Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Ganzzahlige affine Hecke Algebren

Diplomarbeit

Betreuer: Prof. Dr. Peter Schneider
Mathematisches Institut
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Marten Bornmann

Ich widme diese Arbeit meinem Neffen Moritz,
der heute das Licht der Welt erblickt hat.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich bei der Erstellung dieser Diplomarbeit unterstützt haben.
Zuerst bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Peter Schneider für ein interessantes Thema und die sowohl hilfreiche als auch engagierte Betreuung. Auch Dr. Tobias Schmidt, der zwischenzeitlich die Betreuung übernommen hat, möchte ich hiermit meinen Dank aussprechen.
Des Weiteren bin ich vielen Kommilitonen sehr dankbar, ob für fachliche Gespräche, moralischen Beistand oder praktische Hilfe. Da eine solche Auflistung nicht vollständig sein kann, werde ich diese kurz halten. Namentlich hervorheben möchte ich Thomas Albers, Raphael Meiners, Lisa Ott, Franziska Schneider und Torsten Schoeneberg, wobei ich Torsten noch einmal explizit für das Korrekturlesen danke.
Schließlich gilt ein herzlicher Dank meiner Familie, insbesondere meinen Eltern. Sie haben mich in jeder Situation unterstützt und mir durch ihre Liebe und ihr Vertrauen stets Motivation und Rückhalt gegeben.

Einleitung

Etwas präziser könnte der Titel dieser Arbeit etwa „Endlichkeitsaussagen für ganzzahlige affine generische Hecke Algebren einer Weylgruppe” lauten. Diese Algebren und ihre Moduln finden ihre Anwendung in der Darstellungstheorie der reduktiven p-adischen Gruppen über p-adischen Körpern und solchen in Charakteristik p. Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Darstellung eines Resultates von Vigneras ([11]) aus dem Jahre 2004.

Wir beginnen zunächst mit dem Studium von Wurzeldaten in Kapitel 1 dieser Arbeit. Abgesehen von einigen algebraischen Grundkenntnissen wird dabei kein spezielles Vorwissen – insbesondere nicht die Theorie der Wurzelsysteme – vorausgesetzt. Wir fixieren zunächst ein Wurzeldatum $\mathcal{R} = (X, \check{X}, R, \check{R})$. Dabei sind X und $\check{X}$ freie $\mathbb{Z}$-Moduln von endlichem Rang und R bzw. $\check{R}$ die Teilmengen der Wurzeln bzw. Kowurzeln.
Zunächst geht es vor allem darum, den Anschluss an die Theorie der Wurzelsysteme zu suchen, die in der Literatur besser abgedeckt ist als die der Wurzeldaten. Wir werden – ausgehend von einer mit $\mathcal{R}$ gegebenen Bilinearform $(\cdot, \cdot)$ – ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ konstruieren und können R als Wurzelsystem im euklidischen Vektorraum $V = X \otimes \mathbb{R}$ auffassen. Dies erlaubt es uns, Argumente aus der Theorie der Wurzelsysteme, wie etwa in [2] oder [4], zu übernehmen. Eines der Hauptresultate besagt, dass jedes Wurzeldatum eine Basis B besitzt, das heißt eine linear unabhängige Teilmenge von R, so dass jede Wurzel ganzzahlige Linearkombination mit nur nicht negativen oder nur nicht positiven Koeffizienten von Elementen von B ist. Wir fixieren dann eine solche Basis B und verstehen unter einen Wurzeldatum ein solches mit ausgezeichneter Basis, das heißt ein Tupel $\mathcal{R} = (X, \check{X}, R, \check{R}, B)$.
In Abschnitt 1.3 betrachten wir dann schließlich irreduzible Wurzeldaten und eine Zerlegung von gewissen „wesentlichen” Wurzeldaten in solche. Dies ist vor allem eine Vorbereitung auf Kapitel 2, in dem wir Weylgruppen studieren. Gewisse Weylgruppen – namentlich die endliche und die affine Weylgruppe – hängen nämlich gar nicht davon ab, ob ein Wurzeldatum durch seinen wesentlichen Anteil ersetzt wird oder nicht, so dass wir uns auf den wesentlichen und dann sogar den irreduziblen Fall beschränken können.

In Kapitel 2 sind dann Weylgruppen die zu studierenden Objekte. Zu jeder Wurzel $\alpha \in R$ haben wir eine zugehörige Spiegelung $s_\alpha \in GL(X)$. Die endliche Weylgruppe W_0 ist dann die von allen s_α erzeugte Untergruppe von $GL(X)$. Wir werden zeigen, dass diese eine von $S_0 = \{s_\alpha : \alpha \in B\}$ erzeugte Coxeter-Gruppe ist.

Abschnitt 2.2 beschäftigt sich mit der affinen Weylgruppe W_{aff}. Diese ist das semidirekte Produkt von W_0 und Q, wobei Q der von R erzeugte Untermodul von X ist. Wir definieren eine Ordnungsrelation $\preceq$ auf $\check{R}$ und ordnen den minimalen Elementen bezüglich dieser Ordnungsrelation affine Spiegelungen zu. Ist S dann die Vereinigung von S_0 und obigen Spiegelungen, so können wir mit ähnlichen Methoden wie in Abschnitt 2.1 zeigen, dass (W_{aff}, S) ein Coxeter-System ist. Außerdem werden wir der Längenfunktion dieses Coxeter-Systems eine geometrische Interpretation anhand von trennenden Hyperebenen geben. Wir erhalten so auch eine Fortsetzung der Längenfunktion auf die Weylgruppe W, die wir als das semidirekte Produkt von W_0 und X definieren.
Dabei sehen wir, dass es eine endlich erzeugte abelsche Untergruppe $\Omega \subset W$ gibt, so dass $W = \Omega W_{aff}$ gilt. Diese erlaubt es uns, für das Studium von W, das letztendlich unser Ziel ist, ähnliche Argumente zu verwenden wie bei Coxeter-Gruppen. Wir können Ω als Menge aller Elemente von W mit Länge 0 beschreiben. Nach der Untersuchung der Längenfunktion auf W, für die wir eine explizite Formel angeben können, definieren wir eine Ordnungsrelation – die Bruhat-Ordnung – auf der Coxeter-Gruppe W_{aff} und setzen diese mit Hilfe von Ω auf W fort. Schließlich beschäftigen wir uns in Kapitel 2 noch mit Braidgruppen, die wir dann für technische Zwecke in Hecke Algebren verwenden können.

