegen und nach Lemma 2.1.13 haben wir die Inklusionen

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \subset W(E^{sep}) \subset W(\overline{E}) \subset W(\hat{F}^{alg}) \subset W(\hat{\overline{E}})$$

und nach Übergang zu den von G_E fixierten Elementen bekommen wir

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \subset W(E) \subset W(F) \subset W(\hat{F}) = W(\hat{F}).$$

(Siehe Fon90, 2.1.2)

Bemerkung 2.1.25. Mit F ist auch $\hat{F}$ perfekt.

Beweis. Sei $x = \lim\ x_n \in \hat{F}$ mit $x_n \in F$ beliebig. Da F perfekt ist, existieren

$$y_n \in F \text{ mit } y_n^p = x_n.$$

Jetzt ist $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge, denn für $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - x_m| < \epsilon^p \text{ ist für alle } n, m \geq N.$$

Dann gilt

$$|y_n - y_m|^p = |x_n - x_m| < \epsilon^p,$$

weil p-Potenzieren additiv und multiplikativ ist. Damit gilt

$$|y_n - y_m| < \epsilon.$$

Da $\hat{F}$ vollständig ist, existiert

$$y := \lim\ y_n \in \hat{F}$$

und es gilt

$$y^p = (\lim\ y_n)^p = (\lim\ y_n^p) = x,$$

weil p-Potenzieren als polynomielle Abbildung stetig ist. Damit ist p-Potenzieren surjektiv auf $\hat{F}$, also ist $\hat{F}$ perfekt. □

Nach Bemerkung 2.1.25 und Beispiel 2.1.6 ist $W(\hat{F})$ der Ring aus Proposition 2.1.5 für $\hat{F}$. Wir schreiben ab jetzt

$$\mathcal{G} := Quot(W(\hat{F})).$$

Nochmal nach Bemerkung 2.1.25 gilt $\hat{F}^{sep} = \hat{F}^{alg}$ und deshalb

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{G}^{nr}}} = W(\hat{F}^{alg}).$$

Wir bezeichnen hier, wie für $\mathcal{F}$, die natürlichen Frobeniusabbildungen der Wittvektoren mit $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$. Es gilt

$$\widehat{\hat{F}^{alg}} = \hat{\bar{E}},$$

denn weil $\widehat{\hat{F}^{alg}}$ bzw. $\hat{\bar{E}}$ algebraisch abgeschlossen und vollständig sind, genügt es zu zeigen, dass $E \subset \widehat{\hat{F}^{alg}}$ bzw. $F \subset \hat{\bar{E}}$ ist. Demnach und wegen Lemma 2.1.15 gilt

$$\mathrm{Gal}(\hat{F}^{alg}|\hat{F}) = Aut(\widehat{\hat{F}^{alg}}|\hat{F}) = Aut(\hat{\bar{E}}|\hat{F}) = G_F = G_E.$$

Damit gilt mit Satz 2.1.11

$$\mathbf{D}_{\mathcal{G}}(V) = (W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(\hat{F})}{\otimes} V)^{G_E}.$$

Demnach induzieren $\mathbf{D}_{\mathcal{E}}, \mathbf{D}_{\mathcal{F}}$ und $\mathbf{D}_{\mathcal{G}}$ Äquivalenzen von der Kategorie $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E)$ in die jeweiligen Kategorien von etalen $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$-Moduln. Wir sind jetzt bereit unseren Hauptsatz für $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ zu beweisen.

Theorem 2.1.26. *(Entnommen aus Fon90, Proposition 2.1.3)*

i) Wir haben natürliche Isomorphismen in den jeweiligen Kategorien von etalen φ-Moduln

$$W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}(V)$$

und

$$W(\hat{F}) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \boldsymbol{D}_{\mathcal{G}}(V).$$

ii) $M \mapsto W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M$*, bzw.* $M \mapsto W(\hat{F}) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M$ *induziert eine Äquivalenz zwischen* $\Phi^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ *und* $\Phi^{et}_{W(F)}$ *bzw.* $\Phi^{et}_{W(\hat{F})}$.

iii) Die Inklusion $\boldsymbol{D}_\mathcal{G}(V) = (W(\hat{F}^{alg}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V)^{G_E} \subset (W(\hat{\overline{E}}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V)^{G_E}$ *ist eine Gleichheit.*

Beweis. Zu i). Satz 2.1.24 ist die erste Isomorphie. Wir beweisen nun zunächst ii).

Beachte, dass nach i) folgendes Diagramm von Funktoren bis auf natürliche Isomorphie kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\Phi^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \arrow[rr, "W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \cdot"] & & \Phi^{et}_{W(F)} \\
& Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E) \arrow[ul, "\mathbf{D}_\mathcal{E}"] \arrow[ur, "\mathbf{D}_\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $\mathbf{D}_\mathcal{E}$ und $\mathbf{D}_\mathcal{F}$ Kategorienäquivalenzen sind, gilt das auch für $W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes}$. Wir beweisen nun die zweite Äquivalenz von ii) und die zweite natürliche Isomorphie von i), indem wir zeigen das folgendes Diagramm von Funktoren bis auf natürliche Isomorphie kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\Phi^{et}_{W(F)} \arrow[rr, "W(\hat{F}) \underset{W(F)}{\otimes}"] \arrow[dr, "\mathbf{V}_\mathcal{F}"] & & \Phi^{et}_{W(\hat{F})} \\
& Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E) \arrow[ur, "\mathbf{D}_\mathcal{G}"] \arrow[d, "\mathbf{D}_\mathcal{E}"] & \\
& \Phi^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \arrow[uul, "W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes}"] \arrow[uur, "W(\hat{F}) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes}"'] &
\end{tikzcd}$$

Das äußere Diagramm kommutiert wegen Transitivität des Tensorprodukts und das linksuntere haben wir gerade für i) nachgerechnet. Wir zeigen jetzt die Kommutativität des oberen Teildiagramms. Dann sind nämlich alle Pfeile in dem Diagramm Kategorienäquivalenzen und somit sind alle Wege in dem Diagramm natürlich isomorph zueinander.

Sei dafür $M \in \Phi^{et}_{W(F)}$. Satz 2.1.22.iv) gilt auch für $\mathcal{O}_\mathcal{F} = W(F)$. Demnach berechnet man die natürlichen Isomorphien

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\mathcal{G}}(\mathbf{V}_{\mathcal{F}}(M)) &= (W(\hat{F}^{alg}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \mathbf{V}_{\mathcal{F}}(M))^{G_E} \\
&\cong (W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(\overline{F})}{\otimes} W(\overline{F}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \mathbf{V}_{\mathcal{F}}(M))^{G_E} \\
&\cong (W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(\overline{F})}{\otimes} W(\overline{F}) \underset{W(F)}{\otimes} M)^{G_E} \\
&\cong (W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(F)}{\otimes} M)^{G_E}.
\end{aligned}$$

Um die Kommutativität des Diagramms zu erhalten, zeigen wir, dass die natürliche Inklusion

$$W(\hat{F}) \underset{W(F)}{\otimes} M \to (W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(F)}{\otimes} M)^{G_E}$$

eine Gleichheit ist. Zunächst einmal erwähnen wir, dass die zu untersuchende "Inklusion" wirklich injektiv ist, weil die Skalarerweiterung

$$W(\hat{F}) \to W(\hat{F}^{alg})$$

treu-flach ist (Siehe Mat86, Theorem 7.2) und wegen (Bou72, Proposition I §3.5.8.i)).

Die Gleichheit folgt dann, weil wir dasselbe für die treu-flache (Siehe Mat86, Theorem 7.2) Skalarerweiterung

$$W(\hat{F}) \to W(\hat{F}^{alg})$$

zeigen können, Satz 2.1.22.iii) mit $R = W(\hat{F})$ (Man überprüft leicht, dass $W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(F)}{\otimes} M$ die dort geforderten Bedingungen erfüllt) und der Kommutativität des folgenden Diagramms.

$$\begin{tikzcd}
W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(\hat{F})}{\otimes} W(\hat{F}) \underset{W(F)}{\otimes} M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(\hat{F})}{\otimes} (W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(F)}{\otimes} M)^{G_E} \arrow[d, "\cong"] \\
W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(F)}{\otimes} M \arrow[r, "="] & W(\hat{F}^{alg}) \underset{W(F)}{\otimes} M
\end{tikzcd}$$

Nun zu iii). Wie im Beweis zu ii) ist die zu untersuchende "Inklusion" wirklich injektiv.

Beachte, dass der Funktor auf der rechten Seite der Inklusion immer noch linksexakt ist. Wenn wir also gezeigt haben, dass $(W(\hat{\overline{E}}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V)^{G_E}$ p-adisch vollständig ist, so brauchen wir nur den Fall $pV = 0$ zu zeigen. Der Rest geht analog durch formelle Argumente wie in Satz 2.1.24, wobei wir das Schlangenlemma statt das Fünferlemma anwenden.

Aber es gilt

$$M^{G_E} = \bigcap_{\sigma \in G_E} \ker(\sigma - \mathrm{id})$$

für beliebige Moduln M mit Galoiswirkung. Die σ wirken p-adisch stetig auf $W(\hat{\overline{E}}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$, weil $\sigma(p^n) = p^n$ ist und die Wirkung semilinear ist. Demnach ist

$$(W(\hat{\overline{E}}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V)^{G_E}$$

abgeschlossen in dem endlich-erzeugten und somit, wegen des Elementarteilersatzes, vollständigen $W(\hat{\overline{E}})$-Modul $W(\hat{\overline{E}}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$. Also ist er selber vollständig in der Teilraumtopologie. Das heißt, dass die natürliche Abbildung

$$M^{G_E} \to \lim M^{G_E}/(p^n M \cap M^{G_E})$$

für $M := W(\hat{\overline{E}}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$ bijektiv ist. Wir wollen jetzt zeigen, dass die p-adische Topologie auf M^{G_E} gerade diese Teilraumtopologie ist. Da M als $W(\hat{\overline{E}})$-Modul endlich erzeugt ist, existiert nach dem Elementarteilersatz ein $r \in \mathbb{N}$, so dass $p^r m = 0$ ist für alle $m \in M_{tor}$ (Siehe Satz 1.3.2). Sei jetzt $n \geq r$ und $x \in p^n M \cap M^{G_E}$. Dann gilt also

$$x = p^n y, y \in M \text{ und } \sigma(x) - x = p^n(\sigma(y) - y) = 0.$$

Da $\sigma(y) - y \in M_{tor}$ ist gilt also $p^r(\sigma(y) - y) = \sigma(p^r y) - p^r y = 0$ und somit ist $p^r y \in M^{G_E}$. Demnach ist $x = p^{n-r} p^r y \in p^{n-r} M^{G_E}$. Insgesamt gilt

$$p^n M^{G_E} \subset p^n M \cap M^{G_E} \subset p^{n-r} M^{G_E} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die p-adische und die Teilraumtopologie auf M^{G_E} Strukturen topologischer $\mathbb{Z}_p$-Moduln sind, sind die Topologien somit schon gleich.

Sei jetzt also $pV = 0$. Dann ist also zu zeigen, dass die Inklusion

$$(\hat{F}^{alg} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E} \subset (\hat{\overline{E}} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E}$$

eine Gleichheit ist. Nach Theorie des klassischen Galois-Abstiegs (siehe Bri09, Abbildung (2.4.3)), haben wir folgenden $\hat{F}^{alg}$–Isomorphismus.

$$\hat{F}^{alg} \underset{\hat{F}}{\otimes} (\hat{F}^{alg} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E} \to \hat{F}^{alg} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V, \; x \otimes (y \otimes v) \mapsto xy \otimes v$$

Wir zeigen nun, dass dieser sich fortsetzt zu einem $\hat{\overline{E}}$-Isomorphismus auf der Vervollständigung von $\hat{F}^{alg}$

$$\hat{\overline{E}} \underset{\hat{F}}{\otimes} (\hat{\overline{E}} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E} \to \hat{\overline{E}} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V,\ x \otimes (y \otimes v) \mapsto xy \otimes v$$

Zunächst Surjektivität: Wir wissen, dass für eine endliche $\mathbb{F}_p$-Basis $(v_i)_i$ von V, $(1 \otimes v_i)_i$ eine endliche $\hat{\overline{E}}$-Basis von $\hat{\overline{E}} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V$ ist. Es genügt also Urbilder für diese Elemente zu finden. Da diese Basis aber auch eine $\hat{F}^{alg}$-Basis von $\hat{F}^{alg} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V$ ist, wissen wir, dass nach obigem Isomorphismus schon Urbilder in $\hat{F}^{alg} \underset{\hat{F}}{\otimes} (\hat{F}^{alg} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E}$ existieren.
Zur Injektivität zeigen wir allgemeiner, der einfacheren Notation halber, dass für jeden endlich-dimensionalen $\hat{\overline{E}}$-VR M mit semilinerarer G_E-Wirkung gilt, dass

$$\dim_{\hat{F}}(M^{G_E}) \leq \dim_{\hat{\overline{E}}}(M) \text{ ist.}$$

Nach oben gezeigter Surjektivität folgt im unseren Spezialfall dann nämlich gleiche endliche Dimension und somit ist unsere Abbildung ein Isomorphismus.
Da M endlich-dimensional ist, genügt es zu zeigen, dass falls $(m_i)_{i \leq n}$ eine endliche $\hat{F}$-linear unabhängige Menge in M^{G_E} ist, $(m_i)_i$ auch $\hat{\overline{E}}$-linear unabhängig ist. Sei $(m_i)_{i \leq n}$ sonst ein minimales Gegenbeispiel. Es gibt also eine nichttriviale Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i = 0 \text{ mit } x_i \in \hat{\overline{E}}.$$

Nach Minimalität gilt $x_i \neq 0$, für alle i. Demnach können wir oBdA zu $x_1 = 1$ normieren. Nach G_E-Semilinearität und weil die $m_i \in M^{G_E}$ sind gilt also auch

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i) m_i = 0 \text{ und } \sigma(x_1) = x_1\ \forall \sigma.$$

Also gilt auch

$$\sum_{i=2}^{n} (\sigma(x_i) - x_i) m_i = 0\ \forall \sigma.$$

Nach Minimalität der $(m_i)_i$ bezüglich linearer Unabhängigkeit, gilt also

$$\sigma(x_i) = x_i \text{ für alle } i \text{ und alle } \sigma,$$

also gilt nach (Ax69, Theorem)

$$x_i \in \hat{F} \text{ für alle } i.$$

Das steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $(m_i)_i$ über $\hat{F}$.

Demnach ist sowohl die $\hat{F}$-Dimenson von $(\hat{F}^{alg} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E}$, als auch die von $(\hat{\overline{E}} \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} V)^{G_E}$ gleich der $\mathbb{F}_p$-Dimension von V. Also ist die Inklusion eine Gleichheit. $\square$

2.2 Die direkte Methode

Sei ab jetzt für den Rest der Arbeit $L|\mathbb{Q}_p$ eine endliche Körpererweiterung, o sein Ring der ganzen Zahlen, $\pi \in o$ ein Uniformisierer und k sein Restklassenkörper. Außerdem schreiben wir $q := p^{f(L|\mathbb{Q}_p)}$, wobei $f(L|\mathbb{Q}_p) := [k : \mathbb{F}_p]$ der Trägheitsgrad von $L|\mathbb{Q}_p$ ist. Sei $E|k$ ab jetzt eine beliebige Körpererweiterung. Wir müssen nun die Konstruktionen aus dem letzten Abschnitt leicht abändern, um mit dem neuen Primelement π anstelle von p zu arbeiten. Wir wollen auch eine alternative Methode für die Konstruktion von Lemma 2.1.4.i) geben, die die Ringe direkt als Teilringe von verzweigten Wittvektoren betrachtet. Siehe für die Theorie dieser Wittvektoren (Sch16, §1.1). Danach stellen wir dann eine neue Methode für die erste Äquivalenz von Theorem 2.1.26 vor, die direkter ist und auch bessere Einblicke in die Äquivalenz von dem Theorem von Fontaine gibt.

2.2.1 Alternative Konstruktionen der Ringe

Bevor wir die alternative Konstruktion der $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ für E als Unterringe von $W(E)_L$ angehen, verallgemeinern wir ein paar Konstruktionen aus dem letzten Paragraphen.

Proposition 2.2.1. *Wir haben einen bis auf Isomorphie eindeutigen, vollständigen, diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, der eine flache o-Algebra ist mit Charakteristik 0, Uniformisierer π und Restklassenkörper E.*

Zusätzlich existiert ein o-Algebrenmorphismus $\varphi : \mathcal{O}_\mathcal{E} \to \mathcal{O}_\mathcal{E}$, der ein Lift des Frobenius $(\cdot)^q : E \to E$ ist.

Beweis. Für das $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ wende Lemma 2.1.4.i) an für $A = o$ und vervollständige anschließend wie in Proposition 2.1.5. Wende die Bemerkung nach dem Beweis zu Lemma 2.1.4.ii) an auf $B = o$ und $R = A = \mathcal{O}_\mathcal{E}$, um den Lift des Frobenius zu erhalten. Beachte dabei, dass q-Potenzieren auf k die Identität und somit ein o-Algebrenmorphismus auf E ist. Die Eindeutigkeit beweist man genau wie in Proposition 2.1.5. □

Setze nun wie im letzten Abschnitt

$$\mathcal{E} := Quot(\mathcal{O}_\mathcal{E}).$$

Nach der universellen Eigenschaft der maximal unverzweigten Erweiterung können wir einen Lift des Frobenius φ von $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ auf eindeutige Art und Weise auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ zu einem Lift des Frobenius

$$(\cdot)^q : E^{sep} \to E^{sep}$$

fortsetzen, so dass dieser Lift ein Ringmorphismus ist. Dieser ist aber auch ein o-Algebramorphismus, weil das gleiche schon für φ gilt. Ab jetzt fixieren wir solche Lifts und wir nennen beide φ_L. Wie im letzten Abschnitt gilt auch

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}-alg}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}) = G_E.$$

Lemma 2.2.2. *Es existieren injektive o-Algebramorphismen ψ_E und $\psi_{E^{sep}}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd}
W(E)_L & W(E)_L \arrow[l, "f_E"'] \arrow[r, "\subset"] & W(E^{sep})_L \arrow[r, "f_{E^{sep}}"] & W(E^{sep})_L \\
\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \arrow[u, "\psi_E"] & \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \arrow[l, "\varphi_L"] \arrow[u, "\psi_E"] \arrow[r, "\subset"'] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \arrow[u, "\psi_{E^{sep}}"] \arrow[r, "\varphi_L"'] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \arrow[u, "\psi_{E^{sep}}"]
\end{tikzcd}$$

Dabei ist f_E bzw. $f_{E^{sep}}$ der Frobenius auf $W(E)_L$ bzw. $W(E^{sep})_L$.

Zusätzlich kommutieren die natürlichen Galoiswirkungen von G_E auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ und $W(E^{sep})_L$ mit $\psi_{E^{sep}}$.

Beweis. Wie für Lemma 2.1.13, wobei die Referenz (Sch07, Lemma 5.3) auf (Sch16, Lemma 1.1.3) abgeändert werden muss. $\square$

Kommen wir jetzt zur alternativen Konstruktion von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Dieser ist konstruktiver, weil wir das Auswahlaxiom in einer technischen Vorbereitung eingehen lassen und den Rest wirklich konstruieren. Wir gehen dabei vor wie in (Sch07, §7).

Definition 2.2.3. Sei K ein Körper der Charakteristik p. Dann ist

$$K^{p^n} := \mathrm{im}((\cdot)^{p^n} : K \to K)$$

ein Teilkörper von K, weil p-Potenzieren ein Ringmorphismus auf K ist.

Eine *p-Basis* von K ist eine Teilmenge $\{x_i\}_{i \in I} \subset K$, so dass

$$K^p[\{X_i\}_i]/(\{X_i^p - x_i^p\}_i) \to K, \ X_i \mapsto x_i$$

bijektiv ist.

Proposition 2.2.4. *Jeder Körper K von Charakteristik p besitzt eine p-Basis.*

Beweis. Bezeichne mit $\mathfrak{P}$ die Menge aller Teilmengen $\{x_i\}_i \subset K$, so dass die Abbildung von Definition 2.2.3 injektiv ist. Da $\emptyset \in \mathfrak{P}$ ist, ist diese Menge nicht leer. Wir zeigen nun, dass die Menge durch Inklusion induktiv geordnet ist. Sei dafür J eine Menge, so dass für alle $j \in J$ eine Menge I_j existiert, für die

$$M_j := \{x_i\}_{i \in I_j} \in \mathfrak{P} \text{ ist,}$$

und $(M_j)_{j \in J}$ durch Inklusion total geordnet ist. Definiere nun

$$I := \bigcup_{j \in J} I_j.$$

Dann ist

$$M := \bigcup_{j \in J} M_j = \{x_i\}_{i \in I}.$$

Wir zeigen nun, dass $M \in \mathfrak{P}$ ist. Betrachte also

$$\psi : K^p[\{X_i\}_{i \in I}] \to K, X_i \mapsto x_i.$$

Dann ist zu zeigen, dass

$$\ker(\psi) = (\{X_i^p - x_i^p\}_i) \text{ ist.}$$

Dabei ist $\supset$ klar, denn $X_i^p - x_i^p \in \ker(\psi_{|K^p[\{X_i\}_{i \in I_{j_0}}]})$, wenn $x_i \in M_{j_0}$ ist. Sei jetzt also $f \in \ker(\psi)$. Da $(M_j)_{j \in J}$ total geordnet ist und f aus endlich vielen Summanden von Monomen aus $K^p[\{X_i\}_{i \in I}]$ besteht existiert ein M_{j_0}, so dass

$$f \in \ker(\psi_{|K^p[\{X_i\}_{i \in I_{j_0}}]}) = K^p[\{X_i\}_{i \in I_{j_0}}]\{X_i^p - x_i^p\}_{i \in I_{j_0}} \subset (\{X_i^p - x_i^p\}_i)$$

ist. Also ist $M \in \mathfrak{P}$.

Nach Lemma von Zorn existiert jetzt also ein maximales $\{x_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{P}$. Wir zeigen jetzt, dass die entsprechende Abbildung ψ wie oben für diese Menge surjektiv ist und die Menge somit eine p-Basis von K ist. Angenommen ψ wäre nicht surjektiv. Dann wähle ein beliebiges

$$y \in K \backslash K^p(\{x_i\}_{i \in I}).$$

Wir zeigen zunächst, dass das Minimalpolynom von y in $K^p(\{x_i\}_{i \in I})[X]$ gerade $X^p - y^p$ ist. Nach Definition von K^p ist das Polynom wirklich in $K^p(\{x_i\}_{i \in I})[X]$ und hat es hat offensichtlich y als Nullstelle. Ist es nun nicht das Minimalpolynom, so gibt es ein Polynom echt kleineren Grades mit y als Nullstelle. Da der Grad dann aber echt kleiner p ist, ist das Minimalpolynom separabel. Da

$$X^p - y^p = (X - y)^p \text{ ist,}$$

ist das einzig separable Polynom, dass $X^p - y^p$ teilt gerade $X - y$. Das ist ein Widerspruch zu $y \notin K^p((x_i)_i)$. Also ist $X^p - y^p$ das Minimalpolynom. Wir setzen nun

$$x_{i_0} := y \text{ und } I_0 := I \cup \{i_0\}$$

und zeigen, dass
$$\psi_0 : K^p[\{X_i\}_{i\in I_0}] \to K, X_i \mapsto x_i$$
injektiv ist. Das ist dann ein Widerspruch zur Maximalität von $\{x_i\}_{i\in I}$ und somit ist ψ surjektiv.

Da $\{x_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{P}$ ist, haben wir den natürlichen Isomorphismus

$$(K^p[\{X_i\}_{i\in I}]/(\{X_i^p - x_i^p\}_{i\in I}))[X_{i_0}]/(X_{i_0}^p - x_{i_0}^p) \to K^p(\{x_i\}_i)[X]/(X^p - y^p)$$

und nach gerade gezeigtem, haben wir die natürliche Einbettung

$$K^p(\{x_i\}_i)[X]/(X^p - y^p) \to K.$$

Es genügt also zu zeigen, dass wir den folgenden natürlichen Isomorphismus

$$(K^p[\{X_i\}_{i\in I}]/(\{X_i^p - x_i^p\}_{i\in I}))[X_{i_0}]/(X_{i_0}^p - x_{i_0}^p) \to K^p[\{X_i\}_{i\in I_0}]/(\{X_i^p - x_i^p\}_{i\in I_0})$$

haben. Das folgt aber, indem wir nach geeigneten Anwendungen des Homomorphiesatzes und der universellen Eigenschaft des Polynomringes zwei zueinander inverse Morphismen bauen. □

Wir benötigen jetzt die folgenden Eigenschaften einer p-Basis.

Lemma 2.2.5. *Für eine p-Basis $(x_i)_{i\in I}$ von K gilt folgendes.*

i) $K^{p^n}((x_i)_i) = K$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

ii) Die Elemente $\prod_i x_i^{\mu_i}$ *für* $\mu_i = 0, \dots, p^n - 1$ *mit nur endlich vielen* $\mu_i \neq 0$ *bilden eine* K^{p^n}*-Basis von* K.

Beweis. i) beweisen wir per Induktion nach n. Der Induktionsanfang für $n = 1$ gilt direkt nach Definition einer p-Basis. Sei nun also $K^{p^n}((x_i)_i) = K$. Deshalb ist für $K^{p^{n+1}}((x_i)) = K$ nur zu zeigen, dass

$$K^{p^n} \subset K^{p^{n+1}}((x_i)) \text{ ist.}$$

Jetzt gilt aber

$$K^{p^n} = (K^{p^n}((x_i)_i))^{p^n} = K^{p^{2n}}((x_i^{p^n})_i) \subset K^{p^{n+1}}((x_i)_i).$$

Die erste Gleichheit kommt von der Induktionsvoraussetzung und die zweite davon, dass p^n-Potenzieren ein Ringmorphismus ist.

Kommen wir jetzt zu ii). Nach i) und weil jedes $x_i^{p^n} \in K^{p^n}$ ist, sind die Elemente $\prod_i x_i^{\mu_i}$, $0 \le \mu_i < p^n$ ein K^{p^n}-Erzeugendensystem von K. Es ist also noch zu zeigen, dass sie linear unabhängig über K^{p^n} sind.

Wir zeigen zunächst, dass $x_{i_0} \notin K^p((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})$ ist.

Angenommen es wäre $x_{i_0} \in K^p((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})$ für ein beliebiges x_{i_0} der p-Basis. Da $x_{i_0} \in K^p((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})$ ist, haben wir die beiden surjektiven Ringmorphismen

$$\Psi_1 : K^p[\{X_i\}_{i\in I}] \to K^p((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})[X_{i_0}],\ X_i \mapsto y_i := \begin{cases} X_{i_0} \text{ falls } i = i_0 \\ x_i \text{ sonst.} \end{cases}$$

und

$$\Psi_2 : K^p((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})[X_{i_0}] \to K^p((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}),\ X_{i_0} \mapsto x_{i_0}.$$

Nach Definition einer p-Basis gilt

$$\Psi_1^{-1}(\ker(\Psi_2)) = \ker(\Psi_2 \circ \Psi_1) = (\{X_i^p - x_i^p\}_{i\in I}).$$

Nach Definition von Ψ_2 gilt

$$(X_{i_0}^p - x_{i_0}^p) \subset \ker(\Psi_2).$$

Wir zeigen nun, dass diese Inklusion eine Gleichheit ist. Wir haben nach eben gezeigtem und nach Definition von Ψ_1 die Inklusionen

$$\Psi_1^{-1}((X_{i_0}^p - x_{i_0}^p)) \subset \Psi_1^{-1}(\ker(\Psi_2)) = (\{X_i^p - x_i^p\}_{i\in I}) \subset \Psi_1^{-1}((X_{i_0}^p - x_{i_0}^p)).$$

Also gilt $\Psi_1^{-1}(\ker(\Psi_2)) = \Psi_1^{-1}((X_{i_0}^p - x_{i_0}^p))$ und weil Ψ_1 surjektiv ist, gilt somit

$$(X_{i_0}^p - x_{i_0}^p) = \ker(\Psi_2).$$

Also erzeugt $(X_{i_0} - x_{i_0})^p = X_{i_0}^p - x_{i_0}^p$ ein maximales Ideal in einem Hauptidealring, ist aber nicht irreduzibel, wegen $x_{i_0} \in K^p((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})$. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $x_{i_0} \notin K^p((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})$. Nach i) ist insbesondere jede p-Basis maximal und minimal mit dieser Eigenschaft.

Jetzt zeigen wir die gewünschte lineare Unabhängigkeit per Induktion nach n.

Wir schreiben dabei

$$\Lambda(n) := \{\mu := (\mu_i)_i\ |\mu_i = 0, \dots, p^n - 1,\ \text{fast alle } \mu_i = 0.\}$$

Sei also zunächst für $n = 1$ folgende Gleichung gegeben.

$$\sum_\mu \lambda_\mu \prod_i x_i^{\mu_i} = 0 \text{ mit } \mu \in \Lambda(1),\ \lambda_\mu \in K^p.$$

Da nur endlich viele μ in der Gleichung auftauchen existiert ein μ mit einer maximalen Anzahl an Einträgen $\neq 0$. Sei dies nun k. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage klar, weil die Gleichung die Form $\lambda_{(0)_i} = 0$ hat. Wir wollen nun also den Schritt $k \mapsto k + 1$ machen.

Wähle nun irgendein i_0 und definiere

$$\mu \sim_{i_0} \mu' :\Leftrightarrow \mu_{i_0} = \mu'_{i_0}.$$

Das ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Wähle ein Repräsentantensystem $\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(p-1)}$ der Relation. Dann schreibt sich die Gleichung um zu

$$\sum_{\mu_{i_0}=0}^{p-1} \Big(\sum_{\mu \sim_{i_0} \mu^{(\mu_{i_0})}} \lambda_\mu \prod_{i \neq i_0} x_i^{\mu_i} \Big) x_{i_0}^{\mu_{i_0}} = 0.$$

Da die

$$(x_{i_0}^{\mu_{i_0}})_{0 \leq \mu_{i_0} \leq p-1}$$

$K^p((x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$-linear unabhängig sind, gilt somit

$$\sum_{\mu \sim_{i_0} \mu^{(\mu_{i_0})}} \lambda_\mu \prod_{i \neq i_0} x_i^{\mu_i} = 0 \text{ für alle } \mu_{i_0} = 0, \dots, p-1$$

Da alle Gleichungen mit $\mu_{i_0} \neq 0$ maximal k Faktoren in den Produkten $\prod\limits_{i \neq i_0} x_i^{\mu_i}$ haben sind diese nun nach Induktionsvoraussetzung linear unabhängig über K^p. Daher müssen wir nur noch die Gleichung $\sum\limits_{\mu \sim_{i_0} \mu^{(0)}} \lambda_\mu \prod\limits_{i \neq i_0} x_i^{\mu_i} = 0$ betrachten. Da $k+1 > 0$ ist, können wir i_0 aber so wählen, dass mindestens ein $\mu_{i_0} \neq 0$ war. Deshalb hat diese Gleichung echt weniger Summanden. Wir können dieses Prozedere jetzt also immer wieder durchführen und weil nur endlich viele Summanden vorkommen endet es wenn keine solchen Summanden mehr vorkommen. Damit ist der Fall $n = 1$ gezeigt.

Wir wollen also jetzt noch den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ nachvollziehen. Betrachten wir also eine Gleichung von der Form

$$\sum_\mu \lambda_\mu \prod_i x_i^{\mu_i} = 0 \text{ mit } \mu \in \Lambda(n+1),\ \lambda_\mu \in K^{p^{n+1}}.$$

Jedes $\mu_i = 0, \dots, p^{n+1} - 1$ schreibt sich um zu der eindeutigen p-adischen Entwicklung

$$\mu_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(i)} p^j \text{ mit } \alpha_j^{(i)} = 0, \dots, p-1.$$

Damit schreibt sich obige Gleichheit um zu

$$\sum_\mu \lambda_\mu \Big(\prod_{j=1}^{n} \big(\prod_i x_i^{\alpha_j^{(i)}}\big)^{p^j}\Big)\Big(\prod_i x_i^{\alpha_0^{(i)}}\Big) = 0.$$

Definiere nun für $\mu, \mu' \in \Lambda(n+1)$ die Relation

$$\mu \sim \mu' :\Leftrightarrow \alpha_0^{(i)} = \alpha'^{(i)}_0 \text{ für alle } i,$$

wobei mit $\alpha_0^{(i)}$ die Zahl aus der p-adischen Entwicklung von μ_i gemeint ist. Dies ist wieder eine Äquivalenzrelation. Sei also $(\mu^{(r)})_r$ ein Repräsentantensystem. Dann schreibt sich die Gleichung weiter um zu

$$\sum_r \Big(\sum_{\mu \sim \mu^{(r)}} \lambda_\mu \Big(\prod_{j=1}^{n} \Big(\prod_i x_i^{\alpha_j^{(i)}} \Big)^{p^j} \Big) \Big) \Big(\prod_i x_i^{\alpha_0^{(i)}} \Big) = 0.$$

Nach Induktionsanfang sind die $\prod\limits_i x_i^{\alpha_0^{(i)}}$ K^p-linear unabhängig. Demnach gilt für alle r

$$\sum_{\mu \sim \mu^{(r)}} \lambda_\mu \Big(\prod_{j=1}^{n} \Big(\prod_i x_i^{\alpha_j^{(i)}} \Big)^{p^j} \Big) = 0.$$

Jetzt ist $\lambda_\mu = \eta_\mu^p$ mit $\eta_\mu \in K^{p^n}$. Da p-Potenzieren ein injektiver Ringmorphismus auf K ist haben wir also für alle r

$$\sum_{\mu \sim \mu^{(r)}} \eta_\mu \Big(\prod_{j=0}^{n-1} \Big(\prod_i x_i^{\alpha_{j+1}^{(i)}} \Big)^{p^j} \Big) = 0.$$

Nach Definition der Relation $\sim$ existiert für je zwei

$$\mu \neq \mu' \text{ mit } \mu \sim \mu'$$

ein i und ein $0 < j \leq n$, so dass

$$\alpha_j^{(i)} \neq \alpha'^{(i)}_j \text{ ist.}$$

Nach Eindeutigkeit der p-adischen Entwicklung und Induktionsvoraussetzung sind somit alle $\eta_\mu = 0$ und somit auch alle $\lambda_\mu = 0$. $\square$

Definition 2.2.6. Eine o-Algebra $C \subset W(E)_L$ heißt *Cohen-Unterring*, falls es ein vollständiger diskreter Bewertungsring ist mit Uniformisierer π und so dass

$$C + V_1(E)_L = W(E)_L \text{ gilt.}$$

Dabei ist $V_1(E)_L \subset W(E)_L$ das eindeutige maximale Ideal.

Bemerkung. Die letzte Bedingung gibt uns

$$C/(C \cap V_1(E)_L) \cong W(E)_L/V_1(E)_L \cong E.$$

Somit ist $\pi C = C \cap V_1(E)_L$ und C hat Restklassenkörper E. Bekommen wir also einen Cohen-Unterring, so haben wir ein gewünschtes $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

Satz 2.2.7. *Seien $(a_i)_i$ Elemente aus $W(E)_L$, so dass $\Phi_0(a_i)_i$ eine p-Basis von E bilden. Dann existiert genau ein Cohen-Unterring C, der alle a_i enthält.*

Beweis. Wir schreiben

$$A := W(E)_L,\ \mathfrak{m} := V_1(E)_L,\ \mathrm{pr} := \Phi_0,\ S := \{a_i\}_i.$$

Sei jetzt $m \geq 1$. Für alle $n \geq m-1$ definieren wir

$$C_{n,m} \text{ als die von } S \cup \Phi_n(W(A)_L) \cup \mathfrak{m}^m \text{ erzeugte } o\text{-Algebra von } A.$$

Wir zeigen nun, dass $C_{n,m}$ die kleinste o-Algebra von $W(E)_L$ ist, so dass

$$C_{n,m} + \mathfrak{m} = A \text{ ist},$$

welcher $S \cup \mathfrak{m}^m$ enthält. Insbesondere ist $C_m := C_{n,m}$ unabhängig von der Wahl von n.

Es gilt

$$\Phi_n(W(A)_L) = \{a_0^{q^n} + \pi a_1^{q^{n-1}} + \cdots + \pi^n a_n \mid a_0, \ldots, a_n \in A\}.$$

Da $\pi A \subset \mathfrak{m}$ ist, gilt

$$\mathrm{pr}(\Phi_n(W(A)_L)) = E^{q^n} \text{ und } \mathrm{pr}(C_{n,m}) = E^{q^n}(\mathrm{pr}(S)).$$

Lemma 2.2.5.i) bringt uns also $\mathrm{pr}(C_{n,m}) = E$. Es gilt also

$$(C_{n,m} + \mathfrak{m})/\mathfrak{m} = C_{n,m}/(C_{n,m} \cap \mathfrak{m}) = E = A/\mathfrak{m}.$$

Nach (1) gilt also $C_{n,m} + \mathfrak{m} = A$.

Sei nun $A' \subset A$ eine weitere o-Algebra, die

$$A' + \mathfrak{m} = A \text{ und } S \cup \mathfrak{m}^m \subset A' \text{ erfüllt.}$$

Um zu zeigen, dass $C_{n,m} \subset A'$ ist, muss gezeigt werden, dass

$$\Phi_n(W(A)_L) \subset A' \text{ ist.}$$

Seien deshalb $x_0, \ldots, x_n \in A$ beliebige Elemente. Da $A' + \mathfrak{m} = A$ ist, existieren $a'_0, \ldots, a'_n \in A'$ mit

$$x_i \equiv a'_i \mod \mathfrak{m}.$$

Beachte, dass (Sch16, Lemma 1.1.1 und Lemma 1.1.2.i)) mit gleichem Beweis auch für $\mathfrak{m}$ statt für πA gilt. Wegen $n \geq m-1$ gilt demnach

$$\Phi_n(x_0, \ldots, x_n) \equiv \Phi_n(a'_0, \ldots, a'_n) \mod \mathfrak{m}^m.$$

Mit $\Phi_n(a'_0, \ldots, a'_n)$ und $\mathfrak{m}^m$ liegt also auch $\Phi_n(x_0, \ldots, x_n) \in A'$. Also gilt $C_{n,m} \subset A'$.

Als nächstes zeigen wir

$$C_m \cap \mathfrak{m} = \pi C_m + \mathfrak{m}^m.$$

Dabei ist $\supset$ klar. Für die andere Inklusion schreiben wir

$$\Lambda(m) := \{\mu := (\mu_i)_i \mid \mu_i = 0, \ldots, q^m - 1 \text{ und fast alle } \mu_i = 0.\}$$

und setzen für $\mu \in \Lambda(m)$

$$Z_\mu := \prod_i a_i^{\mu_i}.$$

Es gilt

$$S^{q^m} = \{\Phi_m(a_i, 0, \ldots, 0) \mid a_i \in S\} \subset \Phi_m(W(A)_L).$$

Demnach wird $C_m = C_{m,m}$ von den Z_μ als Modul über der o-Algebra $\Phi_m(W(A)_L) + \mathfrak{m}^m$ erzeugt. Da

$$\Phi_m(a_0, \ldots, a_m) = a_0^{q^m} + \pi\Phi_{m-1}(a_1, \ldots, a_n) \text{ gilt,}$$

bekommen wir

$$\Phi_m(W(A)_L) \subset A^{q^m} + \pi C_{m-1,m} = A^{q^m} + \pi C_m.$$

Deshalb und weil $\mathfrak{m}^m \subset A$ ein Ideal ist, lässt sich jedes $c \in C_m$ schreiben als

$$c = \sum_\mu c_\mu^{q^m} Z_\mu + \pi c' + c'' \text{ mit } c_\mu \in A,\ c' \in C_m,\ c'' \in \mathfrak{m}^m.$$

Ist jetzt $c \in C_m \cap \mathfrak{m}$, so gilt

$$0 = \mathrm{pr}(c) = \sum_\mu \mathrm{pr}(c_\mu)^{q^m} \mathrm{pr}(Z_\mu).$$

Da die $\mathrm{pr}(Z_\mu)$ nach Lemma 2.2.3.ii) E^{q^m}-linear unabhängig sind, gilt also

$$c_\mu \in \mathfrak{m} \text{ und somit } c_\mu^{q^m} \in \mathfrak{m}^m.$$

Also ist $c \in \pi C_m + \mathfrak{m}^m$, und somit $\pi C_m + \mathfrak{m}^m = C_m \cap \mathfrak{m}$.

Da $\mathfrak{m}^m$ ein o-Modul ist, gilt nach Minimalität der C_m

$$C_m = C_{m+1} + \mathfrak{m}^m \text{ für alle } m \geq 1.$$

Wir setzen jetzt

$$C := \bigcap_m C_m.$$

Der Rest des Beweises benutzt jetzt nicht mehr, dass wir nach einer o-Algebra suchen und wir q-Potenzieren betrachten. Demnach funktioniert er ab jetzt ganz genau wie für (Sch07, Satz 7.3). Dafür muss nur überall p durch π ersetzt werden und die Referenzen abgeändert werden zu (Sch16, Proposition 1.1.18), (Sch16, Proposition 1.1.21) und (Sch16, Proposition 1.1.19). Nur bei der Eindeutigkeit muss man noch einmal benutzen, dass $\mathfrak{m}^m$ ein o-Modul ist, um die Minimalitätseigenschaft der C_m zu benutzen. $\square$

Bemerkung. Können wir also eine p-Basis für E konstruieren, so können wir auch ein $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ konstruieren.

Beispiel. Sei $E := k((X))$ der Körper der Laurentreihen über k. Dann ist X eine p-Basis von E, denn es gilt $E^p = k((X^p))$, weil k perfekt ist und somit ist

$$E^p[Y] \to E, Y \mapsto X$$

surjektiv, weil $\{X^n\}_{0\leq n<p}$ ein E^p-Erzeugendensystem von E ist. Aus Separabititäsgründen gilt aber auch, dass $Y^p - X^p = (Y-X)^p$ das Minimalpolynom über E^p ist, weil $X \notin E^p$ ist.

Im nächsten Kapitel konstruieren wir $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ explizit für dieses $E = k((X))$.

2.2.2 Die Äquivalenzen durch Abstieg

Wir wollen einen neuen Beweis für eine verallgemeinerte Kategorienäquivalenz zwischen φ_L-Moduln, motiviert durch Theorem 2.1.16, geben. Diese Äquivalenz ist gegeben durch die Skalarerweiterung

$$W(F)_L \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \cdot,$$

wobei wieder $F := E^{perf}$ ist. Dafür wollen wir einen Abstieg konstruieren. Wir fangen damit an diesen auf π-Torsionsobjekten zu konstruieren. Das basiert auf Notizen, die Professor Peter Schneider im Sommer 2015 aufgestellt hat.

Sei dafür zunächst $F|E$ eine beliebige rein inseparable Erweiterung und wir schreiben

$$\varphi := (\cdot)^q : F \to F.$$

Das q-Potenzieren auf E bezeichen wir genauso. Die entsprechenden Kategorien von etalen φ-Moduln bezeichen wir mit

$$\Phi_E^{et} \text{ bzw. } \Phi_F^{et}.$$

Außerdem ist für ein beliebiges (V, φ_V) aus Φ_E^{et} nach Beispiel 2.1.19.i)

$$(F \underset{E}{\otimes} V, \varphi \otimes \varphi_V) \text{ in } \Phi_F^{et}.$$

Proposition 2.2.8. *Ist (W, φ_W) in Φ_F^{et}, so existiert ein eindeutiges größtes $W_E \subset W$, so dass $(W_E, \varphi_{W|W_E})$ in Φ_E^{et} gilt. Für diesen gilt, dass der natürliche Morphismus*

$$F \underset{E}{\otimes} W_E \to W, \ x \otimes w \mapsto xw$$

ein Isomorphismus in Φ_F^{et} ist.