In Kapitel 3 wenden wir uns dann letztendlich dem Studium von Hecke Algebren zu. Wir betrachten vor allem eine Hecke Algebra H, die wir als freien Modul über einem Polynomring $\mathbb{Z}[q_*]$ in endlich vielen Variablen mit der Basis $(T_w)_{w\in W}$ definieren, so dass die Multiplikation gewisse Relationen erfüllt. Im Gegensatz zur häufig verwendeten Variante einer Hecke Algebra sind die so genannten generischen Gewichte q_s in H nicht invertierbar. Wir können H jedoch als Unteralgebra einer Hecke Algebra $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ auffassen, in der die generischen Gewichte invertierbar sind. Für (eine etwas weniger allgemeine Variante von) $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ gibt es ein bekanntes Resultat von Bernstein und Lusztig ([6]): Diesem zu Folge gibt es eine kommutative Teilalgebra A von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$, über der $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ ein freier Modul vom endlichen Rang $\#W_0$ ist. Die Zerlegung von W in ein semidirektes Produkt von W_0 und X überträgt sich also in gewisser Weise auf $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$. Wir haben eine natürliche W_0-Wirkung auf $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$, so dass wir das Zentrum von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ als Menge A^{W_0} aller invarianten Elemente beschreiben können. Dieses ist ein freier Modul über einem Ring $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$ von Laurent-Polynomen, dessen Basis über die Bahnen der natürlichen W_0-Wirkung auf X indiziert ist. Die dort hinführenden Argumentationen beruhen jedoch zu großen Teilen darauf, dass die Gewichte q_s in $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ invertierbar sind. Jedoch ist es beim Studium der Moduln über Hecke Algebren, die in der Darstellungstheorie von reduktiven p-adischen Gruppen über p-adischen Körpern oder Körpern in Charakteristik p auftreten, unerlässlich, die Gewichte nicht zu invertieren. Mit dieser Situation, das heißt mit der der Hecke Algebra H, beschäftigt sich oben erwähnter Artikel [11] von Vigneras. Dort wird eine alternative Basis $(E_w)_{w\in W}$ definiert, die es erlaubt, ähnliche Aussagen wie obige auf H zu übertragen. Wir werden zunächst zeigen, dass $A \cap H$ ein freier $\mathbb{Z}[q_*]$-Modul mit der Basis $(E_x)_{x\in X}$ ist. Daraufhin werden wir feststellen, dass H ein endlich erzeugter $H \cap A$-Modul ist. Die Aussagen über das Zentrum übertragen sich ebenfalls in ähnlicher Weise: Wir werden zeigen, dass sich die W_0-Operation auf A zu einer solchen auf $A \cap H$ einschränkt und sich das Zentrum analog durch $(A \cap H)^{W_0}$ beschreiben lässt. Dieses ist ein freier $\mathbb{Z}[q_*]$-Modul, dessen Basis wieder über die Bahnen der W_0-Wirkung auf X indiziert ist. Außerdem ist $A \cap H$ über dem Zentrum von H endlich erzeugt und dieses ist eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}[q_*]$-Algebra.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Wurzeldaten

1.1 Definition und erste Eigenschaften

In diesem Abschnitt stellen wir einige grundlegende Tatsachen über Wurzeldaten zusammen. Wir folgen dabei Chap. 1 und 2 in [10], Exposé XXI.

1.1.1 Definition. Ein Wurzeldatum ist ein Tupel $(X, \check{X}, R, \check{R})$, so dass gilt:

(i) X und $\check{X}$ sind freie $\mathbb{Z}$-Moduln von endlichem Rang ≥ 1.

(ii) R und $\check{R}$ sind endliche, nicht leere Teilmengen von X bzw. $\check{X}$, so dass es eine Bijektion $\alpha \mapsto \check{\alpha}$ zwischen R und $\check{R}$ gibt.

(iii) Es gibt eine Bilinearform $(\cdot,\cdot) : X \times \check{X} \to \mathbb{Z}$ mit $(\alpha, \check{\alpha}) = 2$ für alle $\alpha \in R$.

(iv) $s_\alpha(R) = R$ und $s_{\check{\alpha}}(\check{R}) = \check{R}$ für alle $\alpha \in R$, wobei s_α und $s_{\check{\alpha}}$ die durch

$$s_\alpha(x) = x - (x, \check{\alpha})\alpha \text{ für alle } x \in X$$

und

$$s_{\check{\alpha}}(\check{x}) = \check{x} - (\alpha, \check{x})\check{\alpha} \text{ für alle } \check{x} \in \check{X}$$

definierten Endomorphismen von X bzw. $\check{X}$ seien.

Bemerkung: Häufig wird in der Definition eines Wurzeldatums auch gefordert, dass $(\cdot,\cdot)$ eine perfekte Paarung ist, das heißt, dass $X \to \mathrm{Hom}(\check{X}, \mathbb{Z}), x \mapsto (x, \cdot)$ ein Isomorphismus ist. Wir werden dies zunächst nicht tun. Einerseits wird diese Voraussetzung in Kapitel 1 und 2 dieser Arbeit nicht benötigt und andererseits können wir so leichter neue Wurzeldaten konstruieren. In Kapitel 3 betrachten wir dann nur noch Wurzeldaten, deren Bilinearform eine perfekte Paarung ist.
Wir werden stets annehmen, dass R reduziert ist, das heißt: Ist $\alpha \in R$ und ist $c \in \mathbb{Z}$ mit $c\alpha \in R$, so folgt $c = \pm 1$. Wir fixieren nun ein Wurzeldatum $\mathcal{R} = (X, \check{X}, R, \check{R})$. Dann ist auch $\check{\mathcal{R}} = (\check{X}, X, \check{R}, R)$ ein Wurzeldatum, das sogenannte zu $\mathcal{R}$ duale Wurzeldatum.