Beweis. Wähle eine beliebige F-Basis $(w_1, \dots, w_n)$ von W. Dann gilt

$$\varphi_W(w_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} w_j, \text{ wobei } x_{ij} \in F \text{ ist.}$$

Da φ_W φ-semilinear ist, folgt also

$$\varphi_W^{l+1}(w_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{q^l} \varphi_W^l(w_j).$$

Da $F|E$ rein inseparabel ist finden wir wie im Beweis von Lemma 2.1.15 ein l_0, so dass

$$y_{ij} := x_{ij}^{q^{l_0}} \in E \text{ für alle } i, j \text{ ist.}$$

Jetzt definieren wir

$$v_i := \varphi_W^{l_0}(w_i) \text{ und } W_E := \sum_{i=1}^{n} E v_i.$$

Da φ_W etal ist, ist $(v_1, \ldots, v_n)$ immer noch eine F-Basis von W und es gilt somit automatisch die gewünschte Isomorphie

$$F \underset{E}{\otimes} W_E \cong W.$$

Da zudem

$$\varphi_W(v_i) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} v_j \text{ gilt,}$$

ist $\varphi_{W_E} := \varphi_{W|W_E}$ ein φ-semilinearer Endomorphismus über E, für den über die obige Isomorphie

$$\varphi \otimes \varphi_{W_E} = \varphi_W \text{ gilt.}$$

Da $(\varphi_W(v_1), \ldots, \varphi_W(v_n))$ nach Etalheit von φ_W immer noch eine F-Basis von W ist, ist es auch insbesondere E-linear unabhängig und somit wegen $F \underset{E}{\otimes} W_E \cong W$ auch eine E-Basis von W_E. Somit gilt, dass

$$(W_E, \varphi_{W_E}) \text{ in } \Phi_E^{et} \text{ ist.}$$

Wir zeigen nun, dass W_E unabhängig von der Wahl der F-Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ ist und die gewünschte Maximalität hat. Sei dafür (V, φ_V) in Φ_E^{et} beliebig. Wir zeigen nun, dass für einen beliebigen Morphimus aus Φ_F^{et}

$$\alpha : F \underset{E}{\otimes} V \to W \text{ gilt,}$$

dass $\alpha(V) \subset W_E$ ist. Beachte, dass im Falle eines Körpers jeder Vektorraum frei und somit flach ist. Deswegen macht die Inklusion $V \subset F \underset{E}{\otimes} V$ Sinn.

Sei nun $(v_1, \ldots, v_r)$ eine E-Basis von V. Wir schreiben

$$\alpha(v_i) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} w_j \text{ mit } z_{ij} \in F.$$

Da α ein φ-Morphismus ist und $\varphi(1) = 1$ ist, rechnen wir

$$\alpha(\varphi_V^m(v_i)) = \varphi_W^m(\alpha(v_i)) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}^{q^m} \varphi_W^m(w_j).$$

Wählen wir jetzt $m_0 \geq l_0$ groß genug, so dass

$$e_{ij} := z_{ij}^{q^{m_0}} \in E \text{ ist,}$$

so gilt

$$\alpha(\varphi_V^{m_0}(v_i)) = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\varphi_V^{m_0-l_0}(v_j) \in W_E.$$

Da φ_V etal ist, ist $\varphi_V^{m_0}(v_i)$ eine E-Basis von V und somit gilt

$$\alpha(V) \subset W_E.$$

Wählen wir jetzt für α die Inklusion, so bekommen wir die gewünschte Unabhängigkeit von der Basis und die Maximalität. $\square$

Satz 2.2.9. *Wir haben eine Kategorienäquivalenz zwischen Φ_E^{et} und Φ_F^{et} gegeben durch die Skalarerweiterung*

$$F \underset{E}{\otimes} \cdot .$$

Dabei ist $W \mapsto W_E$ mit W_E aus Proposition 2.2.8 ein Quasi-inverser Funktor.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $W \mapsto W_E$ ein Funktor ist. Sei dafür

$$\alpha : W^{(1)} \to W^{(2)}$$

ein Morphismus in Φ_F^{et}. Wir schränken nun α ein auf $\alpha_{|W_E^{(1)}}$. Wir konstruieren daraus den φ-Morphismus

$$\mathrm{id} \otimes \alpha_{|W_E^{(1)}} : F \underset{E}{\otimes} W_E^{(1)} \to W^{(2)}.$$

Für den haben wir im Beweis von Proposition 2.2.8 gesehen, dass

$$\alpha_{|W_E^{(1)}}(W_E^{(1)}) = \mathrm{id} \otimes \alpha_{|W_E^{(1)}}(W_E^{(1)}) \subset W_E^{(2)} \text{ gilt.}$$

Somit ist $W \mapsto W_E$ ein Funktor. Für diesen gilt für beliebiges (W, φ_W) in Φ_F^{et} nach Proposition 2.2.8

$$(F \underset{E}{\otimes} W_E, \varphi \otimes \varphi_{W_E}) \cong (W, \varphi_W).$$

Ist jetzt (V, φ_V) in Φ_E^{et} beliebig, so haben wir wegen Maximalität gerade

$$((F \underset{E}{\otimes} V)_E, \varphi_{(F \underset{E}{\otimes} V)_E}) \supset (V, \varphi_V).$$

Gleiche endliche Dimension macht daraus eine Gleichheit. Insgesamt sind beide Funktoren also quasi-invers zueinander. $\square$

Um diese Kategorienäquivalenz zu liften, werden wir uns im Folgenden zunächst auf den Fall für E^{sep} konzentrieren. Also einen Körper der separabel algebraisch abgeschlossen ist. Wir formulieren hier schon einmal die Verbindung zu den Darstellungen über o, die dadurch im π-Torsionsfall auftritt.

Satz 2.2.10. *Wir haben eine Kategorienäquivalenz zwischen $\Phi^{et}_{E^{sep}}$ und $k-VR_e$. Letzteres ist die Kategorie der endlich-dimensionalen k-Vektorräume. Diese Kategorienäquivalenz ist gegeben durch die Skalarerweiterung*

$$E^{sep} \underset{k}{\otimes} \cdot,$$

mit Inversem $W \mapsto W^{\varphi_W = \mathrm{id}}$.

Beweis. Die Hauptarbeit, dass

$$E^{sep} \underset{k}{\otimes} W^{\varphi_W = \mathrm{id}} \cong W \text{ ist,}$$

wird in (Sch07, Satz 2.1) erledigt. Außerdem ist für einen endlich dimensionalen k-Vektorraum V

$$(E^{sep} \underset{k}{\otimes} V, \varphi \otimes \mathrm{id}_V)$$

etal nach Beispiel 2.1.19.i), wenn man (V, id_V) als etalen id_k-Modul auffasst.

Das $W \mapsto W^{\varphi_W = \mathrm{id}}$ einen Funktor induziert ist klar, weil die φ-Morphismen mit den φ_W vertauschen. Dann muss nur noch gezeigt werden, dass

$$(E^{sep} \underset{k}{\otimes} V)^{\varphi \otimes \mathrm{id}_V = \mathrm{id}} = V \text{ ist.}$$

Da $(E^{sep})^{\varphi = \mathrm{id}} = k$ ist, gilt aber

$$V \subset (E^{sep} \underset{k}{\otimes} V)^{\varphi \otimes \mathrm{id}_V = \mathrm{id}}$$

und gleiche endliche Dimension nach (Sch07, Satz 2.1) gibt einem dann Gleichheit. □

Wir bezeichnen ab jetzt mit $\mathrm{pr}_{\pi^n} : M \to M/\pi^n M$ immer die Projektion modulo $\pi^n M$ und kurz $\mathrm{pr} : M \to M/\pi M$ für beliebige $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-Moduln M.

Wir könnten im Folgenden immer den Fall einer rein inseperablen Erweiterung $F|E$ betrachten. Da der Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ aus Proposition 2.2.1 für

$$F := E^{perf}$$

gerade $W(F)_L$, und somit ein gut konstruierbarer Ring ist, betrachten wir nur dieses F. Siehe Lemma 2.1.15.i), dass dieses F rein inseparabel ist.

Wir kommen jetzt dazu das Nakayama-Lemma für unsere Aussagen auszunutzen.

Lemma 2.2.11. *Sei $f : M \to N$ eine $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-lineare (bzw. $W(F)_L$-lineare) Abbildung. Dann ist f surjektiv, falls N endlich erzeugt ist, und die induzierte Abbildung*

$$\overline{f} : M/\pi M \to N/\pi N$$

surjektiv ist.

Beweis. $N/\pi N$ ist ein endlich erzeugter E-Vektorraum und nach Proposition 1.1.9 ist jede Wahl von Repräsentanten einer E-Basis ein Erzeugendensystem von N. Sei also $(\tilde{n}_1, \ldots, \tilde{n}_r)$ eine E-Basis von $N/\pi N$. Ist $\overline{f}$ surjektiv, so wähle Urbilder $\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_r$ mit

$$\overline{f}(\tilde{m}_i) = \tilde{n}_i.$$

Wähle beliebige Urbilder $m_1 \ldots, m_n$ mit

$$\mathrm{pr}(m_i) = \tilde{m}_i.$$

Dann sind die $f(m_i)$ Repräsentanten von den $\tilde{n}_i$, bilden also nach Proposition 1.1.9 ein Erzeugendensystem von N. Damit ist f surjektiv. $\square$

Sei ab jetzt zunächst einmal

$$E = E^{sep}.$$

Also ist E selber ein separabel algebraisch abgeschlossener Körper. Nach Lemma 1.1.15 gilt

$$F = (E^{sep})^{perf} = \overline{E}.$$

Also ist die perfekte Hülle von E algebraisch abgeschlossen. Wir wollen jetzt einen Abstieg von $\Phi^{et}_{W(F)_L}$ nach $\Phi^{et}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ konstruieren.

Definition 2.2.12. Sei M ein etaler $W(F)$-Modul. Definiere

$$M_E^{(x,b)} := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle,$$

als den erzeugte $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-Modul. Dabei ist $x := (x_i)_i$ eine Wahl von Repräsentanten von einer fixierten Basis b von $(M/\pi M)_E$. Letzteres ist der E-Vektorraum gegeben aus Proposition 2.2.8.

Bemerkung 2.2.13. Es gilt

$$\pi^n M \cap M_E^{(x,b)} = \pi^n M_E^{(x,b)}.$$

So macht

$$M_E^{(x,b)}/\pi^n M_E^{(x,b)} \subset M/\pi^n M$$

Sinn und es gilt, dass

$$(M/\pi^n M)_E^{(\mathrm{pr}_{\pi^n}(x),b)} = M_E^{(x,b)}/\pi^n M_E^{(x,b)} \text{ ist für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere gilt

$$(M/\pi M)_E = M_E^{(x,b)}/\pi M_E^{(x,b)}.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\pi^n M_E^{(x,b)} = M_E^{(x,b)} \cap \pi^n M$ ist. Denn dann gilt

$$M_E^{(x,b)}/\pi^n M_E^{(x,b)} = \mathrm{pr}_{\pi^n}(M_E^{(x,b)}) = \mathrm{pr}_{\pi^n}(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = \langle \mathrm{pr}_{\pi^n}(x_1), \dots, \mathrm{pr}_{\pi^n}(x_n) \rangle.$$

$\subset$ ist klar. Sei also $m \in M_E^{(x,b)} \cap \pi^n M$. D.h.

$$m = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n$$

und insbesondere $m \in \pi M$. Da die $(x_i)_i$ modulo πM F-linear unabhängig sind gilt

$$r_i \in \pi W(F)_L \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \pi \mathcal{O}_{\mathcal{E}}.$$

Dasselbe können wir jetzt sukzessive für

$$\frac{m}{\pi^j} \text{ für } 1 \leq j \leq n-1$$

durchführen und erhalten, dass

$$r_i \in \pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \text{ ist.}$$

Somit gilt $m \in \pi^n M_E^{(x,b)}$. □

Lemma 2.2.14. *$M_E^{(x,b)}$ ist unabhängig von der Wahl von der Basis b.*

Beweis. Seien b und b' zwei verschiedene Basen von $(M/\pi M)_E$ und $M_E^{(x,b)}$ bzw. $M_E^{(x',b')}$ der entsprechende Modul gewisser Repräsentanten. Wähle Repräsentanten

$$y := (y_i)_i \text{ von } b' \text{ in } M_E^{(x,b)}.$$

Das geht, weil nach Bemerkung 2.2.13

$$\mathrm{pr}(M_E^{(x,b)}) = (M/\pi M)_E \text{ ist.}$$

Dies ist nach Proposition 1.1.9 ein Erzeugendensystem von $M_E^{(x,b)}$. Also gilt

$$M_E^{(x,b)} = M_E^{(y,b')}.$$

□

Wir schreiben deshalb ab jetzt nur noch

$$M_E^{(x)} := M_E^{(x,b)}.$$

Da b eindeutig durch x bestimmt wird, ginge diese Abkürzung natürlich schon direkt in der Definition von $M_E^{(x)}$. Wir machen das hier zur Verdeutlichung dieses Lemmas.

Proposition 2.2.15. *Es existiert genau ein $M_E^{(x)}$, das φ_M-invariant ist und wir schreiben*

$$M_E := M_E^{(x)}.$$

Dieser ist etal über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Außerdem kann man $x = (x_1, \ldots, x_n)$ so wählen, dass

$$\varphi_M(x) := (\varphi_M(x_1), \ldots, \varphi_M(x_n)) = x \textit{ ist.}$$

Beweis. Ist $M_E^{(x)}$ invariant unter φ_M, so folgt die Etalheit daraus, dass wir nach Proposition 2.1.18 nur Surjektivität der Linearisierung von $\varphi_{M_E^{(x)}}$ zeigen müssen. Nach Lemma 2.2.11 genügt es Surjektivität modulo π zu überprüfen. Dass gilt aber, weil für jegliche Wahl x von Repräsentanten von b gilt, dass

$$M_E^{(x)}/\pi M_E^{(x)} = (M/\pi M)_E \text{ ist.}$$

Dieser ist etal über E nach Proposition 2.2.8. Die Linearisierung von $\varphi_{M_E^{(x)}}$ modulo π ist aber gerade die Linearisierung von $\varphi_{(M/\pi M)_E}$.

Zur Existenz (Angelehnt an Sch07, Beweis von Satz 8.20): Da M als endlich erzeugter Modul π-adisch vollständig ist, genügt es induktiv Elemente

$$(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$$

zu finden, für die folgende Eigenschaften gelten:

$$(x_1^{(k)} \mod \pi M, \ldots, x_n^{(k)} \mod \pi M) \text{ ist } E\text{-Basis von } (M/\pi M)_E \tag{1}$$

$$x_i^{(k+1)} \equiv x_i^{(k)} \mod \pi^k M \tag{2}$$

$$\varphi_M(x_i^{(k)}) \equiv x_i^{(k)} \mod \pi^k M \tag{3}$$

Nach (2) existiert wegen Vollständigkeit von M dann $x := (x_1, \ldots, x_n)$, so dass

$$x_i \mod \pi^k M \equiv x_i^{(k)} \text{ für alle } k \text{ ist.}$$

Nach (1) ist $M_E^{(x)}$ im Sinne unserer Definition wohldefiniert. Abschließend gilt $\varphi(x_i) = x_i$, denn nach (2) und (3) ist

$$\varphi(x_i) \equiv x_i \mod \pi^n M \text{ für alle } n.$$

Für $k = 1$ existiert nach (Sch07, Satz 2.1) $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$, so dass (1) und (3) gilt.

Sei jetzt also $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ schon konstruiert, so dass (1)-(3) gelten. Dabei heißt (3) explizit

$$\varphi_M(x_i^{(k)}) = x_i^{(k)} + \pi^k \sum_j f_{ij} x_j^{(k)}, \;\; f_{ij} \in W(F)_L,$$

denn nach Proposition 1.1.9 ist $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ als Representantensystem einer F-Basis ein $W(F)_L$-Erzeugendensystem von M. Setze nun

$$x_i^{(k+1)} := x_i^{(k)} + \pi^k \sum_j r_{ij} x_j^{(k)}, \;\; r_{ij} \in W(F)_L.$$

Dann gilt (1) und (2) nach Konstruktion und wir haben

$$\begin{aligned}\varphi_M(x_i^{(k+1)}) &= x_i^{(k)} + \pi^k (\sum_j f_{ij} x_j^{(k)} + \sum_j \varphi_L(r_{ij}) x_j^{(k)} + \pi^k(\dots)) \\ &\equiv x_i^{(k+1)} + \pi^k (\sum_j (f_{ij} + \varphi_L(r_{ij}) - r_{ij}) x_j^{(k)}) \quad \bmod \pi^{k+1} M.\end{aligned}$$

Wir suchen also r_{ij}, so dass

$$f_{ij} + \varphi_L(r_{ij}) - r_{ij} \in \pi W(F)_L \text{ ist.}$$

Wir suchen also in F eine Lösung für

$$\mathrm{pr}(f_{ij}) + X^q - X = 0.$$

Da F algebraisch abgeschlossen ist, können wir also eine solche Lösung $\bar{r}_{ij}$ zusammen mit Repräsentanten r_{ij} wählen. Für diese r_{ij} gilt also auch (3) für $x_i^{(k+1)}$.

Wir schreiben ab jetzt $M_E := M_E^{(x)}$ für dieses konstruierte φ_M-invariante $M_E^{(x)}$.

Zur Eindeutigkeit: Sei y eine Wahl von Repräsentanten von b, so dass

$$M_E \neq M_E^{(y)} \text{ ist.}$$

Angenommen $M_E^{(y)}$ wäre φ_M-invariant. Dann ist auch

$$M_E \subsetneq M_E + M_E^{(y)}$$

ein etaler φ_L-Modul über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, denn nach dem ersten Teil im Beweis ist M_E etal und somit bildet φ_M ein Erzeugendensystem von M_E auf ein Erzeugendensystem von M_E ab. Mit demselben Beweis gilt das gleiche auch für $M_E^{(y)}$, und somit auch für $M_E + M_E^{(y)}$. Das ist ein Widerspruch zum folgenden Lemma. $\square$

Lemma 2.2.16. *Ist $M_E^{(x)}$ φ_M-invariant (und somit etal über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$) und*

$$M_E^{(x)} \subset \widetilde{M} \subset M$$

ein etaler φ_L-Modul über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, so gilt

$$M_E^{(x)} = \widetilde{M}.$$

Beweis. Es genügt die Aussage zu zeigen, für den Fall

$$\pi^n M = 0 \text{ für beliebiges } n \in \mathbb{N}.$$

Denn haben wir die Aussage für den Fall $\pi^n M = 0$ gezeigt, ist somit der Pfeil rechts bijektiv und somit auch die injektive Abbildung unten surjektiv und schließlich auch die die Inklusion links surjektiv in folgendem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
M_E^{(x)} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\subset"] & \lim M_E^{(x)}/\pi^n M_E^{(x)} \arrow[d, "\subset", "\overset{!}{=}"'] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "\overset{!}{\cong}"] & \lim \widetilde{M}/(\pi^n M \cap \widetilde{M})
\end{tikzcd}$$

Beachte dafür, dass nach der Bemerkung 2.2.13

$$(M/\pi^n M)_E^{(\mathrm{pr}_{\pi^n}(x))} = M_E^{(x)}/\pi^n M_E^{(x)} \text{ gilt,}$$

und somit ist

$$(M/\pi^n M)_E^{(\mathrm{pr}_{\pi^n}(x))}$$

mit $M_E^{(x)}$ φ_M-invariant und außerdem ist nach Bemerkung 2.2.13

$$M_E^{(x)}/\pi^n M_E^{(x)} \to \widetilde{M}/(\pi^n M \cap \widetilde{M})$$

die Inklusion in $M/\pi^n M$. Außerdem ist

$$\widetilde{M}/(\pi^n M \cap \widetilde{M})$$

ein etaler φ_L-Modul, weil ein Erzeugendensystem von $\widetilde{M}$ von φ_M auf ein Erzeugendensystem desselben Moduls geschickt wird. Daher gilt das gleiche auch für $\widetilde{M}/(\pi^n M \cap \widetilde{M})$.

Sei jetzt also $\pi^n M = 0$ und $\tilde{m} \in \widetilde{M}$ beliebig. Da $\widetilde{M}$ ein etaler φ_L-Modul ist, ist $\mathrm{pr}(\widetilde{M}) \subset M/\pi M$ auch ein etaler φ_L-Modul über E, wie eben gezeigt. Somit gilt

$$\mathrm{pr}(\widetilde{M}) \subset (M/\pi M)_E$$

nach Proposition 2.2.8. Da $M_E^{(x)} \subset \widetilde{M}$ ist, gilt sogar nach Bemerkung 2.2.13, dass

$$\mathrm{pr}(\widetilde{M}) = (M/\pi M)_E = \mathrm{pr}(M_E^{(x)}) \text{ ist.}$$

Demnach haben wir

$$\tilde{m} = m_1 + \pi y_1,\ m_1 \in M_E^{(x)},\ y_1 \in M.$$

Nach Proposition 2.2.8 gilt, dass $r_1 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\varphi_M^{r_1}(y_1) + \pi M \in (M/\pi M)_E,$$

haben wir wie vorhin

$$\varphi_M^{r_1}(y_1) = m_2 + \pi y_2 \text{ mit } m_2 \in M_E,\ y_2 \in M.$$

Sukzessive bekommen wir also

$$\begin{aligned}\varphi_M^{r_1+\cdots+r_{n-1}}(\tilde{m}) = \varphi^{r_1+\cdots+r_{n-1}}(m_1) \\ &+ \pi\varphi_M^{r_2+\cdots+r_{n-1}}(m_2) \\ &+ \ldots \\ &+ \pi^{n-1}\varphi_M^{r_{n-1}}(m_{n-1}) + \pi^n y_n,\ m_i \in M_E^{(x)},\ y_n \in M.\end{aligned}$$

Da $\pi^n y_n = 0$ und $M_E^{(x)}$ φ_M-invariant ist, gilt also

$$(*)\ \varphi_M^{r_1+\cdots+r_{n-1}}(\tilde{m}) \in M_E^{(x)}.$$

Sei jetzt $(\tilde{m}_i)_i$ ein endliches Erzeugendensystem von $\widetilde{M}$ über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Da $\widetilde{M}$ etal ist, ist $(\varphi_M^r(\tilde{m}_i))_i$ immer noch ein Erzeugendensystem von $\widetilde{M}$ für alle $r \in \mathbb{N}$. Nach $(*)$ existiert aber r_0, so dass $\varphi_M^{r_0}(\tilde{m}_i) \in M_E^{(x)}$ ist für alle i, also gilt $M_E^{(x)} = \widetilde{M}$. □

Aus diesem Lemma folgern wir noch zusätzlich die nächste Aussage.

Proposition 2.2.17. *Sei V in $\Phi_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{et}$. Für jeden etalen φ_L-Morphismus*

$$\alpha : W(F)_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V \to M$$

gilt, dass

$$\alpha(V) \subset M_E \textit{ ist.}$$

Insbesondere gilt $(W(F)_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V)_E = V$, falls V etaler φ_L-Modul über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ ist.

Außerdem ist M_E der eindeutige maximale $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Untermodul von M, so dass M_E in $\Phi_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{et}$ ist.