Für zukünftige Argumente ist es sinnvoll, R als Teilmenge von geeigneten Vektorräumen aufzufassen. Seien Q und $\check{Q}$ die von R und $\check{R}$ erzeugten Untermoduln. Dann betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $V_R = Q \otimes \mathbb{R}$, $\check{V}_R = \check{Q} \otimes \mathbb{R}$, $V = X \otimes \mathbb{R}$ und $\check{V} = \check{X} \otimes \mathbb{R}$. Dabei stellen wir uns $X, \check{X}, Q, \check{Q}, R$ und $\check{R}$ als Teilmengen der jeweiligen Vektorräume vor. $(\cdot, \cdot)$ setzt sich dann auf eindeutige Art und Weise zu einer Bilinearform $V_R \times \check{V}_R \to \mathbb{R}$ bzw. $V \times \check{V} \to \mathbb{R}$ fort. Die Abbildungen s_α und $s_{\check{\alpha}}$ können wir so als Endomorphismen der jeweiligen Vektorräume auffassen. Wir nennen diese Endomorphismen Spiegelungen.

1.1.2 Bemerkung. Für alle $\alpha \in R$ gilt:

(i) $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, $s_{\check{\alpha}}(\check{\alpha}) = -\check{\alpha}$

(ii) $s_\alpha^2 = 1$, $s_{\check{\alpha}}^2 = 1$

(iii) $0 \notin R$ und $0 \notin \check{R}$

(iv) $R = -R$ und $\check{R} = -\check{R}$

Beweis. Es genügt, jeweils die erste Aussage zu zeigen. Die jeweils zweite Aussage erhalten wir durch Anwenden der ersten auf $\check{\mathcal{R}}$.
(i): $s_\alpha(\alpha) = \alpha - (\alpha, \check{\alpha})\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha$
(ii): Für $v \in V$ gilt:

$$s_\alpha^2(v) = s_\alpha(v - (v, \check{\alpha})\alpha) = s_\alpha(v) - (v, \check{\alpha})s_\alpha(\alpha) = v - (v, \check{\alpha})\alpha + (v, \check{\alpha})\alpha = v$$

(iii): Wäre $0 = \alpha \in R$, so könnte nicht $(\alpha, \check{\alpha}) = 2$ gelten.
(iv): Aus (i) folgt $R \subset -R$ und da beide Mengen endlich und gleich mächtig sind, muss Gleichheit gelten. □

1.1.3 Definition. Die endliche Weylgruppe W_0 ist die von allen s_α erzeugte Untergruppe von $GL(V)$.

Aus der Definiton geht zunächst nicht hervor, dass W_0 endlich ist. Dies werden wir jedoch später zeigen. Wie bei den Spiegelungen können wir die Elemente von W_0 als Endomorphismen von X, V_R oder V auffassen.

1.1.4 Lemma. *Für alle $\alpha \in R$, $x \in X$ und $\check{x} \in \check{X}$ gilt:*
$(s_\alpha(x), s_{\check{\alpha}}(\check{x})) = (x, \check{x})$.

Beweis.

$$\begin{aligned}(s_\alpha(x), s_{\check{\alpha}}(\check{x})) &= (x - (x, \check{\alpha})\alpha, \check{x} - (\alpha, \check{x})\check{\alpha}) \\ &= (x, \check{x}) - 2(x, \check{\alpha})(\alpha, \check{x}) + (\alpha, \check{\alpha})(x, \check{\alpha})(\alpha, \check{x}) = (x, \check{x})\end{aligned}$$

□

Wir wollen uns $\check{V}_R$ als Dualraum von V_R vorstellen. Dazu betrachten wir den Homomorphismus $p : V_R \to \check{V}_R$ mit

$$p(v) = \sum_{\alpha \in R} (v, \check{\alpha})\check{\alpha} \text{ für alle } v \in V_R$$

und die Abbildung $l : V_R \to \mathbb{Z}$ mit

$$l(v) = (v, p(v)) \text{ für alle } v \in V_R.$$

1.1.5 Lemma. *(i) $l(v) \geq 0$ für alle $v \in V_R$*

(ii) $l(\alpha) > 0$ für alle $\alpha \in R$

(iii) $l(w(v)) = l(v)$ für alle $w \in W_0, v \in V_R$

(iv) $(v, p(v')) = (v', p(v))$ für alle $v, v' \in V_R$

(v) $l(\alpha)\check{\alpha} = 2p(\alpha)$ für alle $\alpha \in R$

Beweis. (i): $l(v) = \sum_{\alpha \in R}(v, \check{\alpha})^2 \geq 0$
(ii): Mit $(\alpha, \check{\alpha}) = 2$ folgt die Behauptung aus der Rechnung zu (i).
(iii): Es genügt, den Fall $w = s_\alpha$ zu betrachten:

$$l(s_\alpha(v)) = \sum_{\beta \in R} (s_\alpha(v), \check{\beta})^2 = \sum_{\beta \in R} (v, s_{\check{\alpha}}(\check{\beta}))^2 = \sum_{\beta \in R} (v, \check{\beta})^2 = l(v)$$

(iv):

$$(v, p(v')) = \sum_{\alpha \in R} (v, \check{\alpha})(v', \check{\alpha}) = (v', p(v))$$

(v):

$$\begin{aligned}
l(\alpha)\check{\alpha} &= \sum_{\beta \in R} (\alpha, \check{\beta})^2\check{\alpha} = \sum_{\beta \in R} (\alpha, \check{\beta})((\alpha, \check{\beta})\check{\alpha}) = \sum_{\beta \in R} (\alpha, \check{\beta})(\check{\beta} - s_{\check{\alpha}}(\check{\beta})) \\
&= \sum_{\beta \in R} (\alpha, \check{\beta})\check{\beta} - \sum_{\beta \in R} (\alpha, \check{\beta}) s_{\check{\alpha}}(\check{\beta}) = \sum_{\beta \in R} (\alpha, \check{\beta})\check{\beta} - \sum_{\beta \in R} (s_\alpha(\alpha), s_{\check{\alpha}}(\check{\beta})) s_{\check{\alpha}}(\check{\beta}) \\
&= \sum_{\beta \in R} (\alpha, \check{\beta})\check{\beta} + \sum_{\beta \in R} (\alpha, s_{\check{\alpha}}(\check{\beta})) s_{\check{\alpha}}(\check{\beta}) = 2 \sum_{\beta \in R} (\alpha, \check{\beta})\check{\beta} = 2p(\alpha)
\end{aligned}$$