Beweis. Wir bemerken zunächst an, dass $V \subset W(F)_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V$ Sinn ergibt, weil

$$\mathcal{O}_\mathcal{E} \to W(F)_L$$

treu-flach ist (Siehe Mat86, Theorem 7.2) und wegen (Bou72, Proposition I §3.5.8.i)).

Wie für Satz 2.1.22.i) ist $\alpha(V)$ ein etaler φ_L-Modul über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Demnach ist wie im Beweis von Proposition 2.2.15 auch

$$M_E \subset M_E + \alpha(V)$$

ein etaler φ_L-Modul über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Nach Lemma 2.2.16 gilt also $M_E = M_E + \alpha(V)$ und somit $\alpha(V) \subset M_E$.

Für $\alpha = \mathrm{id}$ folgt dann also $V \subset (W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V)_E$ und somit Gleichheit nach Lemma 2.2.11 und weil die entsprechende Aussage modulo π in Satz 2.2.9 gezeigt wurde, denn es gilt

$$(W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V)_E / \pi (W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V)_E = (W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V / \pi (W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V))_E = (W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V / \pi V)_E$$

nach Bemerkung 2.2.13.

Für die letzte Aussage, betrachte für α die Inklusion, falls $N \subset M$ ein $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Untermodul ist, sodass N in $\Phi^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ gilt. □

Wie im Beweis von Satz 2.2.9 sagt uns Proposition 2.2.17, dass $M \mapsto M_E$ zu einem Funktor zwischen Kategorien etaler φ_L-Moduln durch einschränken der Morphismen wird. Dieser ist nach Proposition 2.2.17 essenziell surjektiv. Um zu zeigen, dass es ein Inverses zur Skalarerweiterung ist, zeigen wir noch eine zusätzliche Eigenschaft.

Lemma 2.2.18. *$(\cdot)_E$ ist exakt.*

Beweis. Wir zeigen dies zuerst für π-Torsionsobjekte. Sei also folgende exakte Sequenz in Φ^{et}_F gegeben.

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

Dann haben wir nach Satz 2.2.9 folgendes kommutative Diagramm, mit Isomorphismen in den Spalten.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \underset{E}{\otimes} L_E \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f"] \arrow[d] & F \underset{E}{\otimes} M_E \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes g"] \arrow[d] & F \underset{E}{\otimes} N_E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demnach ist mit der unteren auch die obige Zeile exakt. Da F als E-Vektorraum frei ist, schreibe

$$F \cong \bigoplus_{i \in I} E.$$

Dadurch haben wir folgendes kommutative Diagramm mit Isomorphismen in den Spalten.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \underset{E}{\otimes} L_E \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f"] \arrow[d] & F \underset{E}{\otimes} M_E \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes g"] \arrow[d] & F \underset{E}{\otimes} N_E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i \in I} L_E \arrow[r, "\bigoplus f"] & \bigoplus_{i \in I} M_E \arrow[r, "\bigoplus g"] & \bigoplus_{i \in I} N_E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demnach ist die untere Zeile also exakt, und somit auch

$$0 \to L_E \xrightarrow{f} M_E \xrightarrow{g} N_E \to 0.$$

Sei unsere exakte Sequenz jetzt aus $\Phi^{et}_{W(F)}$. Einschränken vom injektiven Morphismus f ist offensichtlich selber injektiv.

Der surjektive Morphismus g geht modulo π zu einem surjektiven Morphismus $\bar{g} : M/\pi M \to N/\pi N$ über.
Dort haben wir gerade Exaktheit gezeigt, also ist auch die Einschränkung modulo π

$$\bar{g} : M_E/\pi M_E = (M/\pi M)_E \to (N/\pi N)_E = N_E/\pi N_E$$

surjektiv. Nach Lemma 2.2.11 ist also auch die Einschränkung

$$g : M_E \to N_E \text{ surjektiv.}$$

Offensichtlich gilt

$$\mathrm{im}(f_{|L_E}) \subset \ker(g_{|M_E}) \subset \ker(g) = \mathrm{im}(f).$$

Außerdem ist somit $f^{-1}_{|\ker(g_{|M_E})}$ wohldefiniert. Da nach Satz 2.1.22.i) $\ker(g_{|M_E})$ ein etaler φ_L-Modul über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ ist, ist nach Proposition 2.2.17

$$\mathrm{im}(f^{-1}_{|\ker(g_{|M_E})}) \subset L_E.$$

Also sind die Urbilder von allen $x \in \ker(g_{|M_E})$ unter f in L_E zu finden, also gilt

$$\mathrm{im}(f_{|L_E}) = \ker(g_{|M_E}).$$

□

Wir sind jetzt soweit die gewünschte Kategorienäquivalenz für den Fall eines separabel algebraisch abgeschlossenen Körpers zu beweisen.

Satz 2.2.19. *Der Funktor*

$$V \mapsto W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} V$$

induziert eine Kategorienäquivalenz zwischen Kategorien etaler φ_L-Moduln.

Beweis. Nach Proposition 2.2.17 genügt es zu zeigen, dass die natürliche Abbildung

$$W(F)_L \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_E \to M$$

ein Isomorphismus ist. Da M und M_E als endlich erzeugte Moduln π-adisch vollständiger Ringe selber π-adisch vollständig sind und, weil $W(F)_L \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \cdot$ rechtsexakt ist, können wir die Aussage per Induktion nach n zeigen, dass dies für alle M gilt, die von π^n annuliert werden, denn dadurch haben wir folgendes kommutative Diagramm mit Isomorphien in den Spalten. Dabei kommt der unterste vertikale Pfeil links von Bemerkung 2.2.13.

$$\begin{tikzcd}
W(F)_L \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[ddd] \\
\lim\limits_i W(F)_L \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_E/\pi^i(W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_E) \arrow[d] & \\
\lim\limits_i W(F)_L \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_E/\pi^i M_E \arrow[d] & \\
\lim\limits_i W(F)_L \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} (M/\pi^i M)_E \arrow[r] & \lim\limits_i M/\pi^i M
\end{tikzcd}$$

Wir erinnern, dass für den Beweis Satz 2.1.24 eine analoge Argumentation genutzt wurde.

I.A. $(n = 1)$ Proposition 2.2.8.

I.S. $(n \mapsto n+1)$ Sei M durch π^{n+1} annulliert. Der Funktor $W(F) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} (\cdot)_E$ ist nach Lemma 2.2.19 exakt. Also haben wir folgendes kommutative, exakte Diagramm und dann nach Fünfer-Lemma und Induktionsvoraussetzung unsere Behauptung.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} (\pi^n M)_E \arrow[r] \arrow[d] & W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M_E \arrow[r] \arrow[d] & W(F) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} (M/\pi^n M)_E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi^n M \arrow[r] & M \arrow[r] & M/\pi^n M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Sei jetzt wieder E beliebig und weiterhin $F := E^{perf}$. Wir erinnern daran, dass

$$G_E = \mathrm{Gal}(E^{sep}|E) = \mathrm{Gal}(\mathcal{E}^{nr}|\mathcal{E}) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}-alg}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}})$$

und

$$G_E = G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F) = \mathrm{Aut}_{W(F)_L-alg}(W(\overline{F})_L) \text{ ist.}$$

Im Folgenden gilt jede Aussage über $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ genauso über $W(\overline{F})_L$. Die einzige Ausnahme bildet Proposition 2.2.22.

Definition 2.2.20. Ein *etaler* (φ_L, G_E)-Modul über $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ ist ein etaler φ_L-Modul (M, φ_M) mit einer semilinearen G_E-Wirkung

$$\tau : G_E \times M \to M,$$

die stetig bezüglich der π-adischen Topologie auf M und der proendlichen Topologie auf G_E ist, so dass gilt, dass

$$\varphi_M(\sigma \cdot m) = \sigma \cdot (\varphi_M(m)) \text{ für alle } \sigma \in G_E,\ m \in M \text{ ist.}$$

Diese bilden eine Kategorie, wenn die Morphismen alle $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$-linearen Abbildungen sind, die sowohl mit den φ_M als auch den G_E-Wirkungen kommutieren.

Wir benötigen jetzt noch etwas topologische Vorbereitung.

Lemma 2.2.21. *Seien M_1 und M_2 zwei $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$-Moduln.*

i) Die natürliche Galoiswirkung

$$\rho : G_E \times \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$$

ist stetig bezüglich der π-adischen Topolgie auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$.

ii) Seien

$$\tau_i : G_E \times M_i \to M_i \text{ für } i = 1, 2$$

zwei semilineare Galoiswirkungen, so dass diese stetig bezüglich der π-adischen Topologie sind. Dann ist die Wirkung

$$\tau_1 \otimes \tau_2 : G_E \times M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2 \to M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2,$$

gegeben durch die Diagonalwirkung, stetig bezüglich der π-adischen Topologie auf $M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2$.

Beweis. Zu i). Sei $x + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ eine beliebige basisoffenene Menge von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$. Da

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{nr}} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$$

dicht ist, existiert ein $y \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{nr}}$ mit

$$x + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} = y + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}.$$

Sei also ohne Einschränkungen $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{nr}}$.

Sei jetzt $(\sigma, x_0) \in \rho^{-1}(x + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}})$ beliebig, dass heißt

$$\sigma(x_0) \in x + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}.$$

Sei nun $U \subset G_E$ die Fixgruppe von $\mathcal{E}(x)$. Diese ist in der proendlichen Topologie offen. Wir zeigen, dass

$$U\sigma \times x_0 + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \subset \rho^{-1}(x + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}) \text{ ist.}$$

Sei dafür $\tau \in U$. Dann rechnet man

$$\tau(\sigma(x_0 + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}})) = \tau(\sigma(x_0)) + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \subset \tau(x) + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} = x + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}.$$

Damit ist $\rho^{-1}(x + \pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}})$ offen, also ρ stetig.

Zu ii). Es gilt wegen Balanciertheit des Tensorprodukts

$$\pi^{2n}(M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2) = \pi^n M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} \pi^n M_2.$$

Sei also

$$\sum_i m_i \otimes n_i + \pi^n (M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2) \text{ mit } m_i \in M_1,\ n_i \in M_2$$

eine beliebige basisoffene Menge von $M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2$. Sei jetzt

$$(\sigma, \sum_j \tilde{m}_j \otimes \tilde{n}_j) \in (\tau_1 \otimes \tau_2)^{-1}(\sum_i m_i \otimes n_i + \pi^n (M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2)).$$

Dass heißt, es ist

$$\sum_j \sigma(\tilde{m}_j) \otimes \sigma(\tilde{n}_j) \in \sum_i m_i \otimes n_i + \pi^n (M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2).$$

Da τ_1 und τ_2 stetig sind bezüglich den π-adischen Topologien können wir offene Untergruppen $U_{j,i} \subset G_E$ wählen mit

$$U_{j,1}\sigma \times \{\tilde{m}_j\} \subset \tau_1^{-1}(\sigma(\tilde{m}_j) + \pi^{2n}M_1)$$

und $U_{j,2}$ analog.

Sei nun

$$U := \bigcap_{j,i} U_{j,i}.$$

Das ist als endlicher Schnitt offener Untergruppen selber eine offene Untergruppe. Ist jetzt $\tau \in U$, so rechnet man wegen der Semilinearität der G_E-Wirkung und Balanciertheit des Tensorprodukts

$$\begin{aligned}
&\tau(\sigma(\sum_j \tilde{m}_j \otimes \tilde{n}_j + \pi^n(M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2))) \\
&\subset \sum_j (\sigma(\tilde{m}_j) + \pi^{2n}M_1) \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} (\sigma(\tilde{n}_j) + \pi^{2n}M_2) + \pi^n(M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2) \\
&\subset \sum_j (\sigma(\tilde{m}_j) \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} \sigma(\tilde{n}_j) + \pi^n\sigma(\tilde{m}_j) \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} \pi^n M_2 + \pi^n M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} \pi^n\sigma(\tilde{n}_j)) + \pi^n(M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2) \\
&\subset \sum_i m_i \otimes n_i + \pi^n(M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2).
\end{aligned}$$

Demnach ist

$$U\sigma \times (\sum_j \tilde{m}_j \otimes \tilde{n}_j + \pi^n(M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2)) \subset (\tau_1 \otimes \tau_2)^{-1}(\sum_i m_i \otimes n_i + \pi^n(M_1 \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} M_2)).$$

Also ist $\tau_1 \otimes \tau_2$ stetig. □

Proposition 2.2.22. *Wir haben quasi-inverse Funktoren*

$$(M, \tau : G_E \times M \to M) \mapsto (M_{E^{sep}}, \tau_{|G_E \times M_{E^{sep}}})$$

und

$$(V, \tau : G_E \times V \to V) \mapsto (W(\overline{F})_L \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}{\otimes} V, \rho \otimes \tau)$$

zwischen der Kategorien der etalen (φ_L, G_E)-Moduln von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ und $W(\overline{F})_L$. Dabei ist $\rho : G_E \times W(\overline{F})_L \to W(\overline{F})_L$ die natürliche Galoiswirkung.

Beweis. Nach Satz 2.2.19 sind diese Konstruktionen als etale φ_L-Moduln invers und man überprüft leicht, dass die Isomorphismen

$$(W(\overline{F}) \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}}{\otimes} V)_{E^{sep}} \cong V$$

und

$$W(\overline{F}) \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}}{\otimes} M_{E^{sep}} \cong M$$

wegen Semilinearität auch mit den G_E-Wirkungen verträglich sind, sobald wir gezeigt haben, dass diese wohldefiniert sind.

Da ρ nach Lemma 2.2.21.i) und τ nach Voraussetzung stetig bzgl. der π-adischen Topologie sind, ist es nach Lemma 2.2.21.ii) auch $\rho \otimes \tau$. Da nach universeller Eigenschaft der maximalen unverzweigten Erweiterung ρ und φ_L kommutieren, kommutiert auch $\rho \otimes \tau$ mit $\varphi_L \otimes \varphi_V$, weil τ eine (φ_L, G_E)-Wirkung ist. Also ist $\rho \otimes \tau$ eine (φ_L, G_E)-Wirkung.

Um zu zeigen, dass $\tau_{|G_E \times M_{E^{sep}}}$ eine wohldefinierte Wirkung ist, genügt es nach Proposition 2.2.17 zu zeigen, dass $\sigma(M_{E^{sep}})$ für jedes $\sigma \in G_E$ ein etaler φ_L-Modul über $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ ist, denn dann ist $\sigma(M_{E^{sep}}) \subset M_{E^{sep}}$ nach der Maximalität von $M_{E^{sep}}$. Da σ bijektiv auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ ist, ist $\sigma(M_{E^{sep}})$ wegen σ-Semilinearität auch ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$-Modul. Da

$$\varphi_M(\sigma(M_{E^{sep}})) = \sigma(\varphi_M(M_{E^{sep}})) \subset \sigma(M_{E^{sep}}) \text{ ist,}$$

ist $\sigma(M_{E^{sep}})$ ein φ_L-Modul. Die Etalheit folgt jetzt aus Proposition 2.1.18 und der Rechnung

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \cdot \varphi_M(\sigma(M_{E^{sep}})) = \sigma(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}})\sigma(\varphi_M(M_{E^{sep}})) = \sigma(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \cdot \varphi_M(M_{E^{sep}})) = \sigma(M_{E^{sep}}).$$

Die erste Gleichheit kommt daher, dass σ bijektiv auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ ist und weil σ mit φ_M vertauscht, die zweite Gleichheit kommt von der σ-Semilinearität und die letzte Gleichheit folgt aus der Etalheit von $(M_{E^{sep}}, \varphi_M)$ über $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$.

$\tau_{|G_E \times M_{E^{sep}}}$ ist stetig bezüglich der π-adischen Topologie von $M_{E^{sep}}$, weil diese nach Bemerkung 2.2.13 gleich der Teilraumtopologie der π-adischen Topologie von M ist, zusammen mit Lemma 2.1.21.

Dass es immer noch mit der Einschränkung von φ_M kommutiert, ist klar. Demnach ist $\tau_{|G_E \times M_{E^{sep}}}$ eine (φ_L, G_E)-Wirkung.

Da $V \subset W(\overline{F}) \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}}{\otimes} V$ das Bild $(W(\overline{F}) \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}}{\otimes} V)_{E^{sep}}$ hat und wegen der Semilinearität sind die Konstruktionen der G_E-Wirkungen auch invers zueinander. □

Proposition 2.2.23. *$M \mapsto M^{G_E}$ induziert eine Kategorienäquivalenz zwischen den etalen (φ_L, G_E)-Moduln über $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}$ und der Kategorie der etalen φ_L-Moduln über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Ein (quasi-)äquivalenter Funktor ist dabei gegeben durch die Skalarerweiterung*

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \cdot$$

Beweis. Nach Satz 2.1.22.iii) ist die natürliche Abbildung

$$\alpha : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M^{G_E} \to M$$

ein Isomorphismus, der wegen Semilinearität auch ein Morphismus in der Kategorie der (φ_L, G_E)-Moduln ist. Außerdem ist M^{G_E} endlich erzeugt mit gleichen Elementarteilern wie M wieder nach Satz 2.1.22.iii). Da φ_M mit den Wirkungen der $\sigma \in G_E$ kommutiert, ist M^{G_E} φ_M-invariant.

Etalheit von M^{G_E} kann nach Lemma 2.1.11 modulo πM^{G_E} gezeigt werden. Demnach können wir nach Exaktheit von $(\cdot)^{G_E}$ (Siehe Bri09, Lemma 3.2.6) also oBdA die Linearisierung auf M^{G_E} für M mit $\pi M = 0$ betrachten. Aber die Linearisierung

$$\varphi_M^{lin} : E \underset{\varphi, E}{\otimes} M^{G_E} \to M^{G_E}$$

ist die Einschränkung der Linearisierung von φ_M auf M. Beachte, dass diese Einschränkung Sinn ergibt, weil das φ auf E die Einschränkung des φ auf E^{sep} ist. Demnach ist φ_M^{lin} auch injektiv als Einschränkung einer injektiven Abbildung und somit bijektiv wegen gleicher endlicher Dimension. Demnach ist M^{G_E} ein etaler φ_L-Modul über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Umgekehrt ist für einen beliebigen solchen Modul V ausgestattet mit der trivialen G_E-Wirkung τ_{triv}

$$(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} V, \varphi_L \otimes \varphi_V, \rho \otimes \tau_{triv})$$

ein etaler (φ_L, G_E)-Modul. Das es ohne G_E-Wirkung ein etaler φ_L-Modul ist, folgt aus Beispiel 2.1.19.i). Außerdem ist $\rho \otimes \tau_{triv}$ stetig nach Lemma 2.2.21.ii), weil ρ nach Lemma 2.2.21.i) und τ_{triv} trivialerweise stetig sind. Es muss also noch gezeigt werden, dass $\varphi_L \otimes \varphi_V$ mit $\rho \otimes \tau_{triv}$ kommutiert. Das gilt aber, weil nach universeller Eigenschaft der maximal unverzweigten Erweiterung φ_L mit ρ kommutiert und τ_{triv} trivial ist.

Wir haben außerdem

$$V \subset (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} V)^{G_E}$$

wegen Trivialität der G_E-Wirkung auf V und wegen

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}^{G_E} \supset \mathcal{O}_{\mathcal{E}}.$$

Nach Lemma 2.1.11 genügt es wieder Gleichheit modulo π zu prüfen. Dort gilt aber Dimensionsgleichheit, weil V und $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} V)^{G_E}$ gleiche Elementarteiler haben. Da $(\cdot)^{G_E}$ gleichzeitig exakt ist (Siehe Bri09, Lemma 3.2.6), ist die Inklusion modulo π immer noch injektiv, denn diese wird zur Inklusion

$$V/\pi V \subset (E^{sep} \underset{E}{\otimes} V/\pi V)^{G_E}.$$

Insgesamt haben wir also Gleichheit.

Demnach sind die Modul-Konstruktionen invers zueinander. Die G_E-Wirkungs- und φ-Konstruktionen sind aber auch invers, denn das funktioniert genau wie im Beweis zu Proposition 2.2.22, unter Berücksichtigung, dass die G_E-Wirkung von M auf M^{G_E} trivial ist. □

Jetzt können wir Satz 2.2.19 für allgemeine E beweisen.

Theorem 2.2.24. *Die Skalarerweiterung*

$$V \mapsto W(F)_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} V$$

definiert eine Kategorienäquivalenz zwischen etalen φ_L-Moduln von $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ und $W(F)_L$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $G_E\Phi^{et}_R$ die Kategorie etaler (φ_L, G_E)-Moduln über R. Wir haben folgendes bis auf natürliche Isomorphie kommutierende Diagramm von Funktoren.

$$\begin{tikzcd}
G_E\Phi^{et}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}} \arrow[rr, "W(\overline{F})_L \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}}{\otimes} \cdot"] & & G_E\Phi^{et}_{W(\overline{F})_L} \\
\Phi^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \arrow[u, "\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \cdot"] \arrow[rr, "W(F)_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \cdot"'] & & \Phi^{et}_{W(F)_L} \arrow[u, "W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} \cdot"']
\end{tikzcd}$$

Da die oberen drei Funktoren nach Propostion 2.2.22 und 2.2.23 Kategorienäquivalenzen sind, gilt das also auch für die untere. □

Bemerkung. Beachte, dass wir die Bedingung, dass $E = E^{sep}$ nur für die Existenz von Proposition 2.2.15 gebraucht haben. Finden wir also für ein beliebiges E ein $M_E^{(x)}$ aus Definition 2.2.12 das φ_M-invariant ist, so gibt uns dass auch einen Abstieg von $W(F)_L$ nach $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, der einen inversen Funktor zur Skalarerweiterung $W(F)_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \cdot$ beschreibt.

Proposition 2.2.25. *Sei M in $\Phi^{et}_{W(F)_L}$, so haben wir eine Einbettung*

$$((W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}})^{G_E} \xrightarrow{j} M.$$

Das Bild von j ist von der Form $M_E^{(x)}$ aus Definition 2.2.12 und dieser ist invariant unter φ_M.

Beweis. Man überlegt sich nach Definition von G_E-Invarianten, dass

$((W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}})^{G_E} = (W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)^{G_E} \cap (W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}}$ ist.

Da nach Proposition 2.2.23

$$(W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)^{G_E} = M \text{ ist,}$$

lässt sich $((W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}})^{G_E}$ in natürlicher Weise als Teilraum von M über

$$j : ((W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}})^{G_E} \to M$$

einbetten. Dabei ist nach der obigen Gleichheit von Proposition 2.2.23

$$j^{-1} : \mathrm{im}(j) \to ((W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}})^{G_E}, m \mapsto 1 \otimes m.$$

Da $\varphi_L(1) = 1$ ist und

$$\varphi_{((W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}})^{G_E}}$$

gegeben ist durch einschränken von $\varphi_L \otimes \varphi_M$, ist es nach Einbettung in M auch durch einschränken von φ_M gegeben.

Jetzt muss also nur noch gezeigt werden, dass $\mathrm{im}(j) = M_E^{(x)}$ ist für ein geeignetes x. Wir zeigen dafür zunächst, dass die natürliche Abbildung

$$W(F)_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} \to M$$

gegeben durch die Multiplikation bijektiv ist. Nach dem Diagramm von Theorem 2.2.24 ist die natürliche Abbildung

$$W(\overline{F})_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} ((W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}})^{G_E} \to W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M$$

gegeben durch die Multiplikation bijektiv. Wir haben außerdem das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
W(\overline{F})_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} ((W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M)_{E^{sep}})^{G_E} \arrow[r, "\mu"] & W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M \\
W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} W(F)_L \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathrm{im}(j) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] \arrow[u, "\mu \otimes j^{-1}"] & W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} M \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist μ die Multiplikation und es gilt die gewünschte Bijektivität, weil alle Pfeile in dem Diagramm bijektiv sind und die Einbettung

$$W(F)_L \to W(\overline{F})_L$$

treu-flach ist (Siehe Mat86, Theorem 7.2). Durch diese Isomorphie bekommen wir modulo π die Einbettung

$$\mathrm{im}(j)/\pi\,\mathrm{im}(j) \to F \underset{E}{\otimes} \mathrm{im}(j)/\pi\,\mathrm{im}(j) \cong M/\pi M.$$

Diese ist gegeben durch

$$[m]_{\pi\,\mathrm{im}(j)} \mapsto 1 \otimes [m]_{\pi\,\mathrm{im}(j)} \to 1 \cdot [m]_{\pi M}.$$

Da $\mathrm{im}(j)/\pi\,\mathrm{im}(j)$ ein etaler φ_L-Modul ist, gilt für diese Inklusion nach Maximalität von Proposition 2.2.8

$$\mathrm{im}(j)/\pi\,\mathrm{im}(j) \subset (M/\pi M)_E.$$

Da beide die gleiche E-Dimension haben gilt für diese Inklusion schon Gleichheit. Nach Proposition 1.1.9 können wir jetzt eine E-Basis von

$$\mathrm{im}(j)/\pi\,\mathrm{im}(j) = (M/\pi M)_E$$

zu einem $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Erzeugendensystem x von $\mathrm{im}(j)$ liften. Für dieses x gilt dann nach Definition 2.2.12

$$\mathrm{im}(j) = M_E^{(x)}.$$

$\square$

Wir wollen ausserdem die Verbindung zu den G_E-Darstellungen über o herstellen.

Satz 2.2.26. *Sei V in $Rep_o(G_E)$. Dann induziert die Skalarerweiterung*

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{o}{\otimes} \cdot$$

eine Kategorienäquivalenz zur Kategorie $G_E\Phi^{et}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}$ und ein quasi-inverser Funktor ist gegeben durch

$$M \mapsto M^{\varphi_M = \mathrm{id}}.$$

Beweis. Da φ_M mit der G_E-Wirkung kommutiert, lässt die Wirkung $M^{\varphi_M = \mathrm{id}}$ invariant.

Sei M in $\Phi^{et}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}$. Wir zeigen nun, dass $M^{\varphi_M = \mathrm{id}}$ über o endlich erzeugt ist. Wir finden wie im Beweis von der Existenz von Proposition 2.2.15 ein Erzeugendensystem $x := (x_1, \ldots, x_n)$ von M über $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$, so dass

$$\varphi_M(x) = x$$

und $x \mod \pi M$ eine k-Basis von $(M/\pi M)^{\varphi_M = \mathrm{id}}$ ist. Beachte dabei, dass die Polynome die wir lösen mussten separabel waren und somit Nullstellen in E^{sep} haben. Wir schreiben nun

$$M_o := \langle x_1 \ldots, x_n \rangle$$

für das o-Erzeugnis von x. Da φ_L ein o-Algebrenmorphismus ist, gilt

$$M_o \subset M^{\varphi_M = \mathrm{id}}.$$

Wir zeigen nun, dass diese Inklusion eine Gleichheit ist. Wir zeigen dafür zunächst, dass

$$\varphi_M - \mathrm{id} : M \to M$$

surjektiv ist. Nach Lemma 2.2.11 genügt es dies modulo π zu überprüfen. Dort haben wir nach Satz 2.2.10 die folgende Isomorphie.

$$(E^{sep} \bigotimes_k (M/\pi M)^{\varphi_M = \mathrm{id}}, \varphi - \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \cong (M/\pi M, \varphi_M - \mathrm{id})$$

Dabei ist $\varphi : E^{sep} \to E^{sep}$ das q-Potenzieren. Demnach genügt es zu zeigen, dass

$$\varphi - \mathrm{id} : E^{sep} \to E^{sep}$$

surjektiv ist. Das gilt, weil die Surjektivität äquivalent ist dazu Lösungen für die separablen Polynome

$$X^q - X - a \text{ für alle } a \in E^{sep}$$

in E^{sep} zu finden.

Nach dem Schlangenlemma ist wegen der eben gezeigten Surjektivität $M \mapsto M^{\varphi_M = \mathrm{id}}$ exakt. Demnach haben wir die exakte Sequenz

$$M^{\varphi_M = \mathrm{id}} \xrightarrow{\pi^n \cdot} M^{\varphi_M = \mathrm{id}} \to (M/\pi^n M)^{\varphi_M = \mathrm{id}} \to 0.$$

Deshalb gilt

$$\pi^n M^{\varphi_M = \mathrm{id}} = \pi^n M \cap M^{\varphi_M = \mathrm{id}} = (\pi^n M)^{\varphi_M = \mathrm{id}}.$$

Deshalb ist die π-adische Topologie auf $M^{\varphi_M=\mathrm{id}}$ die Teilraumtopologie der π-adischen Topologie auf M. Außerdem haben wir damit und wegen der Exaktheit von $M \mapsto M^{\varphi_M=\mathrm{id}}$ die Gleichheiten

$$M^{\varphi_M=\mathrm{id}}/\pi M \cap M^{\varphi_M=\mathrm{id}} = M^{\varphi_M=\mathrm{id}}/(\pi M)^{\varphi_M=\mathrm{id}} = (M/\pi M)^{\varphi_M=\mathrm{id}}.$$

Damit gilt

$$\mathrm{pr}(M^{\varphi_M=\mathrm{id}}) = (M/\pi M)^{\varphi_M=\mathrm{id}} = \mathrm{pr}(M_o).$$

Sei jetzt $x \in M^{\varphi_M=\mathrm{id}}$ beliebig. Nach der letzten gezeigten Gleichheit finden wir ein $x_0 \in M_o$ mit

$$x = x_0 + \pi y_0 \text{ für ein } \pi y_0 \in \pi M \cap M^{\varphi_M=\mathrm{id}} = \pi M^{\varphi_M=\mathrm{id}}.$$

Demnach ist $y_0 \in M^{\varphi_M=\mathrm{id}}$. Sukzessive und weil M_o als endlich erzeugter Modul eines π-adisch vollständigen Ringes selber π-adisch vollständig ist bekommen wir

$$x = \sum_n \pi^n x_n \in M_o.$$

Somit ist

$$M^{\varphi_M=\mathrm{id}} = M_o$$

endlich erzeugt über o. Nach Lemma 2.1.21 ist $M^{\varphi_M=\mathrm{id}}$ in $Rep_o(G_E)$.

Da x ein Erzeugendensystem von $M^{\varphi_M=\mathrm{id}}$ und M über den jeweiligen Ringen ist, ist die natürliche Abbildung

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{o}{\otimes} M^{\varphi_M=\mathrm{id}} \to M \text{ surjektiv.}$$

Da $x \mod \pi M$ sowohl eine k-Basis von $(M/\pi M)^{\varphi_M=\mathrm{id}}$ als auch eine E^{sep}-Basis von $M/\pi M$ darstellt ist x für beide Moduln ein minimales Erzeugendensystem. Also haben beide die gleichen Elementarteiler. Demnach zeigt man wie im Beweis von Proposition 2.1.18, dass die natürliche Abbildung oben schon bijektiv ist.

Sei jetzt V in $Rep_o(G_E)$. Nach Beispiel 2.1.19.i) ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{o}{\otimes} V$ in $\Phi^{et}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}}$. Beachte dabei, dass man (V, id_V) als etalen id_o-semilinearen Modul auffassen kann. Wir haben wegen $o \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}^{\varphi_L=\mathrm{id}}$ die Inklusion

$$V \subset (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{o}{\otimes} V)^{\varphi_L \otimes \mathrm{id}_V=\mathrm{id}}.$$

Da $M \mapsto M^{\varphi_M=\mathrm{id}}$ exakt ist geht das modulo π zur Inklusion

$$V/\pi V \subset (E^{sep} \underset{k}{\otimes} V/\pi V)^{\varphi \otimes \mathrm{id}_V=\mathrm{id}} \text{ über.}$$

Nach Satz 2.2.10 ist diese Inklusion eine Gleichheit, also gilt nach Lemma 2.1.11 auch

$$V = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{o}{\otimes} V)^{\varphi_L \otimes \mathrm{id}_V = \mathrm{id}}.$$

Nach G_E-Semilinearität sind die Konstruktionen der G_E-Wirkungen

$$\tau \mapsto \rho \otimes \tau \text{ und } \tau \mapsto \tau_{|M^{\varphi_M = \mathrm{id}}}$$

auch invers zueinander. □

Zusammengefasst haben wir folgendes bis auf natürliche Isomorphie kommutative Diagramm von Kategorienäquivalenzen.

$$\begin{tikzcd}
 & G_E\Phi^{et}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}} \arrow[dl, shift left, "(\cdot)^{\varphi=\mathrm{id}}"] \arrow[r, shift left, "W(\overline{F})_L \underset{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}}}{\otimes} \cdot"] \arrow[dd, shift left, "(\cdot)^{G_E}"] & G_E\Phi^{et}_{W(\overline{F})_L} \arrow[l, shift left, "(\cdot)_{E^{sep}}"] \arrow[dd, shift left, "(\cdot)^{G_E}"] \\
Rep_o(G_E) \arrow[ur, shift left, "\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}} \underset{o}{\otimes} \cdot"] \arrow[dr, shift right, "\mathbf{V}_{\mathcal{E}}"'] & & \\
 & \Phi^{et}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \arrow[ul, shift right, "\mathbf{D}_{\mathcal{E}}"'] \arrow[uu, shift left, "\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{nr}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \cdot"] \arrow[r, shift left, "W(F)_L \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \cdot"] & \Phi^{et}_{W(F)_L} \arrow[l, shift left, "(\cdot)_E"] \arrow[uu, shift left, "W(\overline{F})_L \underset{W(F)_L}{\otimes} \cdot"]
\end{tikzcd}$$

3 Die (φ_L, Γ_L)-Moduln

Wir fixieren jetzt für die restliche Arbeit einen algebraischen Abschluss $\overline{L}$ von L. Kommen wir jetzt zu der Untersuchung der Gruppe $G_L := \mathrm{Gal}(\overline{L}|L)$. Wir wollen dabei auf Kapitel zwei zurückgreifen. Dabei konstruieren wir zunächst einen Körper $\mathbb{E}_L$ der Charakteristik p, auf dem wir eine G_L-Wirkung, bzw. mehr noch, eine Wirkung einer gewissen Faktorgruppe Γ_L bekommen.

Anschließend konstruieren wir ohne Nutzung des Auswahlaxioms einen vollständigen diskreten Bewertungsring $\mathcal{A}_L$ mit Uniformisierer π und Restklassenkörper $\mathbb{E}_L$. Im zweiten Abschnitt der Konstruktionen sehen wir dann, dass die π-adische Topologie auf $\mathcal{A}_L$ für unsere Zwecke nicht mehr gut genug ist, weil die natürliche Γ_L-Wirkung die wir dort bekommen nicht mehr stetig ist bezüglich dieser Topologie. Wir fangen dann eine schwache Topologie für diesen Ring einzuführen und für verzweigte Wittvektoren.

Im zweiten Teil werden wir dann die (φ_L, Γ_L)-Moduln über $\mathcal{A}_L$ einführen und ein paar grundlegende Aussagen treffen. Danach werden wir uns daran machen, die Aussagen aus Kapitel zwei für die (φ_L, Γ_L)-Moduln zu übertragen.

3.1 Die Konstruktionen

3.1.1 Perfektoide Körper

Wir fangen an den gewünschten Körper $\mathbb{E}_L$ zu konstruieren. Wir gehen dabei nach (Sch16, §1.4) vor und besprechen kurz das wichtigste aus der Theorie der perfektoiden Körper. Davor sei angemerkt, dass der Leser sich mit der Theorie der formalen Lubin-Tate Gruppengesetze wie in (Sch16, §1.3) auseinander setzen sollte. Wir notieren als erstes die für uns benötigten Ergebnisse dieser Theorie.

Definition 3.1.1. i) Sei R ein kommutativer Ring. Wir bezeichnen mit

$$R[[X]] := \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mid a_n \in R\}$$

den *Ring der formalen Potenzreihen* über R.

ii) Eine *Frobenius formale Potenzreihe* zu π ist ein $\phi(X) \in o[[X]]$, mit

$$\phi(X) = \pi X + \sum_{n=2}^{\infty} a_n X^n, \; a_n \in o \text{ und } \phi(X) \equiv X^q \mod \pi o[[X]].$$

Sei $\mathfrak{m}_{\overline{L}}$ das maximale Ideal in dem Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_{\overline{L}}$ von $\overline{L}$. Wir bezeichnen mit

$$o \times \mathfrak{m}_{\overline{L}} \to \mathfrak{m}_{\overline{L}}, (a, x) \mapsto [a]_\phi(x)$$

die o-Modulstruktur von $\mathfrak{m}_{\overline{L}}$ gegeben durch den Ringmorphismus aus (Sch16, Proposition 1.3.6) für eine gegebene Frobenius formale Potenzreihe ϕ zu π.

Definition 3.1.2.

i) Wir schreiben $\mathcal{F}_n := \ker([\pi^n]_\phi \cdot)$ für den n-ten *Lubin-Tate-Modul.*

ii) Wir schreiben $L_n := L(\mathcal{F}_n)$ für die n-te *Lubin-Tate-Erweiterung* über L.

iii) Wir bezeichnen mit $L_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ für die *Lubin-Tate-Erweiterung* von L.

Lemma 3.1.3. *$\mathcal{F}_n$ ist ein freier $o/\pi^n o$-Modul von Rang 1.*

Beweis. (Siehe Sch16, Proposition 1.3.10) □

Bemerkung. L_n und L_∞ hängen als Teilmengen von $\overline{L}$ nur von π aber nicht von ϕ ab.

Beweis. (Siehe Sch16, Remark 1.3.8) □

Mit π als Primelement von o und dem algebraischen Abschluss $\overline{L}$ haben wir jetzt also L_∞ fixiert. Siehe im Text nach (Sch16, Corollar 1.3.11), dass $L_\infty|L$ galoisch ist.

Wir bezeichnen ab jetzt

$$H_L := \mathrm{Gal}(\overline{L}|L_\infty) \text{ und } \Gamma_L := G_L/H_L = \mathrm{Gal}(L_\infty|L)$$

für die entsprechenden Galoisgruppen.

Satz 3.1.4. *$L_\infty|L$ ist total verzweigt, in dem Sinne, dass L_∞ auch den Restklassenkörper k hat. Außerdem haben wir einen topologischen Gruppenisomorphismus*

$$\chi : \Gamma_L \to o^\times.$$

Beweis. (Siehe Sch16, Proposition 1.3.12) □

Es gilt

$$\overline{L} = \overline{\mathbb{Q}_p}.$$

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{C}_p := \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

die Vervollständigung von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ bezüglich der eindeutigen Fortsetzung der π-adischen Topologie von L (Siehe Ser79, II.§2). Das ist auch die eindeutige Fortsetzung der p-adischen Topologie auf $\mathbb{Q}_p$. Kommen wir jetzt zur Definition der perfektoiden Körper.

Definition 3.1.5. Ein Zwischenkörper K mit $L \subset K \subset \mathbb{C}_p$ heißt *perfektoid*, falls er die folgenden Eigenschaften erfüllt.

i) K ist vollständig bezüglich des Absolutbetrages auf $\mathbb{C}_p$.

ii) $|K^\times|$ liegt dicht in $\mathbb{R}_{>0}$.

iii) Für den Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_K$ von K gilt

$$(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)^p = \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K.$$

Wir kommen nun zu den beiden wichtigen perfektoiden Körpern für uns.

Beispiel 3.1.6. Die beiden folgenden Körper sind perfektoid.

i) $\mathbb{C}_p$

ii) $\hat{L}_\infty$

Beweis. Für ii) siehe (Sch16, Proposition 1.4.12).

Für i) haben wir nach Definition, dass $\mathbb{C}_p$ vollständig ist. Da

$$|\hat{L}_\infty^\times| \subset |\mathbb{C}_p^\times| \text{ ist,}$$

liegt auch $|\mathbb{C}_p^\times|$ dicht in $\mathbb{R}_{>0}$. Da $\mathbb{C}_p$ nach (Sch16, Remark 1.4.1) algebraisch abgeschlossen ist, gilt auch

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})^p = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}.$$

□

Wir benötigen nun die folgende Konstruktion aus den perfektoiden Körpern.

Definition 3.1.7. Sei $\varpi \in \mathcal{O}_K$ ein Element mit $1 > |\varpi| \geq |\pi|$. Wir definieren

$$\mathcal{O}_{K^\flat} := \lim(\ldots \xrightarrow{(\cdot)^q} \mathcal{O}_K/\varpi\mathcal{O}_K \xrightarrow{(\cdot)^q} \mathcal{O}_K/\varpi\mathcal{O}_K \xrightarrow{(\cdot)^q} \ldots \xrightarrow{(\cdot)^q} \mathcal{O}_K/\varpi\mathcal{O}_K).$$

Da $(\cdot)^q$ ein k-Algebrenmorphismus ist, ist $\mathcal{O}_{K^\flat}$ als projektiver Limes von solchen Morphismen selber eine k-Algebra.

Bemerkung. Nach (Sch16, Remark 1.4.4) ist $\mathcal{O}_{K^\flat}$ eine perfekte k-Algebra, in dem Sinne, dass

$$(\cdot)^q : \mathcal{O}_{K^\flat} \to \mathcal{O}_{K^\flat}$$

bijektiv ist.

Sei $\alpha = (\ldots, \alpha_1, \alpha_0) \in \mathcal{O}_{K^\flat}$ beliebig. Wähle ein $a_n \in \mathcal{O}_K$, so dass $\alpha_i = a_i \mod \varpi\mathcal{O}_K$ ist. Mit einer Verallgemeinerung von (Sch16, Lemma 1.1.1) gilt wegen

$$a_{i+1}^q \equiv a_i \mod \varpi\mathcal{O}_K$$

die Identität

$$a_{i+1}^{q^{i+1}} \equiv a_i^{q^i} \mod \varpi^{q^{i+1}}\mathcal{O}_K.$$

Demnach ist der Limes

$$\alpha^\sharp := \lim a_i^{q_i}$$

wohldefiniert, denn mit einer weiteren Anwendung von (Sch16, Lemma 1.1.1) erhalten wir, dass es unabhängig von den Wahlen der Urbilder von α_i ist.

Lemma 3.1.8. *Wir haben zueinander inverse, multiplikative Bijektionen*

$$\lim_{(\cdot)^q} \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_{K^\flat}$$
$$(\ldots, a_i, \ldots, a_0) \mapsto (\ldots, a_i \mod \varpi\mathcal{O}_K, \ldots, a_0 \mod \varpi\mathcal{O}_K)$$
$$(\ldots, (\alpha^{\frac{1}{q^i}})^\sharp, \ldots, \alpha^\sharp) \leftarrow\!\shortmid \alpha.$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}_{K^\flat}$ unabhängig von der Wahl von ϖ.

Beweis. (Siehe Sch16, Lemma 1.4.5) □

Wir schreiben nun auf, wie $\mathcal{O}_{K^\flat}$ ein vollständiger nicht-archimedisch bewerteter lokaler Integritätsring mit demselben Restklassenkörper wie K wird.

Proposition 3.1.9. *Wir haben einen nicht-archimedischen Absolutbetrag auf $\mathcal{O}_{K^\flat}$ durch*

$$|\cdot|_\flat : \mathcal{O}_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{>0}, \alpha \mapsto |\alpha^\sharp|.$$

Dieser erfüllt die folgenden Eigenschaften.

i) $|\mathcal{O}_{K^\flat}|_\flat = |\mathcal{O}_K|$

ii) $\alpha\mathcal{O}_{K^\flat} \subset \beta\mathcal{O}_{K^\flat} \Leftrightarrow |\alpha|_\flat \leq |\beta|_\flat$.

iii) $\mathfrak{m}_{K^\flat} := \{\alpha \in \mathcal{O}_{K^\flat} \mid |\alpha|_\flat < 1\}$ *ist das einzige maximale Ideal von* $\mathcal{O}_{K^\flat}$.

iv) Sei $\varpi_\flat \in \mathcal{O}_{K^\flat}$ ein Element mit

$$|\varpi_\flat|_\flat = |\varpi|.$$

Beachte, dass dies nach i) immer existiert. Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{O}_{K^\flat}/\varpi_\flat\mathcal{O}_{K^\flat} \to \mathcal{O}_K/\varpi\mathcal{O}_K, \alpha \mapsto \alpha_0$$

ein Isomorphismus von Ringen. Insbesondere gilt

$$\mathcal{O}_{K^\flat}/\mathfrak{m}_{K^\flat} \cong \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K.$$

Beweis. (Siehe Sch16, Lemma 1.4.6) □

Wir schreiben
$$K^\flat := Quot(\mathcal{O}_{K^\flat})$$
für den Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{K^\flat}$.