□

1.1.6 Corollar. $(-\alpha)\check{} = -\check{\alpha}$ *für alle* $\alpha \in R$

Beweis. Nach Lemma 1.1.5 (v) ist:

$$l(\alpha)\check{\alpha} = 2p(\alpha) = -2p(-\alpha) = -l(-\alpha)(-\alpha)\check{} = -l(\alpha)(-\alpha)\check{}$$

Aus Lemma 1.1.5 (ii) folgt $l(\alpha) \neq 0$ und damit die Behauptung. □

1.1.7 Satz. *p ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Lemma 1.1.5 (ii) und (v) ist $\check{R}$ im Bild von p enthalten, das heißt p ist surjektiv, also $\dim V_R \geq \dim \check{V}_R$. Wendet man dieses Resultat auf das duale Wurzeldatum $\check{\mathcal{R}}$ an, so folgt auch die umgekehrte Ungleichung. Insgesamt ist also $\dim V_R = \dim \check{V}_R$ und p damit bijektiv. □

1.1.8 Corollar. *Die Form $(\cdot,\cdot)$ ist auf $V_R \times \check{V}_R$ nicht ausgeartet.*

Beweis. Ist $(v, \check{\alpha}) = 0$ für alle $\alpha \in R$, so ist $p(v) = 0$ und damit $v = 0$. □

Mit Hilfe von Corollar 1.1.8 können wir uns $\check{V}$ durch $\check{x} \mapsto (\cdot, \check{x})$ als Dualraum von V_R vorstellen.

1.1.9 Satz. *Sei $\check{W}_0$ die endliche Weylgruppe des dualen Wurzeldatums. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\varphi : W_0 \xrightarrow{\cong} \check{W}_0$ mit $\varphi(s_\alpha) = s_{\check{\alpha}}$ für alle $\alpha \in R$.*

Beweis. Wir haben den Isomorphismus

$$\varphi : GL(V_R) \to GL(\check{V}_R), f \mapsto [(\cdot, \check{v}) \mapsto (f^{-1}(\cdot), \check{v})].$$

Nach Lemma 1.1.4 gilt $\varphi(s_\alpha) = s_{\check{\alpha}}$. Also hat die Einschränkung auf W_0 ihr Bild in $\check{W}_0$ und ist surjektiv. Außerdem ist $\varphi_{|W_0}$ als Einschränkung einer injektiven Abbildung injektiv, also ein Isomorphismus. □

Durch Satz 1.1.9 können wir uns W_0 also auch als Gruppe von Automorphismen auf $\check{X}, \check{V}_R$ und $\check{V}$ vorstellen. Deshalb schreiben wir von nun an s_α für $s_{\check{\alpha}}$.

1.1.10 Corollar. *(i) $(\cdot,\cdot)$ ist W_0-invariant.*

(ii) $(w(x), \check{x}) = (x, w^{-1}(\check{x}))$

Beweis. Beide Aussagen folgen induktiv aus Lemma 1.1.4. □

1.1.11 Lemma. *Sei $w \in W_0$. Dann ist*

(i) $w(x) - x \in Q$ für alle $x \in X$ und

(ii) $w(v) - v \in V_R$ für alle $v \in V$.

Beweis. (i): Sei $w = s_1 \dots s_r$ mit $s_i = s_{\alpha_i}$. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach r. Ist $r = 0$, so ist $w = 1$ und $w(x) - x = 0 \in Q$. Im Falle $r = 1$ erhalten wir

$$s_1(x) - x = (x, \check{\alpha})\alpha \in Q.$$

Ist nun $r > 1$, so können wir induktiv

$$s_2 \dots s_r(x) - x \in Q$$

annehmen. Daraus folgt

$$w(x) - x = (w(x) - s_1 w(x)) + (s_2 \dots s_r(x) - x) \in Q,$$

denn auf den ersten Summanden können wir den Fall $r = 1$ anwenden und der zweite ist nach Induktionsannahme in Q enthalten.
Der Beweis von (ii) verläuft analog. □

1.1.12 Satz. *W_0 operiert treu auf R. Insbesondere ist W_0 endlich.*

Beweis. Sei $w \in W_0$ mit $w(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha \in R$ und $\check{v} \in \check{V}$. Dann ist:

$$(\alpha, w(\check{v}) - \check{v}) = (\alpha, w(\check{v})) - (\alpha, \check{v}) = (w^{-1}(\alpha), \check{v}) - (\alpha, \check{v}) = 0$$

Aus Lemma 1.1.11 (ii) angewandt auf $\check{\mathcal{R}}$ folgt schon $w(\check{v}) = \check{v}$ und somit $w = 1$. □

1.1.13 Proposition. *Für $w \in W_0$ und $\alpha \in R$ gilt: $w(\check{\alpha}) = (w(\alpha))\check{}$*

Beweis. Per Induktion genügt es, den Fall $w = s_\beta$ zu betrachten:

$$\begin{aligned}(s_\beta(\alpha))\check{} &= \frac{2}{l(s_\beta(\alpha))} p(s_\beta(\alpha)) = \frac{2}{l(\alpha)} \sum_{\gamma \in R} (s_\beta(\alpha), \check{\gamma})\check{\gamma} \\ &= \frac{2}{l(\alpha)} \sum_{\gamma \in R} (s_\beta(\alpha), s_\beta(\check{\gamma})) s_\beta(\check{\gamma}) = \frac{2}{l(\alpha)} \sum_{\gamma \in R} (\alpha, \check{\gamma}) s_\beta(\check{\gamma}) \\ &= s_\beta(\frac{2}{l(\alpha)} p(\alpha)) = s_\beta(\check{\alpha})\end{aligned}$$

□

1.1.14 Lemma. *Für $\alpha \in R$ und $w \in W_0$ gilt: $w s_\alpha w^{-1} = s_{w(\alpha)}$*

Beweis. Für $v \in V$ haben wir

$$\begin{aligned}w s_\alpha w^{-1}(v) &= v - (w^{-1}(v), \check{\alpha}) w(\alpha) = v - (v, w(\check{\alpha})) w(\alpha) \\ &= v - (v, w(\alpha)\check{}) w(\alpha) = s_{w(\alpha)}(v)\end{aligned}$$

□

1.2 Basen und positive Systeme

1.2.1 Definition. Eine Teilmenge $B \subset R$ heißt Basis, falls gilt:

(i) B ist eine Vektorraumbasis von V_R.

(ii) Jedes $\alpha \in R$ besitzt eine Darstellung $\alpha = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta$, wobei alle n_β ganze Zahlen gleichen Vorzeichens sind.

Wenn wir sagen, dass Zahlen das gleiche Vorzeichen haben, wollen wir stets den Fall zulassen, dass einige von ihnen 0 sind.
Eine Teilmenge $P \subset R$ heißt positives System, falls sie genau aus den Wurzeln besteht, die bezüglich einer Totalordnung "$\leq$" mit den Eigenschaften

(i) $x + z \leq y + z$ für alle $x, y, z \in V_R$ mit $x \leq y$ und

(ii) $0 \leq \lambda\, x$ für alle $\lambda \geq 0$, $x \geq 0$

positiv sind.

Wir wollen zeigen, dass stets eine Basis existiert. Die Existenz von positiven Systemen ist leicht zu sehen:

1.2.2 Bemerkung. Es existiert ein positives System P und für jedes positive System P gilt $R = P \dot\cup (-P)$.

Beweis. Für die Existenz eines positiven Systems genügt es die Existenz einer Totalordnung zu zeigen. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Vektorraumbasis von V_R.
Zu $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ und $v' = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ sei $v \leq v'$ genau dann, wenn $v = v'$ oder $\lambda_k < \mu_k$, wobei k den minimalen Index mit $\lambda_k \neq \mu_k$ bezeichne. Dies ist offensichtlich eine Totalordnung auf V_R mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus obiger Definition.
Sei nun "$\leq$" eine beliebige Totalordnung mit den Eigenschaften (i) und (ii). Ist $0 \leq \alpha \in R$, so folgt $-\alpha \leq 0$, denn sonst wäre nach Bedingung (i)

$$\alpha = 0 + \alpha < (-\alpha) + \alpha = 0.$$

Also ist für $\alpha \in R$ genau eines der Elemente $\pm\alpha$ größer gleich 0. Das bedeutet $R = P \dot\cup (-P)$. □

Der folgende Satz ist Corallaire 1.2.6 aus [10] Exposé XXI.

1.2.3 Satz. *$\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, p(\cdot))$ ist ein W_0-invariantes Skalarprodukt auf V_R und induziert die Norm $\| \cdot \| = \sqrt{l}$. Es gilt*

$$(v, \check\beta) = \frac{2\langle v, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \text{ für alle } v \in V, \beta \in R.$$

Beweis. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist symmetrisch nach Lemma 1.1.5 (iv). Für $v \in V_R$ gilt

$$\langle v, v\rangle = (v, p(v)) = \sum_{\alpha\in R}(v, \check{\alpha})^2 \geq 0.$$

Ist $\langle v, v\rangle = 0$, so folgt $(v, \check{\alpha}) = 0$ für alle $\check{\alpha} \in \check{R}$ und Corollar 1.1.8 impliziert $v = 0$, denn $\check{V}_R$ wird von $\check{R}$ erzeugt. Definitionsgemäß gilt: $l(v) = \langle v, v\rangle$ für alle $v \in V_R$ und wegen $l(v) \geq 0$: $\sqrt{l(v)} = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
Die angegebene Formel folgt aus Lemma 1.1.5 (v). Die W_0-Invarianz sieht man durch iterierte Anwendung von

$$\begin{aligned}\langle s_\alpha(v), s_\alpha(v')\rangle &= (s_\alpha(v), p(s_\alpha(v'))) = \sum_{\beta\in R}(s_\alpha(v), \check{\beta})(s_\alpha(v'), \check{\beta})\\ &= \sum_{\beta\in R}(v, s_\alpha(\check{\beta}))(v', s_\alpha(\check{\beta})) = \sum_{\beta\in R}(v, \check{\beta})(v', \check{\beta})\\ &= (v, p(v')) = \langle v, v'\rangle\end{aligned}$$

für alle $v, v' \in V_R$ und $\alpha \in R$. □

Das auf diese Art und Weise erhaltene Skalarprodukt von $\check{\mathcal{R}}$ bezeichnen wir mit $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$. Es gilt für $\alpha, \beta \in R$

$$(\alpha, \check{\beta}) = \frac{2\langle\langle\check{\alpha}, \check{\beta}\rangle\rangle}{\langle\langle\check{\alpha}, \check{\alpha}\rangle\rangle}.$$

1.2.4 Bemerkung. Seien $\alpha, \beta \in R$. Dann sind äquivalent:

(i) $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$

(ii) $(\alpha, \check{\beta}) = 0$

(iii) $(\beta, \check{\alpha}) = 0$

(iv) $\langle\langle\check{\alpha}, \check{\beta}\rangle\rangle = 0$

In diesem Fall nennen wir α und β orthogonal. Andernfalls haben obige Zahlen alle das gleiche Vorzeichen.

Beweis. Wegen

$$\frac{\langle\alpha, \alpha\rangle}{2}(\beta, \check{\alpha}) = \langle\beta, \alpha\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle = \frac{\langle\beta, \beta\rangle}{2}(\alpha, \check{\beta}) = \frac{\langle\beta, \beta\rangle}{\langle\langle\check{\alpha}, \check{\alpha}\rangle\rangle}\langle\langle\check{\alpha}, \check{\beta}\rangle\rangle$$

sind all diese Zahlen Vielfache mit positiven rationalen Faktoren voneinander. □

Die folgenden drei Lemmata stammen aus [10], Exposé XXI Chap. 2.3 und 3.1.