Proposition 3.1.10. *$K^\flat$ ist ein perfekter, nicht-archimedisch bewerteter vollständiger Körper von Charakteristik p. Wir nennen ihn den* Tilt *von K.*

Beweis. (Siehe Sch16, Proposition 1.4.7) □

Lemma 3.1.11. *Wir haben eine natürliche topologische Inklusion*
$$\hat{L}_\infty^\flat \subset \mathbb{C}_p^\flat.$$

Beweis. (Angelehnt an Sch16, Seite 38)
Setze $\varpi := \pi$. Es gilt
$$(*)\ \mathcal{O}_{\hat{L}_\infty} \cap \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \pi\mathcal{O}_{\hat{L}_\infty}.$$
Also haben wir die Inklusion
$$\mathcal{O}_{\hat{L}_\infty}/\pi\mathcal{O}_{\hat{L}_\infty} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}.$$
Nach Definition von $\mathcal{O}_{K^\flat}$ gilt also
$$\hat{L}_\infty^\flat \subset \mathbb{C}_p^\flat.$$
Wieder wegen $(*)$ zusammen mit der Tatsache, dass der Absolutbetrag auf $\mathbb{C}_p$ den Absolutbetrag auf $\hat{L}_\infty$ induziert gilt, dass das $(\cdot)^\sharp$ auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ das $(\cdot)^\sharp$ auf $\mathcal{O}_{\hat{L}_\infty^\flat}$ induziert. Damit induziert aber auch der Absolutbetrag auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ den auf $\mathcal{O}_{\hat{L}_\infty^\flat}$. Das setzt sich auf die Quotientenkörper fort und somit ist die Inklusion topologisch. □

Wir definieren nun eine G_L-Wirkung auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ durch
$$G_L \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat},\ (\sigma, (\ldots, a_0 \mod \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})) \mapsto (\ldots, \sigma(a_0) \mod \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}).$$
Dies ist wohldefiniert, weil $\sigma(x) \in \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ist genau dann wenn $x \in \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ist.

Bemerkung. Diese Wirkung ist zusätzlich stetig bezüglich $|\cdot|_\flat$, denn im Beweis von (Sch16, Proposition 1.4.7) sehen wir, dass diese Topologie gleich der projektiven Limes Topologie auf
$$\lim_{(\cdot)^q} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

ist, wobei jedes $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ die diskrete Topologie trägt. Mit der gleichen Methode wie Lemma 2.2.21.i) zeigen wir, dass die Wirkung auf jedem einzelnen $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ stetig ist. Beachte dabei, dass die π-adische Topologie auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ die diskrete Topologie auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ induziert.

Sei nun $(x_0, x_1, \dots) \in \lim\limits_{(\cdot)^q} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ beliebig. Sei also

$$\{x_0\} \times \dots \times \{x_n\} \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \times \dots$$

eine beliebige offene Basisumgebung von $(x_0, x_1, \dots)$. Sei $(\sigma, (y_0, y_1, \dots))$ ein beliebiger Punkt im Urbild von dieser Basisoffenen Menge unter der Wirkung. Das heißt also

$$\sigma(y_i) = x_i \text{ für alle } i = 0, \dots, n$$

Wähle nun offene Untergruppen $U_i \subset G_L$, so dass $U\sigma \times \{y_i\}$ im Urbild von $\{x_i\}$ unter der Wirkung für alle $i = 0, \dots, n$ ist. Dann ist

$$U := \bigcap_{i=0}^{n} U_i$$

immer noch eine offene Untergruppe und es ist

$$U\sigma \times (\{y_0\} \times \dots \times \{y_n\} \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \times \dots)$$

im Urbild der gewünschten Basisoffenen Menge unter der Wirkung. Demnach ist die Wirkung stetig auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ und und setzt sich fort zu einer G_L-Wirkung auf $\mathbb{C}_p^\flat$, wieder weil $\sigma(x) \in \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ist genau dann wenn $x \in \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ist. Nach (Sch16, Lemma 1.4.13) ist diese Wirkung auch stetig. Da σ die Abbildung $(\cdot)^\sharp$ und den Absolutbetrag auf $\mathbb{C}_p$ erhält, respektiert es auch $|\cdot|_\flat$.

Da H_L den Körper $\hat{L}_\infty$ fixiert, fixiert es auch $\hat{L}_\infty^\flat$. Demnach bekommen wir so eine Wirkung

$$\Gamma_L \times \hat{L}_\infty^\flat \to \hat{L}_\infty^\flat.$$

Nach Lemma 2.1.21 und 3.1.11 ist diese Wirkung immer noch stetig. Beachte, dass die Quotiententopologie auf Γ_L mit der proendlichen Topologie übereinstimmt. Kommen wir jetzt zu der Konstruktion von $\mathbb{E}_L$. Sei dafür

$$T := \lim(\dots \overset{[\pi]_\phi}{\to} \mathcal{F}_{n+1} \overset{[\pi]_\phi}{\to} \mathcal{F}_n \overset{[\pi]_\phi}{\to} \dots \overset{[\pi]_\phi}{\to} \mathcal{F}_1).$$

Nach Lemma 3.1.3 ist T ein freier o-Modul vom Rang 1. Wegen

$$\phi(X) \equiv X^q \mod \pi o[[X]]$$

ist die folgende Abbildung wohldefiniert.

$$\iota : T \to \mathcal{O}_{\hat{L}_\infty^\flat}, (y_n)_{n\geq 1} \mapsto (\dots, y_n \mod \pi\mathcal{O}_{\hat{L}_\infty}, \dots, y_1 \mod \pi\mathcal{O}_{\hat{L}_\infty}, 0)$$

Sei jetzt $t \in T$ ein o-Erzeuger von T. Wir schreiben $\omega := \iota(t)$.

Lemma 3.1.12. *Es ist* $|\omega|_\flat = |\pi|^{\frac{q}{q-1}} < 1$.

Beweis. (Siehe Sch16, Lemma 1.4.14) $\square$

Nach Lemma 3.1.12 ist

$$j_\omega : k[[X]] \to \mathcal{O}_{\hat{L}^\flat_\infty}, f(X) \mapsto f(\omega)$$

ein wohldefinierter, injektiver Ringmorphismus. Demnach setzt dieser sich fort zu einem Ringmorphismus

$$j_\omega : k((X)) := Quot(k[[X]]) \to \hat{L}^\flat_\infty.$$

Definition 3.1.13. Wir definieren

$$\mathbb{E}_L := \mathrm{im}(j_\omega).$$

Proposition 3.1.14. *Für* $\mathbb{E}_L$ *gelten die folgenden Eigenschaften.*

i) Die Γ_L*-Aktion auf* $\hat{L}^\flat_\infty$ *lässt* $\mathbb{E}_L$ *invariant.*

ii) $\mathbb{E}_L$ *ist unabhängig von der Wahl des Erzeugers* $t \in T$.

Beweis. (Siehe Sch16, Lemma 1.4.15) $\square$

Wir schließen diesen Teil jetzt ab, indem wir die Galoisgruppen H_L und $G_{\mathbb{E}_L} := \mathrm{Gal}(\mathbb{E}_L^{sep}|\mathbb{E}_L)$ miteinander identifizieren und somit einen wichtigen Übergang von Kapitel zwei schaffen.

Satz 3.1.15. *Durch die natürlichen Wirkungen von* G_L *auf* $\mathbb{C}_p$ *bzw.* $\mathbb{C}_p^\flat$ *bekommen wir den topologischen Isomorphismus*

$$H_L \cong G_{\mathbb{E}_L}.$$

Beweis. (Siehe Sch16, Theorem 1.6.7) $\square$

3.1.2 Schwache Topologien

Wir bauen zunächst einen vollständigen diskreten Bewertungsring $\mathcal{A}_L$ mit Restklassenkörper $k((X))$.

Definition 3.1.16.

i) Sei R ein kommutativer Ring. Dann bezeichnen wir mit

$$R((X)) := \{\sum_{i=n}^{\infty} a_i X^i \mid n \in \mathbb{Z},\ a_i \in R\}$$

den *Laurentreihenring* über R.

ii) Wir definieren

$$\mathcal{A}_L := \lim o((X))/\pi^m o((X)) = \lim o/\pi^m o((X)).$$

Bemerkung. $\mathcal{A}_L$ lässt sich am besten durch die Menge

$$\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n \mid a_n \in o,\ a_n \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

interpretieren (Siehe Sch16, §1.7).

Es gilt

$$\mathcal{A}_L/\pi\mathcal{A}_L = o((X))/\pi o((X)) = o/\pi o((X)) = k((X)).$$

Demnach ist $\pi\mathcal{A}_L$ maximal. Wir beschreiben nun, wie er auch ein diskreter Bewertungsring wird.

Proposition 3.1.17. *Wir haben einen nicht-archimedischen Absolutbetrag*

$$|\cdot| : \mathcal{A}_L \to \mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n \mapsto \max_{n\in\mathbb{Z}}(|a_n|).$$

Dieser macht $\mathcal{A}_L$ zu einem vollständigen diskreten Bewertungsring mit Uniformisierer π und Restklassenkörper $k((X))$.

Beweis. (Siehe Sch16, Lemma 1.7.1 & Remark 1.7.2) um zu zeigen, dass $\mathcal{A}_L$ lokal mit maximalem Ideal $\pi\mathcal{A}_L$ ist und, dass $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag ist. Man überprüft leicht, dass für alle $f \in \mathcal{A}_L$ gilt, dass

$$f \in \pi^n\mathcal{A}_L \Leftrightarrow |f| \le |\pi|^n \text{ ist.}$$

Demnach ist die π-adische Topologie gleich der Topologie von $|\cdot|$. Demnach ist nach Definition $\mathcal{A}_L$ vollständig bezüglich $|\cdot|$. $\square$

Wir schreiben ab jetzt

$$\mathcal{B}_L := Quot(\mathcal{A}_L)$$

für den Quotientenkörper von $\mathcal{A}_L$.

Jetzt konstruieren wir die Γ_L-Wirkung und das φ_L auf $\mathcal{A}_L$. Für jedes $g \in X\,o[[X]]$ bekommen wir einen Morphismus

$$o/\pi^m o[[X]] \to o/\pi^m o[[X]],\ f \mapsto f(g(X) \mod \pi^m o[[X]]).$$

Sei zusätzlich $g \in \mathcal{A}_L^\times$ und somit $g \in (\mathcal{A}_L/\pi^m\mathcal{A}_L)^\times = (o/\pi^m o((X)))^\times$. Dann setzt sich der obige Morphismus fort zu

$$\mathcal{A}_L/\pi^m\mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L/\pi^m\mathcal{A}_L, f \mapsto f(g(X) \mod \pi^m o((X))).$$

Diese sind verträglich mit den Projektionen modulo $\pi^m\mathcal{A}_L$. Demnach bekommen nach Übergang zum projektiven Limes einen Morphismus

$$\mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L,\ f \mapsto f(g(X)).$$

Da für diesen Morphismus $\pi \mapsto \pi$ gilt, ist er injektiv, weil $\mathcal{A}_L$ ein diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer π ist. Insbesondere lässt er sich fortsetzen auf $\mathcal{B}_L$

Es ist $[a]_\phi(X) \in X\,o[[X]]$ und für $a \in o^\times$ gilt

$$[a]_\phi(X) = aX + \cdots \in \mathcal{A}_L \backslash \pi\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_L^\times.$$

Somit bekommen wir nach Satz 3.1.4 eine Γ_L-Wirkung

$$\Gamma_L \times \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L, (\gamma, f(X)) \mapsto f([\chi(\gamma)](X)).$$

Da nach (Sch16, Proposition 1.3.6) außerdem

$$[\pi]_\phi(X) = \phi(X) \equiv X^q \neq 0 \mod \pi\mathcal{A}_L \text{ ist},$$

haben wir zusätzlich den injektiven o-Algebrenendomorphismus

$$\varphi_L : \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L, f(X) \mapsto f([\pi]_\phi(X)),$$

der ein Lift des q-Potenzierens auf $\mathbb{E}_L$ ist. Da wieder nach (Sch16, Proposition 1.3.6)

$$[\pi]_\phi([a]_\phi(X)) = [\pi a]_\phi(X) = [a]_\phi([\pi]_\phi(X)) \text{ ist},$$

kommutieren die Γ_L-Wirkung und das φ_L.

Wir brauchten in den Beweisen der Äquivalenzen von Kapitel 2, dass die Wirkung von G_E stetig ist bezüglich der π-adischen Topologie auf den Ringen. Daher folgert die nächste Aussage die Motivation eine neue Topologie einzuführen.

Lemma 3.1.18. *Die natürliche Wirkung*

$$G_L \times W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})_L \to W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})_L$$

ist nicht *stetig bezüglich der π-adischen Topologie.*

Beweis. Da $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ perfekt ist, ist die π-adische Topologie auf $W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})_L$ die Produkttopologie induziert von der diskreten Topologie auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$. Betrachten wir also das folgende kommutative Diagramm von Wirkungen.

$$\begin{tikzcd}
G_L \times W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})_L \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \Phi_0"] & W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})_L \arrow[d, "\Phi_0"] \\
G_L \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}
\end{tikzcd}$$

Nach Offenheit und Surjektivität von Φ_0 wäre mit der Stetigkeit oben auch die Stetigkeit unten gezeigt. Also genügt es zu zeigen, dass die Wirkung unten nicht stetig bezüglich der diskreten Topologie ist.

Beachte, dass wir o-Erzeuger z_n von $\mathcal{F}_n$ so wählen können, dass $z_{n+1}^q \equiv z_n \mod \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ist. (Siehe dafür den Beweis von Sch16, Proposition 1.3.10) Demnach ist

$$z := (\dots, z_1 \mod \pi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}, 0) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}.$$

Sei jetzt (σ, y) im Urbild von $\{z\}$ unter der Wirkung. Das heißt also, dass $\sigma(y) = z$ ist. Jetzt ist nach (Sch16, Proposition 1.3.12.a)), Lemma 3.1.8 und Hauptsatz der Galoistheorie H_L die größte abgeschlossene Untergruppe die z fixiert. Diese hat aber unendlichen Index in G_L und ist somit nicht offen in der proendlichen Topologie. Wäre die Wirkung stetig , so gäbe es eine offene und somit abgeschlossene Untergruppe U von G_L mit endlichem Index, so dass $U\sigma(y) = z$ wäre. Damit wäre aber wegen Hauptsatz der Galoistheorie $U \subset H_L$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $H_L \subset G_L$ unendlichen index hat. $\square$

Wir definieren nun neue Topologien auf $\mathcal{A}_L$ und verzweigte Wittvektoren.

Definition 3.1.19. Wir nennen in beiden Definitionen die Topologie die *schwache Topologie* auf dem entsprechenden Ring.

i) Wir definieren auf $\mathcal{A}_L$ eine Struktur eines topologischen $o[[X]]$-Moduls durch folgendes fundamentales Umgebungssystem der Null

$$U_m := X^m o[[X]] + \pi^m \mathcal{A}_L.$$

ii) Sei B eine perfekte topologische o-Algebra, wobei ein fundamentales Umgebungssystem der 0 durch Ideale $\mathfrak{a} \subset B$ gegeben ist. Wir definieren nun für jedes solche $\mathfrak{a}$ und $m \geq 1$ den Kern der Projektionen

$$V_{\mathfrak{a},m} := \ker(W(B)_L \to W_m(B) \to W_m(B/\mathfrak{a})).$$

Mit diesen Idealen als fundamentales Umgebungssystem der Null bekommt $W(B)_L$ eine Struktur einer o-Algebra.

Man überprüft leicht, dass diese Strukturen die Bedingungen einer Topologie erfüllen.

Bemerkung. Für $x := (x_0, x_1, \dots) \in W(B)_L$ gilt

$$x + V_{\mathfrak{a},m} = \{(y_0, y_1, \dots) \mid y_i \equiv x_i \mod \mathfrak{a} \text{ für alle } i = 0, \dots, m-1\}.$$

Daraus sieht man leicht, dass die schwache Topologie gleich der Produkttopologie induziert von der Topologie auf B ist. Somit ist diese Topologie schwächer als die π-adische Topologie auf $W(B)_L$, weil diese die Produkttopologie der diskreten Topologie auf B ist. Somit ist der Name motiviert.

Beweis. Es gilt nach (Sch16, Lemma 1.1.13.i))

$(*)$ $(a_n+b_n)_n = (a_n)_n+(b_n)_n$ für alle $(a_n)_n, (b_n)_n \in W(B)_L$ mit $a_n b_n = 0$ für alle n.

Sei nun $\rho := W(\mathrm{pr})_L : W(B)_L \to W(B/\mathfrak{a})_L$. Damit rechnen wir für $\overline{x_i} = x_i + \mathfrak{a}$ und $y := (y_0, y_1, \dots) \in V_{\mathfrak{a},m}$

$$\begin{aligned}
\rho(x+y) &= (\overline{x_0}, \dots) + (\overline{y_0}, \dots) \\
&\overset{(*)}{=} (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}, 0, \dots) + ((0, \dots, 0, \overline{x_m}, \dots) + (0, \dots, 0, \overline{y_m}, \dots)) \\
&= (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}, 0, \dots) + (0, \dots, 0, \overline{z_m}, \dots) \\
&\overset{(*)}{=} (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}, \overline{z_m}, \dots).
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit haben wir nach Definition der Addition auf den verzweigten Wittvektoren. Somit gilt

$$(x+y)_i \equiv x_i \mod \mathfrak{a} \text{ für alle } i \in \{0, \dots, m-1\}$$

also $x + y \in \{(y_0, y_1, \dots) \mid y_i \equiv x_i \mod \mathfrak{a} \text{ für alle } i = 0, \dots, m-1\}$

Sei nun

$b := (x_0+y_0, \dots, x_{m-1}+y_{m-1}, z_m, \dots) \in W(B)_L$ in $y_i \in \mathfrak{a}$ für alle $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Dann rechnet man wie oben

$$\begin{aligned}\rho(b) &= (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}, \overline{z_m}, \dots) \\ &\overset{(*)}{=} (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}, 0, \dots) + (0, \dots, 0, \overline{z_m}, \dots) \\ &= (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}, 0, \dots) + (0, \dots, 0, \overline{x_m}, \dots) + ((0, \dots, 0, \overline{z_m}, \dots) - (0, \dots, 0, \overline{x_m}, \dots)) \\ &= (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}, 0, \dots) + (0, \dots, 0, \overline{x_m}, \dots) + (0, \dots, 0, \overline{w_m}, \dots) \\ &\overset{(*)}{=} \rho(x + w) \text{ mit } w \in V_{\mathfrak{a},m}.\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit gilt dabei wieder nach Definition der Addition der verzweigten Wittvektoren. Somit gilt $b \in x + V_{\mathfrak{a},m} + \ker(\rho) = x + V_{\mathfrak{a},m}$. □

Wir haben noch eine weitere Form von schwacher Topologie auf Wittvektoren. Sei $F|k$ ein vollständiger nicht-archimedisch bewerterter Körper, der perfekt ist. Sei $\mathcal{O}_F$ sein Ring der ganzen Zahlen ausgestattet mit der Topologie induziert durch den Absolutbetrag auf F. Da die ϵ-Bälle $B_\epsilon(0)$ mit $\epsilon \leq 1$ Ideale in $\mathcal{O}_F$ sind, können wir also $W(\mathcal{O}_F)_L$ mit der schwachen Topologie bezüglich dieser Topologie ausstatten.

Definition 3.1.20. Wir definieren die *schwache Topologie* von $W(F)_L$ als eine topologische Struktur von $W(\mathcal{O}_F)$-Untermoduln, indem wir folgendes fundamentale Umgebungssystem der Null definieren

$$U_{\mathfrak{a},m} := V_{\mathfrak{a},m} + \pi^m W(F)_L,$$

wobei die $V_{\mathfrak{a},m}$ gerade das fundamentale Umgebungssystem der 0 aus Definition 3.1.19 für die schwache Topologie auf $W(\mathcal{O}_F)_L$ ist. Man überprüft leicht, dass dies tatsächlich eine topologische Struktur eines $W(\mathcal{O}_F)_L$-Moduls definiert.

Bemerkung. Analog wie für die $V_{\mathfrak{a},m}$ zeigt man für beliebiges $x := (x_0, x_1, \dots) \in W(F)_L$, die folgende Gleichheit.

$$x + U_{\mathfrak{a},m} = \{(y_0, y_1, \dots) \in W(F)_L \mid y_i \equiv x_i \mod \mathfrak{a} \text{ für alle } i = 0, \dots, m-1\}$$

Beachte dabei, dass wir $\mathfrak{a} \subset F$ nur als o-Untermodul und $W(\mathrm{pr})_L : W(F)_L \to W(F/\mathfrak{a})_L$ nur als o-Modulmorphismus für die Rechnungen in dem Beweis der Bemerkung nach Definition 3.1.19 gebraucht haben.

Daraus folgt, dass

$$U_{\mathfrak{a},m} \cap W(\mathcal{O}_F)_L = V_{\mathfrak{a},m} \text{ gilt}$$

und die schwache Topologie auf $W(F)_L$ die Produkttopologie der Topologie des Absolutbetrags auf F ist. Somit induziert die schwache Topologie auf $W(F)_L$ die auf $W(\mathcal{O}_F)_L$.

Ist zusätzlich $F_1|F$ eine Körpererweiterung, die selber perfekt ist, so überlegt man sich, dass $W(F)_L \subset W(F_1)_L$ mit der Teilraumtopologie der schwachen Topologie, selber die schwache Topologie ist, weil beide Topologien von den Produkttopologien von F bzw. F_1 kommen.

Lemma 3.1.21. *i) Die schwache Topologie auf $\mathcal{A}_L$ ist eine Topologie von o-Algebren, die vollständig und hausdorff ist.*

ii) Die schwache Topologie auf $W(F)_L$ ist eine Topologie von o-Algebren, die vollständig und hausdorff ist.

Beweis. Für i) siehe (Sch16, Lemma 1.7.6). Für ii) siehe (Sch16, Lemma 1.5.4 & Lemma 1.5.5). □

Lemma 3.1.22. *Folgende Abbildungen sind stetig bezüglich der schwachen Topologie auf $\mathcal{A}_L$.*

i) Die Γ_L-Wirkung

$$\Gamma_L \times \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L.$$

ii) Der o-Algebrenmorphismus

$$\varphi_L : \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L.$$

Beweis. (Siehe Sch16, Proposition 1.7.8) □

Lemma 3.1.23. *Sei G eine proendliche Gruppe. Ist B wie in Definition 3.1.19.ii) und*

$$G \times B \to B, \ (\sigma, b) \mapsto \sigma(b)$$

eine stetige Gruppenwirkung, so ist die natürliche Wirkung

$$G \times W(B)_L \to W(B)_L, (\sigma, (b_0, b_1, \dots)) \mapsto (\sigma(b_0), \sigma(b_1), \dots)$$

stetig bezüglich der schwachen Topologie auf $W(B)_L$.