1.2.5 Lemma. *Seien $\alpha, \beta \in R$. Dann gilt:*

$$0 \leq (\alpha, \check{\beta})(\beta, \check{\alpha}) \leq 4.$$

Sind α und β weder orthogonal noch linear abhängig, so ist

$$1 \leq (\alpha, \check{\beta})(\beta, \check{\alpha}) \leq 3$$

Beweis. $(\alpha, \check{\beta})(\beta, \check{\alpha}) = \frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 4(\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|})^2$
Also ist $(\alpha, \check{\beta})(\beta, \check{\alpha}) \geq 0$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn α und β orthogonal sind. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt $(\alpha, \check{\beta})(\beta, \check{\alpha}) \leq 4$ mit Gleichheit genau dann, wenn α und β linear abhängig sind. □

1.2.6 Lemma. *Seien $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \beta$ und $(\alpha, \check{\beta}) > 0$. Dann ist auch $\alpha - \beta \in R$.*

Beweis. Wären α und β linear abhängig, so wäre $\alpha = -\beta$, da wir R als reduziert voraussetzen, und damit $(\alpha, \check{\beta}) = -2 < 0$. Da α und β nach Voraussetzung nicht orthogonal sind, folgt aus Lemma 1.2.5

$$(\alpha, \check{\beta})(\beta, \check{\alpha}) \in \{1, 2, 3\}.$$

Folglich ist einer der Faktoren 1. Im Falle $(\alpha, \check{\beta}) = 1$ ist $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in R$. Andernfalls erhalten wir $\alpha - \beta = s_\alpha(-\beta) \in R$. □

1.2.7 Lemma. *Seien $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ paarweise verschieden, derart dass es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ gibt mit $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$. Dann gibt es ein $1 \leq i \leq n$ mit $\lambda_i \neq 0, (\alpha, \check{\alpha}_i) > 0$ und $\alpha - \alpha_i \in R$.*

Beweis. $2 = (\alpha, \check{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\alpha_i, \check{\alpha})$. Also muss es mindestens ein i mit $\lambda_i > 0$ und $(\alpha_i, \check{\alpha}) > 0$ geben. Aus Lemma 1.2.6 folgt $\alpha - \alpha_i \in R$. □

1.2.8 Lemma. *Sei $B \subset R$ linear unabhängig. Zu jedem $\alpha \in R$ gebe es reelle Zahlen λ_β gleichen Vorzeichens mit $\alpha = \sum_{\beta \in B} \lambda_\beta \beta$. Dann ist B eine Basis von R.*

Beweis. Sei $\alpha = \sum_{\beta \in B} \lambda_\beta \beta$. Indem wir zu $-\alpha$ übergehen, können wir o.B.d.A. $\lambda_\beta \geq 0$ für alle $\beta \in B$ annehmen. Sind alle λ_β mit Ausnahme eines einzigen von null verschieden, so ist $\lambda_\alpha = 1$, weil R reduziert ist, und wir haben nichts mehr zu zeigen.
Sonst ist $\alpha \notin B$, da obige Darstellung wegen der linearen Unabhängigkeit von B eindeutig ist, das heißt es gibt mindestens zwei von null verschieden Koeffizienten λ_β. Nach Lemma 1.2.7 gibt es also ein $\beta \in B$ mit $\alpha - \beta = (\lambda_\beta - 1)\beta + \sum_{\gamma \neq \beta} \lambda_\gamma \gamma \in R$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von B ist diese Darstellung eindeutig und da ein λ_γ größer als null ist, ist auch $\lambda_\beta - 1 \geq 0$. Wiederholt man diese Argumentation, sind nach endlich vielen Schritten alle Koeffizienten null, das heißt die ursprünglichen Koeffizienten λ_β sind ganze Zahlen. □

Die nächste Proposition und der darauffolgende Satz sind eine Anpassung des Beweises von Theorem 1.3 aus [4], das besagt, dass jedes Wurzelsystem eine Basis besitzt.

1.2.9 Proposition. *Sei $P \subset R$ ein positives System und $B \subset P$ minimal mit der Eigenschaft, dass jedes $\alpha \in P$ Linearkombination von Elementen aus B mit nicht negativen Koeffizienten ist. Dann gilt:*
$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ für alle $\alpha, \beta \in B$ mit $\alpha \neq \beta$.
Insbesondere gilt dies, falls B eine Basis ist.

Beweis. Angenommen, es existierten $\alpha, \beta \in B$ mit $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ und $\alpha \neq \beta$. Dann wäre $s_\alpha(\beta) \in P$ oder $s_\alpha(\beta) \in -P$.
1. Fall: $s_\alpha(\beta) \in P$. Dann gäbe es reelle Zahlen $c_\gamma \geq 0$ mit $s_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma \in B} c_\gamma\, \gamma$. Sei $c = (\alpha, \check{\beta}) > 0$. Wäre $c_\beta < 1$, so folgte

$$\beta - c\alpha = s_\alpha(\beta) = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$$

und damit

$$(1 - c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma.$$

Also wäre $\beta \in \sum_{\gamma \neq \beta} \mathbb{R}_{\geq 0}\gamma$ im Widerspruch zur Minimalität von von B. Wäre hingegen $c_\beta \geq 1$, so folgte mit der gleichen Umformung wie im Fall $c_\beta < 1$

$$c\alpha + (c_\beta - 1)\beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma = 0.$$

Aber all diese Summanden wären größer gleich 0 und $c\alpha > 0$.
2. Fall: $s_\alpha(\beta) \in -P$. Wäre $c_\alpha + c > 0$, so folgte wie oben

$$(c_\alpha + c)\alpha = \beta + \sum_{\gamma \neq \alpha} (-c_\gamma)\gamma$$

und damit $\alpha \in \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathbb{R}_{\geq 0}\gamma$ im Widerspruch zur Minimalität von B. Im Falle $c_\alpha + c \leq 0$ erhielte man durch

$$\beta + \sum_{\gamma \neq \alpha} (-c_\gamma)\gamma - (c_\alpha + c)\alpha = 0$$

einen ähnlichen Widerspruch wie oben. □

1.2.10 Satz. *(i) Sei $P \subset R$ ein positives System. Dann enthält P genau eine Basis B. Insbesondere existiert stets eine Basis.*

(ii) Sei $B \subset R$ eine Basis. Dann gibt es genau ein positives System $P \subset R$, welches B enthält.