Beweis. (Siehe Sch16, Lemma 1.5.3) □

Insbesondere ist die natürliche G_L-Wirkung auf $W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})_L$ stetig bezüglich der schwachen Topologie.

Wir versehen

$$W(\mathcal{O}_{\mathbb{E}_L})_L \subset W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})_L$$

mit der Teilraumtopologie der schwachen Topologie auf $W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\flat)_L$. Diese ist wie nach der Bemerkung von Definition 3.1.19 die Produkttopologie der Bewertungstopologie auf $\mathcal{O}_{\mathbb{E}_L}$ und nach (Sch16, Remark 2.1.2) auch eine Topologie von o-Algebren, die hausdorff und vollständig ist. Demnach nennen wir sie auch die *schwache Topologie* auf $W(\mathcal{O}_{\mathbb{E}_L})_L$. Nach Lemma 2.1.21 ist die natürliche Γ_L-Wirkung auf $W(\mathcal{O}_{\mathbb{E}_L})_L$ stetig bezüglich der schwachen Topologie.

Genauso betrachten wir

$$W(\mathbb{E}_L)_L \subset W(\mathbb{C}_p^\flat)_L$$

mit der von der schwachen Topologie induzierten Topologie und nennen diese auch *schwache Topologie*. Nach (Sch16, Remark 2.1.14) und Lemma 2.1.21 ist die natürliche Γ_L-Wirkung auf $W(\mathbb{E}_L)_L$ somit auch stetig bezüglich der schwachen Topologie.

Zum Abschluss dieses Paragraphen zeigen wir die zu Lemma 2.2.2 analoge Aussage für unsere Ringe.

Satz 3.1.24. *Wir haben eine Einbettung von o-Algebren*

$$\mathfrak{j} : \mathcal{A}_L \to W(\mathbb{E}_L)_L,$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_L \arrow[r, "\mathfrak{j}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & W(\mathbb{E}_L)_L \arrow[d, "\Phi_0"] \\
k((X)) \arrow[r, "j_\omega"] & \mathbb{E}_L
\end{tikzcd}$$

und die folgenden Verträglichkeiten erfüllt.

i) $\mathfrak{j}$ *ist eine topologische Einbettung für die schwachen Topologien.*

ii) Es gilt für den Frobenius $f_{\mathbb{E}_L}$ *auf* $W(\mathbb{E}_L)_L$, *dass*

$$f_{\mathbb{E}_L} \circ \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \circ \varphi_L \text{ ist.}$$

iii) Es gilt

$$\gamma(\mathfrak{j}(f)) = \mathfrak{j}(\gamma(f)) \text{ für alle } f \in \mathcal{A}_L,\ \gamma \in \Gamma_L$$

wobei jeweils die natürliche Γ_L*-Wirkung gemeint ist.*

Beweis. (Siehe Sch16, Proposition 2.1.16) □

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{A}_L := \mathrm{im}(\mathfrak{j}).$$

Nach Satz 3.1.24 ist $f_{\mathbb{E}_L}$ ein Lift des Frobenius auf $\mathbb{E}_L$. Wir bezeichnen ihn deshalb ab jetzt mit φ_L. Da die Γ_L-Wirkung $\mathbb{A}_L$ fixiert, ist sie nach Lemma 2.1.21 stetig bezüglich der Teilraumtopologie. Diese nennen wir ab jetzt auch die schwache Topologie auf $\mathbb{A}_L$.

Bemerkung 3.1.25. In der Konstruktion $\mathfrak{j}$ wurde ein o-Erzeuger $t \in T$ gewählt. $\mathbb{A}_L$ ist unabhängig von der Wahl dieses Erzeugers.

Beweis. (Siehe Sch16, Remark 2.1.17) □

Jetzt wollen wir noch aufzeigen, dass sich $\mathbb{A}_L^{nr}$ natürlich in $W(\mathbb{E}_L^{sep})_L$ konstruieren lässt.

Satz 3.1.26. *Es existiert eine maximale unverzweigte Erweiterung $\mathbb{A}_L^{nr}$ in $W(\mathbb{E}_L^{sep})_L$. Diese erfüllt die folgenden Eigenschaften.*

i) $\Phi_0 : W(\mathbb{E}_L^{sep})_L \to W(\mathbb{E}_L^{sep})_L$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{A}_L^{nr}/\pi\mathbb{A}_L^{nr} \cong \mathbb{E}_L^{sep}.$$

ii) Der Frobenius $f_{\mathbb{E}_L^{sep}}$ auf den Wittvektoren erhält $\mathbb{A}_L^{nr}$.

iii) Die natürliche G_L-Wirkung auf $W(\mathbb{E}_L^{sep})_L$ lässt $\mathbb{A}_L$ invariant.

Beweis. (Siehe Sch16, Lemma 3.1.3 & die darauf folgende Diskusion) □

Bemerkung. Satz 3.1.26.i) und ii) sagen uns, dass der Frobenius der Wittvektoren eingeschränkt auf $\mathbb{A}_L^{nr}$ ein Lift des q-Potenzierens auf $\mathbb{E}_L^{sep}$ ist. Wir bezeichnen diesen deshalb ab jetzt auch mit φ_L.

Sei $\mathbb{B}_L := Quot(\mathbb{A}_L)$. Dann gilt

$$\mathbb{B}_L^{nr} = Quot(\mathbb{A}_L^{nr}) \subset Quot(W(\mathbb{E}_L^{sep})_L)$$

und wir haben nach Satz 3.1.15 und Satz 2.1.11 die topologischen Isomorphismen

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{B}_L^{nr}|\mathbb{B}_L) \cong G_{\mathbb{E}_L} \cong H_L.$$

Insbesondere fixiert H_L das $\mathbb{A}_L$. Wir definieren nun

$$\mathbb{A} := \hat{\mathbb{A}}_L^{nr}$$

als die π-adische Vervollständigung von $\mathbb{A}_L^{nr}$ in $W(\mathbb{E}_L^{sep})_L$. Das geht, weil $W(\mathbb{E}_L^{sep})_L$ selber π-adisch vollständig ist. Nach (Sch16, Remark 3.1.4) ist $\mathbb{A}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer π und Restklassenkörper $\mathbb{E}_L^{sep}$.

Jedes $\sigma \in G_L$ und sowohl der Frobenius als auch Φ_0 auf $W(\mathbb{E}_L^{sep})_L$ sind als o-lineare Abbildungen π-adisch stetig. Daher übertragen sich die Aussagen i)-iii) von Satz 3.1.26 auf $\mathbb{A}$. Wir bezeichnen hier auch φ_L als die Einschränkung des Frobenius der Wittvektoren auf $\mathbb{A}$. Außerdem bezeichnen wir die Teilraumtopologie $\mathbb{A} \subset W(\mathbb{C}_p^\flat)_L$ der schwachen Topologie selber als die schwache Topologie auf $\mathbb{A}$. Nach Lemma 2.1.21 ist dies auch eine topologische o-Algebra, auf die G_L stetig wirkt, weil Sie mit gleichem Beweis wie (Sch16, Remark 2.1.14) auf $W(\mathbb{C}_p^\flat)_L$ stetig wirkt.

3.2 Die Äquivalenzen

3.2.1 Grundlegendes zu den (φ_L, Γ_L)-Moduln

Wir definieren
$$\mathbb{F}_L := \mathbb{E}_L^{perf}.$$
Da $\hat{L}_\infty^\flat$ perfekt ist, gilt
$$\mathbb{F}_L \subset \hat{L}_\infty^\flat.$$
Also haben wir immer noch eine stetige Γ_L-Wirkung auf $\mathbb{F}_L$ bezüglich des Absolutbetrages auf $\hat{L}_\infty^\flat$, weil die Wirkung $\mathbb{E}_L$ und somit auch seine perfekte Hülle nach Definition dieser invariant lässt. Somit hat es auch auf der schwachen Topologie von $W(\mathbb{F}_L)_L$ eine stetige Wirkung. Wegen Perfektheit von $\mathbb{F}_L$ ist die Rolle des $\mathbb{A}$ für $W(\mathbb{F}_L)_L$ gerade das ganze $W(\overline{\mathbb{F}_L})_L$, in dem Sinne, dass es alle Aussagen von Satz 3.1.26 erfüllt.

Sei im folgenden
$$\mathcal{R} \in \{\mathcal{A}_L, \mathbb{A}_L, \mathbb{A}, W(\mathbb{F}_L)_L, W(\overline{\mathbb{F}_L})_L\} =: \mathcal{L}_{DBR}.$$
Wir betrachten $\mathcal{R}$ immer ausgestattet mit seiner schwachen Topologie. Wir erinnern, dass diese topologische o-Algebren sind, mit Lift φ_L des q-Potenzierens auf seinem Restklassenkörper. Außerdem sind die natürlichen G_L- bzw. Γ_L-Wirkungen stetig bezüglich deren schwachen Topologien, und die Wirkung vertauscht mit φ_L.

Definition 3.2.1. Sei M ein endlich erzeugter $\mathcal{R}$-Modul.

Betrachte eine beliebige Projektion $\mathrm{pr} : \mathcal{R}^n \to M$. Dann versehen wir M mit der Quotiententopologie der Produkttopologie auf $\mathcal{R}^n$, die induziert ist durch die schwache Topologie auf $\mathcal{R}$.

Lemma 3.2.2. *Seien M und N endlich erzeugte $\mathcal{R}$-Moduln.*

i) Die Topologie von Definition 3.2.1 ist unabhängig von der Wahl der Projektion. Wir bezeichnen die Topologie als die schwache Topologie *auf M.*

ii) Jede $\mathcal{R}$-lineare Abbildung $f : M \to N$ ist stetig bezüglich der schwachen Topologien.

iii) Ist $M = M_1 \oplus M_2$ für zwei endlich erzeugte $\mathcal{R}$-Moduln M_1 und M_2, so ist die schwache Topologie auf M die Produkttopologie von der schwachen Topologie auf M_1 und M_2.

iv) M ist mit der schwachen Topologie ein topologischer $\mathcal{R}$-Modul.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jedes $\mathcal{R}$-lineare Abbildung

$$f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$$

stetig ist bezüglich der Produkttopologie induziert durch die schwache Topologie auf $\mathcal{R}$. Betrachte die Standardbasen $(e_i)_{i \leq n}$ bzw. $(\tilde{e}_i)_{i \leq m}$ auf $\mathcal{R}^n$ bzw. $\mathcal{R}^m$. Dann lässt sich f als Matrix

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $r_{ij} \in \mathcal{R}$ auffassen. Sei jetzt also $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n$ beliebig. Dann gilt

$$f(x) = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} r_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} r_{mi} x_i \end{pmatrix}.$$

Da Addition und Multiplikation in $\mathcal{R}$ stetig sind, ist also auch f stetig in allen Komponenten von $\mathcal{R}^m$ und somit auch stetig bezüglich der Produktopologie nach universeller Eigenschaft der Produkttopologie.

Wir zeigen nun i). Seien nun $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{R}^n \to M$ und $\mathrm{pr}_2 : \mathcal{R}^m \to M$ zwei verschiedene Projektionen. Da $\mathcal{R}^n$ frei, also projektiv ist, existiert eine $\mathcal{R}$-lineare Abbildung $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$, die das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \mathcal{R}^m \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Nach eben gezeigtem ist pr_1 also stetig in der von pr_2 induzierten Topologie. Analog zeigt man, dass pr_2 in der von pr_1 induzierten Topologie stetig ist. Somit sind die Topologien gleich.

Zu ii) haben wir wieder wegen der Projektivität eines freien Moduls ein kommutatives Diagramm von folgender Form.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_M"'] & \mathcal{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_N"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Da g stetig ist, ist nach universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auch f stetig.

Zu iii) beachte, dass wir für jedes endlich erzeugte M nach ii) und dem Elementarteilersatz den topologischen Isomorphismus

$$M \cong \mathcal{R}^n \oplus \mathcal{R}/\pi^{n_1}\mathcal{R} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}/\pi^{n_1}$$

haben. Demnach können wir per Induktion von $M_i \cong \mathcal{R}/\pi^{n_i}\mathcal{R}$ mit $1 \leq n_i \leq \infty$ ausgehen, wobei $\mathcal{R}/\pi^\infty\mathcal{R} := \mathcal{R}$ ist. Wähle zu den Projektionen $\mathrm{pr}_i : \mathcal{R} \to M_i$ die Projektion

$$\mathrm{pr}_1 \oplus \mathrm{pr}_2 : \mathcal{R}^2 \to M.$$

Da pr_i stetig und offen bezüglich der schwachen Topologie auf M_i ist, ist die schwache Topologie auf M die Produktopologie der schwachen Topologien der M_i (Siehe Bou66, Corollary nach Proposition I.§5.3.8).

Nun zu iv). Wir betrachten wie oben den topologischen Isomorphismus

$$M \cong \mathcal{R}^n \oplus \mathcal{R}/\pi^{n_1}\mathcal{R} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}/\pi^{n_1}.$$

Nach ii) und iii) genügt es also die Behauptung für $\mathcal{R}/\pi^n\mathcal{R}$ zu zeigen für alle $1 \leq n \leq \infty$, wobei $\mathcal{R}/\pi^\infty\mathcal{R} := \mathcal{R}$ seien soll.

Für $n = \infty$ ist das gerade die Aussage, dass $\mathcal{R}$ ein topologischer Ring ist. Für $n < \infty$ ist das Lemma 2.1.21 $\square$

Lemma 3.2.3. *Seien $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{L}_{DBR}$, so dass $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ gilt. Dann ist die Teilraumtopologie der schwachen Topologie auf*

$$\mathcal{R}/\pi^n\mathcal{R} \subset \mathcal{S}/\pi^n\mathcal{S}$$

die schwache Topologie auf $\mathcal{R}/\pi^n\mathcal{R}$ für alle $1 \leq n \leq \infty$, wobei $\mathcal{R}/\pi^\infty\mathcal{R} := \mathcal{R}$ ist.

Beweis. Das Inklusionszeichen ergibt Sinn, weil

$$\pi^n\mathcal{S} \cap \mathcal{R} = \pi^n\mathcal{R} \text{ ist,}$$

weil beide Ringe diskrete Bewertungsringe mit Uniformisierer π sind. Für $n = \infty$ folgt das direkt aus der Definition der schwachen Topologie auf $\mathcal{R}$. Für $n < \infty$ machen wir eine Fallunterscheidung.

Sei $\mathcal{R} \in \{\mathcal{A}_L, \mathbb{A}_L\}$ und $\mathcal{S}$ beliebig. Dann folgt die Aussage aus dem Beweis von (Sch16, Lemma 3.1.8).

Sei als nächstes $\mathcal{R} = W(\mathbb{F}_L)_L$ und $\mathcal{S} = W(\overline{\mathbb{F}_L})_L$. Da R und S die Produkttopologie des Absolutbetrages des jeweiligen Körpers tragen und beide Körper perfekt sind, haben wir Homöomorphismen $\mathbb{F}_L^n \to \mathcal{R}/\pi^n\mathcal{R}$ und $\overline{\mathbb{F}_L}^n \to \mathcal{S}/\pi^n\mathcal{S}$ (Siehe Sch16, Lemma 1.1.13). Demnach ist $\mathcal{R}/\pi^n\mathcal{R} \subset \mathcal{S}/\pi^n\mathcal{S}$ mit $\mathbb{F}_L^n \subset \overline{\mathbb{F}_L}^n$ auch eine topologische Einbettung.

Aus Transitivitätsgründen genügt es nun nur noch den Fall $\mathcal{R} = \mathbb{A}$ und $\mathcal{S} = W(\overline{\mathbb{F}_L})_L$ zu betrachten. Da

$$\mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{R}} = \mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}|\mathcal{R}}$$

offen ist bezüglich der schwachen Topologien und weil nach Lemma 3.2.2.iii) $\mathcal{R}/\pi^n\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{S}/\pi^n\mathcal{S}$ ein topologischer $\mathcal{R}$- bzw. $\mathcal{S}$-Modul ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(U_{\mathfrak{a},m} \cap \mathcal{R}) = \mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(U_{\mathfrak{a},m}) \cap \mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(\mathcal{R}) \text{ ist,}$$

wobei $m \geq n$ und $U_{\mathfrak{a},m}$ aus Definition 3.1.20 für $\mathcal{S}$ gemeint ist. Es gilt

$$U_{\mathfrak{a},m} = \{(a_0, a_1, \dots) \in \mathcal{S} \mid a_i \in \mathfrak{a} \text{ für alle } i \in \{0, \dots, m-1\}\}.$$

Außerdem gilt nach (Sch16, Lemma 1.1.13.i))

$(*)$ $(a_n+b_n)_n = (a_n)_n+(b_n)_n$ für alle $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathcal{S}$ mit $a_nb_n = 0$ für alle n.

Da $m \geq n$ und $\overline{\mathbb{F}_L}$ perfekt ist, rechnet man für $a := (a_0, \dots)$ und entsprechend $a^{(m)} := (a_0, \dots, a_{m-1}, 0, \dots)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(U_{\mathfrak{a},m} \cap \mathcal{R}) &= \{\mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(a) \mid a_i \in \mathfrak{a} \text{ für alle } i \in \{0, \dots, m-1\},\ a \in \mathcal{R}\} \\
&\overset{(*)}{=} \{a^{(m)} + \pi^n\mathcal{S} \mid a_i \in \mathfrak{a}, \exists b \in \pi^m\mathcal{S} : a^{(m)} + b \in \mathcal{R}\} \\
&= \{a^{(m)} + \pi^n\mathcal{S} \mid a_i \in \mathfrak{a}, a^{(m)} \in \mathcal{R} + \pi^m\mathcal{S}\} \\
&= \mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(U_{\mathfrak{a},m}) \cap \mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(\mathcal{R} + \pi^m\mathcal{S}) = \mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(U_{\mathfrak{a},m}) \cap \mathrm{pr}_{\pi^n\mathcal{S}}(\mathcal{R}).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.4. *Ist $\alpha : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ ein o-Algebrenendomorphismus, der stetig bezüglich der schwachen Topologie ist. Sei zusätzlich*

$$\beta : M \to N$$

eine α-semilineare Abbildung zwischen endlich erzeugten $\mathcal{R}$-Moduln. Dann ist β stetig bezüglich der schwachen Topologie.

Beweis. (Angelehnt an Sch16, Remark 2.2.5)
Seien $\mathrm{pr}_M : \mathcal{R}^m \to M$ und $\mathrm{pr}_N : \mathcal{R}^n \to N$ zwei Projektionen. Da $\mathcal{R}^m$ frei und somit projektiv ist, bekommen wir eine $\mathcal{R}$-lineare Abbildung $\tilde{\beta}$, die das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^m \arrow[r, "\alpha^m"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_M"'] & \mathcal{R}^m = \mathcal{R} \underset{\alpha,\mathcal{R}}{\otimes} \mathcal{A}^m \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{pr}_M"] & \mathcal{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_N"] \\
M \arrow[r, "m \mapsto 1 \otimes m"] \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & \mathcal{R} \underset{\alpha,\mathcal{R}}{\otimes} M \arrow[r, "\beta^{lin}"] & N
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung und nach Lemma 3.2.2.ii) ist $\tilde{\beta} \circ \alpha^m$ stetig. Somit ist nach universeller Eigenschaft der Quotiententopologie auch β stetig. $\square$

Lemma 3.2.5. *Sei $\mathcal{R} \in \mathcal{L}_{DBR}$*

i) Der Funktor $M \mapsto \mathcal{R} \underset{\varphi_L,\mathcal{R}}{\otimes} M$ ist exakt auf der Kategorie der $\mathcal{R}$-Moduln.

ii) Ist M ein endlich erzeugter $\mathcal{R}$-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul. Dann ist die schwache Topologie auf N durch die schwache Topologie auf M induziert.

Beweis. Zu i) beachte, dass $\mathcal{R}$ als $\mathcal{R}$-Modul über die Skalarrestriktion φ_L torsionsfrei und somit flach ist nach (Bou72, Proposition I.§2.4.3.(ii)).

Zu ii) machen wir eine Fallunterscheidung.

Sei zunächst $\mathcal{R} \in \{\mathcal{A}_L, \mathbb{A}_L\}$. Dann folgt die Aussage aus (Sch16, Lemma 2.2.4).

Sei jetzt $\mathcal{R} \in \{W(\mathbb{F}_L)_L, W(\overline{\mathbb{F}_L})_L\}$. Sei $K \in \{\mathbb{F}_L, \overline{\mathbb{F}_L}\}$. Es genügt den Fall $M = \mathcal{R}$ und $N = \pi^n M$ zu betrachten. Der Rest geht über formale Argumente wie in (Sch16, Lemma 2.2.4). Da K perfekt ist, gilt

$$N = \{(0, \dots, 0, a_n, a_{n+1}) \mid a_i \in K\}.$$

Demnach ist die Teilraumtopologie von $N \subset M$ die Produkttopologie auf

$$\prod_{m \geq n} K.$$

Das ist aber auch die schwache Topologie induziert durch den Isomorphismus

$$M \to N, x \mapsto \pi^n x.$$

Sei jetzt $\mathcal{R} = \mathbb{A}$. Man kann die Aussage auf M und N wie im letzten Fall zurückführen. Da M und N nach Lemma 3.2.2.iii) topologische $\mathcal{R}$-Moduln sind, genügt es die Gleichheit der Topologien auf Basisoffenen Umgebungen der $0 \in N$ zu überprüfen. Die Basisoffenenumgebungen von $0 \in M$ sind von der Form $U_{\mathfrak{a},m} \cap \mathcal{R}$. Dabei ist $U_{\mathfrak{a},m}$ aus Definition 3.1.20 für $\mathcal{S} := W(\overline{\mathbb{F}_L})_L$ gemeint. Es gilt also

$$U_{\mathfrak{a},m} = \{(a_0, a_1, \dots) \in \mathcal{S} \mid a_i \in \mathfrak{a} \text{ für alle } i \in \{0, \dots, m-1\}\}.$$

In der Teilraumtopologie von N sind die Basisoffenen Umgebungen von der 0 von der Form

$$V_m := U_{\mathfrak{a},m} \cap \pi^n \mathcal{R}$$

und in der schwachen Topologie von der Form

$$W_m := \pi^n U_{\mathfrak{a},m} \cap \pi^n \mathcal{R},$$

weil die Multiplikation mit π^n auf $\mathcal{S}$ injektiv ist. Sei jetzt $m \geq n$. Dann zeigen wir $V_m = W_{m-n}$ und damit die Behauptung. Da $\overline{\mathbb{F}_L}$ perfekt ist, gilt

$$\pi^n U_{\mathfrak{a},m-n} = \{(0, \dots, 0, a_n, a_{n+1} \dots) \in \mathcal{S} \mid a_i \in \mathfrak{a} \text{ für alle } i \in \{n, \dots, m-1\}\}.$$

Da jedes $a = (a_0, \dots) \in \pi^n \mathcal{R}$ auch von der Form $(0, \dots, 0, a_n, \dots)$ ist, gilt somit

$$\begin{aligned} W_{m-n} =& \{(0, \dots, 0, a_n, \dots) \in \mathcal{S} \mid a_i \in \mathfrak{a} \text{ für alle } i \in \{n, \dots, m-1\}, (a_n^{\frac{1}{q^n}}, \dots) \in \mathcal{R}\} \\ =& V_m \end{aligned}$$

$\square$

Sei ab jetzt

$$\mathcal{R} := \mathbb{A}_L \text{ bzw. } \mathcal{R} := W(\mathbb{F}_L)_L$$

und entsprechend

$$\mathcal{R}^{vnr} := \mathbb{A} \text{ bzw. } \mathcal{R}^{vnr} := W(\overline{\mathbb{F}_L})_L.$$

Kommen wir nun zur Definition der (φ_L, Γ_L)-Moduln.

Definition 3.2.6. Sei M ein endlich erzeugter $\mathcal{R}$-Modul versehen mit der schwachen Topologie und $\varphi_M : M \to M$ eine φ_L-semilineare Abbildung. Sei nun

$$\tau_M : \Gamma_L \times M \to M$$

eine Semilineare Γ_L-Wirkung, die stetig bezüglich der schwachen Topologie auf M ist, so dass für alle $\gamma \in \Gamma_L$ gilt, dass

$$\gamma \circ \varphi_M = \varphi_M \circ \gamma \text{ ist}$$

für die entsprechende Wirkung von γ auf M. Wir Definieren nun die etalen (φ_L, Γ_L)-*Moduln* als die Kategorie aller solcher M, so dass die Linearisierung

$$\varphi_M^{lin} : \mathcal{R} \underset{\varphi_L, \mathcal{R}}{\otimes} M \to M, r \otimes m \mapsto r\varphi_M(m)$$

bijektiv ist. Die Morphismen sind dabei die $\mathcal{R}$-linearen Abbildungen $f : M \to N$, so dass f mit τ_M und τ_N bzw. φ_M und φ_N vertauscht. Wir schreiben $\Gamma_L \Phi_{\mathcal{R}}^{et}$ für diese Kategorie. Analog definieren wir $G_L \Phi_{\mathcal{R}^{vnr}}^{et}$.

Proposition 3.2.7. *Die Kategorien $Rep_o(G_L), \Gamma_L \Phi_{\mathcal{R}}^{et}$ und $G_L \Phi_{\mathcal{R}^{vnr}}^{et}$ sind abelsch mit Kernen und Kokernen aus der entsprechenden Kategorie von Moduln.*

Beweis. Der Beweis für $Rep_o(G_L)$ geht genau wie für Satz 2.1.22.i). Die Beweise der anderen Kategorien gehen wie bei (Sch16, Proposition 2.2.7). Man muss nur die entsprechenden Referenzen dort auf Lemma 3.2.5 abändern. □

3.2.2 Der Übergang von den φ_L-Moduln

Um zu zeigen, dass sich das Theorem 2.2.24 fortsetzt zu den entsprechenden Kategorien von (φ_L, Γ_L)-Moduln, müssen wir ein paar wenige Aussagen von dort über die π-adische Topologie zur schwachen Topologie abwandeln.

Proposition 3.2.8. *Sei M in $\Gamma_L\Phi^{et}_{\mathcal{R}}$ bzw. M in $G_L\Phi^{et}_{\mathbb{A}}$, so ist*

$$\mathcal{R}^{vnr} \underset{\mathcal{R}}{\otimes} M \text{ in } G_L\Phi^{et}_{\mathcal{R}^{vnr}}$$

bzw.

$$W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{\mathbb{A}}{\otimes} M \text{ in } G_L\Phi^{et}_{W(\overline{\mathbb{F}_L})_L}.$$

Dabei ist die G_L-Wirkung immer durch Diagonalwirkung mit der natürlichen G_L-Wirkung auf dem jeweiligen Ring gegeben. Genauso für die φ_L-semilinearen Endomorphismen.

Beweis. (Siehe Sch16, Lemma 3.1.11) Beachte, dass der Beweis dort für jeden unserer Fälle angewandt werden kann. □

Proposition 3.2.9. *Sei $M \in G_L\Phi^{et}_{\mathbb{W}(\overline{\mathbb{F}_{\mathbb{L}}})_{\mathbb{L}}}$. Die G_L-Wirkung schränkt sich ein zu einer wohldefinierten, für die schwache Topologie stetigen Wirkung auf $M_{\mathbb{E}_L^{sep}}$.*

Beweis. Die Wohldefiniertheit zeigt man genau wie in Proposition 2.2.22.

Für die Stetigkeit genügt es nach Lemma 2.1.21 zu zeigen, dass die schwache Topologie von M die schwache Topologie auf $M_{\mathbb{E}_L^{sep}}$ induziert. Nach Satz 2.2.19 ist die natürliche Abbildung

$$W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{\mathbb{A}}{\otimes} M_{\mathbb{E}_L^{sep}} \to M$$

gegeben durch die Multiplikation bijektiv. Demnach und nach Elementarteilersatz haben wir ein kommutatives Diagramm mit horizontalen Isomorphismen.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\cong"] & W(\overline{\mathbb{F}_L})_L^n \oplus W(\overline{\mathbb{F}_L})_L/(\pi^{n_1}) \oplus \cdots \oplus W(\overline{\mathbb{F}_L})_L/(\pi^{n_r}) \\
M_{\mathbb{E}_L^{sep}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "\subset"] & \mathbb{A}^n \oplus \mathbb{A}/(\pi^{n_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{A}/(\pi^{n_r}) \arrow[u, "\subset"]
\end{tikzcd}$$

Nach Lemma 3.2.2.ii) und iii) genügt es also zu zeigen, dass die Teilraumtopologie von

$$\mathbb{A}/\pi^n\mathbb{A} \subset W(\overline{\mathbb{F}_L})_L/\pi^n W(\overline{\mathbb{F}_L})_L$$

die schwache Topologie auf $\mathbb{A}/\pi^n\mathbb{A}$ ist. Das ist gerade Lemma 3.2.3. □

Wir können jetzt die erste Kategorienäquivalenz aufschreiben.

Satz 3.2.10. *Wir haben quasi-inverse Funktoren*

$$(M, \tau : G_L \times M \to M) \mapsto (M_{\mathbb{E}_L^{sep}}, \tau_{|G_L \times M_{\mathbb{E}_L^{sep}}})$$

und

$$(V, \tau : G_L \times V \to V) \mapsto (W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{\mathbb{A}}{\otimes} V, \rho \otimes \tau)$$

zwischen der Kategorien der etalen (φ_L, G_L)-Moduln von $\mathbb{A}$ und $W(\overline{\mathbb{F}_L})_L$. Dabei ist $\rho : G_L \times W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \to W(\overline{\mathbb{F}_L})_L$ die natürliche Galoiswirkung.

Beweis. Wie in Proposition 2.2.22. Es müssen nur die Stetigkeitsaussagen abgeändert werden durch Proposition 3.2.8 & 3.2.9. □

Wir verbinden die Kategorien nun mit den Kategorien der G_L-Darstellungen über o.

Satz 3.2.11. *Sei V in $Rep_o(G_L)$. Dann induziert die Skalarerweiterung*

$$\mathbb{A} \underset{o}{\otimes} \cdot$$

eine Kategorienäquivalenz zur Kategorie $_{G_L}\Phi^{et}_{\mathbb{A}}$ und ein quasi-inverser Funktor ist gegeben durch

$$M \mapsto M^{\varphi_M = \mathrm{id}}.$$

Beweis. Beachte, dass die Modultheoretischen Aussagen und die Aussagen φ_L-Struktur aus Satz 2.2.26 unabhängig von den G_E-Wirkungen gezeigt worden sind.

Wir müssen also einerseits nur zeigen, dass für ein V in $Rep_o(G_L)$

$$\mathbb{A} \underset{o}{\otimes} V$$

die Diagonalwirkung von G_L stetig bezüglich der schwachen Topologie ist und andererseits muss gezeigt werden, dass für ein M in $_{G_L}\Phi^{et}_{\mathbb{A}}$ die Einschränkung der G_L-Wirkung auf $M^{\varphi_M = \mathrm{id}}$ stetig bezüglich der π-adischen Topologie ist. Letzteres führt man wie im Beweis von Proposition 3.2.9 darauf zurück, dass die Teilraumtopologie von

$$o/\pi^n o \subset \mathbb{A}/\pi^n\mathbb{A}$$

gerade die π-adische Topologie auf $o/\pi^n o$ für $1 \leq n \leq \infty$ ist.

Beides wurde aber in (Sch16, Lemma 3.1.8 & Lemma 3.1.10) gezeigt. □

Kommen wir nun zur Anwendung von Hilbert 90 für unsere Zwecke.

Lemma 3.2.12. *Sei $K \in \{\mathbb{E}_L, \mathbb{F}_L\}$ und V in $Rep_k(G_L)$. Dann induziert die Multiplikation einen Isomorphismus*

$$K^{sep} \underset{K}{\otimes} (K^{sep} \underset{k}{\otimes} V)^{H_L} \to K^{sep} \underset{k}{\otimes} V.$$

Insbesondere ist $(K^{sep} \underset{k}{\otimes} V)^{H_L}$ endlich erzeugt über K.

Beweis. (Angelehnt an Sch09, Satz 1.4.14)
Ohne Einschränkungen ist $V \neq 0$. Sei also $v_1, \ldots, v_n$ eine k-Basis von V und $1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n$ eine K^{sep}-Basis von $K^{sep} \underset{k}{\otimes} V$.

Wir identifizieren mit diesen Basen nun

$$\mathrm{Aut}_k(V) \cong GL_n(k) \text{ und } \mathrm{Aut}_{K^{sep}}(K^{sep} \underset{k}{\otimes} V) \cong GL_n(K^{sep}).$$

Wir definieren nun

$$H_L = \mathrm{Gal}(K^{sep}|K) \to GL_n(k) \subset GL_n(K^{sep}),\ g \mapsto A_g.$$

Dabei ist $A_g := (a_{ij}(g))_{ij} \in GL_n(k)$ gegeben durch

$$gv_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(g) v_i.$$

Wir zeigen nun, dass diese Abbildung ein stetiger Kozykel ist. Da die H_L-Wirkung auf V semilinear ist und $a_{ij}(g)$ von jedem $\sigma \in H_L$ fixiert wird, rechnet man

$$A_{gh} = A_g g(A_h).$$

Da die H_L-Wirkung stetig auf V wirkt, wobei V die diskrete Topologie trägt, und $GL_n(k)$ selber die diskrete Topologie trägt, ist die Abbildung $g \mapsto A_g$ auch stetig.

Nach Hilbert 90 gilt

$$H^1(H_L, GL_n(K^{sep})) = \{c_1\}.$$

Demnach existiert ein $B := (b_{ij})_{ij} \in GL_n(K^{sep})$, so dass

$$A_g = B^{-1} g(B) \text{ für alle } g \in H_L \text{ gilt.}$$

Wir schreiben $B^{-1} = (c_{ij})_{ij}$. Dann rechnet man

$$a_{ij}(g) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} g(b_{kj}) \text{ für alle } g \in H_L$$

und

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}.$$

Dabei ist δ_{ij} das Kronecker-Delta. Wir setzen nun

$$w_j := \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \otimes v_i.$$

Wir zeigen zunächst, dass $gw_j = w_j$ ist. Denn man rechnet mit obigen Gleichheiten

$$\begin{aligned} gw_j &= \sum_{i=1}^{n} g(c_{ij}) \otimes gv_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(c_{ij}) \otimes \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(g) v_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(g) g(c_{ij}) \otimes v_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} g(b_{li} c_{ij}) c_{kl} \otimes v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \delta_{lj} c_{kl} \otimes v_k \\ &= w_j \end{aligned}$$

Da zusätzlich für $B^{-1} \in GL_n(K^{sep})$

$$B^{-1}(1 \otimes v_i) = w_j \text{ ist,}$$

ist w_j eine K^{sep}-Basis von $K^{sep} \underset{k}{\otimes} V$. Damit ist durch die Multiplikation induzierte Abbildung

$$K^{sep} \underset{K}{\otimes} (K^{sep} \underset{k}{\otimes} V)^{H_L} \to K^{sep} \underset{k}{\otimes} V$$

surjektiv. Da $(K^{sep})^{H_L} = K$ ist, zeigt man wie im Beweis von Theorem 2.1.26.iii) die Injektivität. $\square$

Proposition 3.2.13. *Sei M in $G_L\Phi^{et}_{\mathcal{R}^{vnr}}$. Dann ist M^{H_L} in $G_L\Phi^{et}_{\mathcal{R}}$ und die Multiplikation induziert einen Isomorphismus*

$$\mathcal{R}^{vnr} \underset{\mathcal{R}}{\otimes} M^{H_L} \to M.$$

Insbesondere ist $(\cdot)^{H_L}$ auf $G_L\Phi^{et}_{\mathcal{R}^{vnr}}$ exakt und M und M^{H_L} haben dieselben Elementarteiler.

Beweis. (Angelehnt an Bri09, Lemma 3.2.6)
Seien $\sigma \in G_L$ und $h \in H_L$ beliebig. Dann rechnet man für $m \in M^{H_L}$ folgendes nach, indem man benutzt, dass $H_L \subset G_L$ ein Normalteiler ist.

$$h\sigma m = \sigma\sigma^{-1}h\sigma m = \sigma\tilde{h}m = \sigma m \text{ für } \tilde{h} \in H_L.$$

Demnach ist $\sigma m \in M^{H_L}$. Somit haben wir eine wohldefinierte Γ_L-Wirkung auf M^{H_L}.

Zeigen wir nun die geforderte Isomorphie, so führt man die Stetigkeit der G_L-Wirkung auf M^{H_L} wie bei Proposition 3.2.9 auf Lemma 3.2.3 zurück. Dann muss nur zusätzlich die Offenheit der Projektion $G_L \to \Gamma_L$ benutzt werden, um zu zeigen, dass auch die Γ_L-Wirkung stetig ist.

Die Isomorphismen der Kategorienäquivalenzen aus Satz 3.2.10 und 3.2.11 sind G_L- und somit H_L-invariant. Deshalb gilt die geforderte Isomorphie für den Fall $\pi M = 0$ nach Lemma 3.2.12, weil wir uns nach Satz 3.2.10 und 3.2.11 auf den Fall $M = \mathcal{R}^{vnr} \underset{o}{\otimes} V$ für V in $Rep_o(G_L)$ zurückziehen können. Der Rest vom Beweis von (Bri09, Lemma 3.2.6) benutzt nicht mehr, dass die G_L-Wirkung auf M stetig bezüglich der π-adischen Topologie ist. Der Rest folgt dann genau wie dort.

Wir müssen nur noch zeigen, dass φ_M eingeschränkt auf M^{H_L} etal über $\mathcal{R}$ ist. Das zeigt man genau wie in Proposition 2.2.23. □

Satz 3.2.14. *$M \mapsto M^{H_L}$ induziert eine Kategorienäquivalenz zwischen den etalen (φ_L, G_L)-Moduln über $\mathcal{R}^{vnr}$ und der Kategorie der etalen (φ_L, Γ_L)-Moduln über $\mathcal{R}$. Ein quasi-inverser Funktor ist dabei gegeben durch die Skalarerweiterung*

$$\mathcal{R}^{vnr} \underset{\mathcal{R}}{\otimes} \cdot$$

Beweis. Wie der Beweis von Proposition 2.2.23. Die Referenzen auf Satz 2.1.22.iii) und die Exaktheit von $(\cdot)^{G_E}$ müssen jetzt ausgetauscht werden durch Proposition 3.2.13.

Dann muss nur noch gezeigt werden, dass die Skalarerweiterung der Gruppenwirkung immer noch stetig ist. Das führt man wie in Proposition 3.2.9 auf Proposition 3.2.8 zurück. □

Theorem 3.2.15. *Die Skalarerweiterung $\mathbb{A}_L \subset W(\mathbb{F}_L)_L$ induziert eine Kategorienäquivalenz zwischen $\Gamma_L\Phi^{et}_{\mathbb{A}_L}$ und $\Gamma_L\Phi^{et}_{W(\mathbb{F}_L)_L}$*

Beweis. Betrachte das bis auf natürliche Isomorphie kommutative Diagramm von Funktoren.

$$\begin{tikzcd}
G_L\Phi^{et}_{\mathbb{A}} \arrow[r, "W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{\mathbb{A}}{\otimes} \cdot"] & G_L\Phi^{et}_{W(\overline{\mathbb{F}_L})_L} \\
\Gamma_L\Phi^{et}_{\mathbb{A}_L} \arrow[u, "\mathbb{A} \underset{\mathbb{A}_L}{\otimes} \cdot"] \arrow[r, "W(\mathbb{F}_L)_L \underset{\mathbb{A}_L}{\otimes} \cdot"'] & \Gamma_L\Phi^{et}_{W(\mathbb{F}_L)_L} \arrow[u, "W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{W(\mathbb{F}_L)_L}{\otimes} \cdot"']
\end{tikzcd}$$

Da nach Satz 3.2.10 & 3.2.14 die oberen drei Funktoren Kategorienäquivalenzen sind, ist es auch der untere. □

Wir bekommen jetzt sofort zusätzlich folgende Aussage.

Proposition 3.2.16. *Sei M in $\Gamma_L\Phi^{et}_{W(\overline{F}_L)_L}$, so haben wir eine Einbettung*

$$((W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{W(\mathbb{F}_L)_L}{\otimes} M)_{\mathbb{E}_L^{sep}})^{H_L} \xrightarrow{j} M.$$

Das Bild von j ist von der Form $M^{(x)}_{\mathbb{E}_L}$ aus Definition 2.2.12 und dieser ist invariant unter φ_M und der Γ_L-Wirkung auf M. Diese ist stetig bezüglich der schwachen Topologie auf $M^{(x)}_{\mathbb{E}_L}$.

Beweis. Wie in Proposition 2.2.25 für die Aussage über das Bild von j und die φ_M-Invarianz.

Da die Γ_L-Wirkung auf $((W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{W(\mathbb{F}_L)_L}{\otimes} M)_{\mathbb{E}_L^{sep}})^{H_L}$ durch Einschränken von $\rho \otimes \tau_M$ gegeben ist, ist die Wirkung auf $\mathrm{im}(j)$ durch Einschränken von τ_M gegeben. Deshalb ist $\mathrm{im}(j)$ auch invariant unter der Wirkung τ_M. Die Stetigkeit der Γ_L-Wirkung wird wie in Proposition 3.2.9 bewiesen. □

Fazit

Zusammengefasst haben wir folgendes bis auf natürliche Isomorphie kommutative Diagramm von Kategorienäquivalenzen.

$$\begin{tikzcd}
 & G_L\Phi^{et}_{\mathbb{A}} \arrow[ld, shift left, "(\cdot)^{\varphi=\mathrm{id}}"] \arrow[r, shift left, "W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{\mathbb{A}}{\otimes} \cdot"] \arrow[d, shift left, "(\cdot)^{H_L}"] & G_L\Phi^{et}_{W(\overline{\mathbb{F}_L})_L} \arrow[l, shift left, "(\cdot)_{\mathbb{E}_L^{sep}}"] \arrow[d, shift left, "(\cdot)^{H_L}"] \\
Rep_o(G_L) \arrow[ru, shift left, "\mathbb{A} \underset{o}{\otimes} \cdot"] \arrow[rd, shift left, "\mathbf{D}"] & & \\
 & \Gamma_L\Phi^{et}_{\mathbb{A}_L} \arrow[lu, shift left, "\mathbf{V}"] \arrow[u, shift left, "\mathbb{A} \underset{\mathbb{A}_L}{\otimes} \cdot"] \arrow[r, shift left, "W(\mathbb{F}_L)_L \underset{\mathbb{A}_L}{\otimes} \cdot"] & \Gamma_L\Phi^{et}_{W(\mathbb{F}_L)_L} \arrow[l, shift left, "(\cdot)_{\mathbb{E}_L}"] \arrow[u, shift left, "W(\overline{\mathbb{F}_L})_L \underset{W(\mathbb{F}_L)_L}{\otimes} \cdot"]
\end{tikzcd}$$

Literatur

[Ax69] AX, James: Zeros of Polynomials over local fields - the galois action. In: *Journal of Algebra* (1969)

[Bos05] BOSCH, Siegfried: *Algebra*. Springerverlag, 2005

[Bou66] BOURBAKI, N.: *General Topology, Part I*. Hermann, 1966

[Bou72] BOURBAKI, N.: *Commutative Algebra*. Hermann, 1972

[Bri09] BRINON, OLIVIER, Conrad, Brian: *CMI Summer School notes on p-adic Hodge Theory (preliminary version)*. 2009

[Fon90] FONTAINE, Jean-Marc: Représentations p-adiques des corps locaux. In: *The Grothendieck Festschrift* II (1990), S. 249–309. – Birkhäuser

[Mat86] MATSUMURA, Hideyuki: *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, 1986

[Neu92] NEUKIRCH, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie*. Springerverlag, 1992

[Sch07] SCHNEIDER, Peter: *Theorie des Anstiegs*. Webseite. http://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/Theorie-des-Anstiegs.pdf. Version: 2007

[Sch09] SCHOENEBERG, Torsten: *p-adische Galoisdarstellungen und (φ, Γ)-Moduln*. Webseite. http://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/diplom/schoeneberg-diplomarbeit-ext.pdf. Version: 2009

[Sch16] SCHNEIDER, Peter: *Galois representations and (φ, Γ)-modules*. Webseite. http://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/phi-Gamma-modules-1.pdf. Version: 2016

[Ser79] SERRE, Jean P.: *local fields*. Springerverlag, 1979

Abschließende Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über perfekte (φ, Γ)-Moduln selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Datum, Unterschrift)