Beweis. (i): Eindeutigkeit: Ist $B \subset P$ eine Basis, so lassen sich alle Elemente aus $P \setminus B$ als Summe von mindestens zwei Elementen von B und damit von P schreiben. Ist andererseits $\alpha = \beta_1 + \ldots + \beta_m \in P$ mit $m \geq 2$ und $\beta_1, \ldots, \beta_m \in P$, so lässt sich jedes β_i als Summe von Basiselementen schreiben. Also ist α Summe von mindestens zwei Elementen von B. Weil B linear unabhängig ist, ist diese Darstellung eindeutig, also ist α kein Element von B. Das heißt wir können B charakterisieren als Menge aller Elemente von P, die sich nicht als Summe von mindestens zwei Elementen von P schreiben lassen. Dies zeigt die Eindeutigkeit.
Existenz: Sei nun $B \subset P$ minimal mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $\alpha \in P$ reelle Zahlen n_β gleichen Vorzeichens gibt mit $\alpha = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta$. Eine solche Teilmenge existiert, denn P hat diese Eigenschaft und ist endlich. Es ist klar, dass B ein Erzeugendensystem von V_R ist. Angenommen, B wäre in V_R nicht linear unabhängig. Dann gäbe es $\lambda_\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{\beta \in B} \lambda_\beta \beta = 0,$$

nicht alle $\lambda_\beta = 0$. Wir setzen

$$\mu_\beta = \begin{cases} \lambda_\beta, & \text{falls } \lambda_\beta > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit

$$\nu_\beta = \begin{cases} -\lambda_\beta, & \text{falls } \lambda_\beta \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt

$$v := \sum_{\beta \in B} \mu_\beta \beta = \sum_{\beta \in B} \nu_\beta \beta > 0.$$

Weiter gilt $0 \leq \langle v, v \rangle = \sum_{\beta, \gamma \in B} \lambda_\beta \nu_\gamma \langle \beta, \gamma \rangle \leq 0$ nach Proposition 1.2.9. Das bedeutet aber $v = 0$, was ausgeschlossen war. Also ist B eine Basis von V_R. Nach Lemma 1.2.8 ist B eine Basis von R.
(ii): Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass die positiven Wurzeln genau die Wurzeln sind, die Summe von Elementen von B sind. Die Existenz eines solchen positiven Systems sieht man wie im Beweis von Bemerkung 1.2.2. □

Von nun an betrachten wir ein Wurzeldatum $\mathcal{R} = (X, \check{X}, R, \check{R}, B)$ mit ausgezeichneter Basis B. Eine Wurzel $\alpha = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta$ heißt positiv, falls alle $n_\beta \geq 0$ sind, und sonst negativ. Die zugehörigen Menge der positiven und negativen Wurzeln bezeichnen wir mit R^+ und R^-.

1.2.11 Proposition. *$\check{B} = \{\check{\beta} : \beta \in B\}$ ist eine Basis von $\check{\mathcal{R}}$ und es gilt:*

$$\check{R}^+ = (R^+)\check{}$$

Beweis. Sei $\alpha = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta \in R$. Aus Lemma 1.1.5 (v) folgt

$$\check{\alpha} = \frac{2p(\alpha)}{l(\alpha)} = \sum_{\beta \in B} \frac{2n_\beta}{l(\alpha)} p(\beta) = \sum_{\beta \in B} \frac{l(\beta)}{l(\alpha)} n_\beta \check{\beta}.$$

Also ist $\check{B}$ ein Erzeugendensystem von $\check{V}_R$ und wegen $\dim V_R = \dim \check{V}_R$ auch linear unabhängig. Da all diese Koeffizienten reelle Zahlen gleichen Vorzeichens sind, ist $\check{B}$ nach Lemma 1.2.8 eine Basis des dualen Wurzeldatums $\check{\mathcal{R}}$. Wegen $\frac{l(\beta)}{l(\alpha)} > 0$ ist α genau dann positiv, wenn $\check{\alpha}$ positiv ist. $\square$

1.3 Irreduzible Wurzeldaten

Als erstes setzen wir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu einem Skalarprodukt auf V fort.

1.3.1 Satz. *Es existiert ein W_0-invariantes Skalarprodukt auf V, welches $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fortsetzt.*

Beweis. Wir ergänzen $B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ zu einer Basis $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ von V und setzen

$$\langle \beta_i, \beta_j \rangle := \delta_{i,j}, \text{ falls } i > m \text{ oder } j > m.$$

Dies ist offensichtlich ein Skalarprodukt auf V. Für $v, v' \in V$ sei nun

$$\langle v, v' \rangle' = \frac{1}{\# W_0} \sum_{w \in W_0} \langle w(v), w(v') \rangle.$$

Dies definiert offenbar eine W_0-invariante symmetrische positiv semidefinite Bilinearform auf V. Ist nun $v \in V$ mit $0 = \langle v, v \rangle' = \frac{1}{\# W_0} \sum_{w \in W_0} \langle w(v), w(v) \rangle$, so sind alle Summanden nicht negativ, müssen also schon 0 sein. Insbesondere folgt $\langle v, v \rangle = 0$ und damit $v = 0$. Sei nun $v \in V_R$. Aus der W_0-Invarianz der Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt dann für $v, v' \in V_R$

$$\langle v, v' \rangle' = \frac{1}{\# W_0} \sum_{w \in W_0} \langle w(v), w(v') \rangle = \frac{1}{\# W_0} \sum_{w \in W_0} \langle v, v' \rangle = \langle v, v' \rangle,$$

das heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ setzt die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V_R \times V_R$ fort. □

Wir fixieren nun ein solches W_0-invariantes Skalarprodukt von V und bezeichnen dieses auch mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.3.2 Definition. $\mathcal{R}$ heißt irreduzibel, falls es keine nicht leeren Teilmengen $R_1, R_2 \subset R$ mit $\langle R_1, R_2 \rangle = 0$ und $R = R_1 \dot\cup R_2$ gibt.
Wir sagen $(X, \check{X}, R, \check{R}, B)$ ist die direkte Summe der $\mathcal{R}_i = (X_i, \check{X}_i, R_i, \check{R}_i, B_i)$, falls: $X = X_1 \oplus X_2$, $\check{X} = \check{X}_1 \oplus \check{X}_2$, $R = R_1 \dot\cup R_2$, $\check{R} = \check{R}_1 \dot\cup \check{R}_2$, $B = B_1 \dot\cup B_2$ und $\langle R_1, R_2 \rangle = 0$.
Wir schreiben in diesem Fall $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$.

1.3.3 Lemma. *Sei $B = B_1 \dot\cup B_2$, $B_1, B_2 \neq \emptyset$ und $\langle B_1, B_2 \rangle = 0$. Dann ist R nicht irreduzibel.*

Beweis. Es genügt, zu zeigen, dass jede Wurzel von der Form $\sum_{\beta \in B_i} n_\beta \beta$ für $i = 1$ oder $i = 2$ ist. Angenommen es gäbe eine Wurzel

$$\alpha = \sum_{\beta \in B_1} n_\beta \beta + \sum_{\beta \in B_2} n_\beta \beta,$$

so dass beide Summen von 0 verschieden sind. Insbesondere wäre dann $\alpha \notin B$. Indem wir α möglicherweise durch $-\alpha$ ersetzen, könnten wir annehmen, dass α positiv ist.

Durch iterierte Anwendung von Lemma 1.2.7 könnten wir $\alpha_1 = \sum_{\beta \in B_1} n_\beta \beta \in B_1$ oder $\sum_{\beta \in B_2} n_\beta \beta \in B_2$ annehmen. Wir könnten o.B.d.A. von der ersten Situation ausgehen. Dann wäre aber

$$s_{\alpha_1}(\alpha) = -\alpha_1 + \sum_{\beta \in B_2} n_\beta \beta$$

weder positiv noch negativ. □

1.3.4 Definition. Zu $\mathcal{R} = (X, \check{X}, R, \check{R}, B)$ heißt $\mathcal{R}_e = (Q, \check{Q}, R, \check{R}, B)$ der wesentliche Anteil von $\mathcal{R}$. Ein Wurzeldatum $\mathcal{R}$ heißt wesentlich, falls $\mathcal{R} = \mathcal{R}_e$.

1.3.5 Satz. *Jedes wesentliche Wurzeldatum ist direkte Summe irreduzibler wesentlicher Wurzeldaten.*

Beweis. Sei $\mathcal{R} = (Q, \check{Q}, R, \check{R}, B)$ nicht irreduzibel. Dann gibt es nicht leere Teilmengen $R_1, R_2 \subset R$ mit $\langle R_1, R_2 \rangle = 0$ und $R = R_1 \dot{\cup} R_2$. Seien nun Q_1 und Q_2 die von R_1 bzw. R_2 erzeugten Untermoduln von Q. Dann ist $\langle Q_1, Q_2 \rangle = 0$ und daher $Q_1 \cap Q_2 = 0$. Andererseits ist $Q_1 + Q_2 = Q$, denn B ist in $Q_1 \cup Q_2$ enthalten. Insgesamt erhalten wir

$$Q = Q_1 \oplus Q_2.$$

Nach Bemerkung 1.2.4 ist auch $\langle\langle \check{R}_1, \check{R}_2 \rangle\rangle = 0$ und wir können $\check{Q} = \check{Q}_1 \oplus \check{Q}_2$ analog zerlegen. Nach dem Elementarteilersatz sind die Q_i und $\check{Q}_i$ wieder freie, endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln. Der Rang dieser Moduln ist nicht 0, denn die R_i sind nicht leer. Aus dem Beweis von Lemma 1.3.3 geht hervor, dass $B_i = B \cap R_i$ wieder eine Basis von $(Q_i, \check{Q}_i, R_i, \check{R}_i)$ ist. Mit den Einschränkungen von $\alpha \mapsto \check{\alpha}$ und $(\cdot, \cdot)$ sind die $\mathcal{R}_i = (Q_i, \check{Q}_i, R_i, \check{R}_i, B_i)$ also wieder wesentliche Wurzeldaten, wobei der Rang der Q_i kleiner ist als der von Q.
Aus dieser Beobachtung folgt per Induktion nach dem Rang von Q die Behauptung. □

1.3.6 Definition. Seien α_1, $\alpha_2 \in R$. Wir schreiben $\check{\alpha}_1 \preceq \check{\alpha}_2$, falls es $n_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit $\check{\alpha}_2 - \check{\alpha}_1 = \sum_{\beta \in B} n_\beta \check{\beta}$.

Diese Relation ist eine partielle Ordnung auf $\check{R}$. Sei R_m die Menge aller Wurzeln α, für die $\check{\alpha}$ minimal ist. Der folgende Satz ist Theorem 11-2 in [5].

1.3.7 Satz. *Ist $\mathcal{R}$ irreduzibel, so gibt es genau ein minimales Element bezüglich $\preceq$.*

Beweis. Die Existenz eines minimalen Elements ist klar. Sei nun $\alpha \in R$ minimal. Dann ist α negativ und insbesondere kein Element von B. Für jedes $\beta \in B$ haben wir dann $\check{\alpha} - \check{\beta} \notin \check{R}$, denn sonst wäre $\check{\alpha} - \check{\beta} \prec \check{\alpha}$. Deshalb gilt

$$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$$

nach Lemma 1.2.6 und Bemerkung 1.2.4. Wegen $\alpha \neq 0$ gibt es ein $\beta_0 \in B$ mit

$$\langle \alpha, \beta_0 \rangle < 0.$$

Schreibe nun $\alpha = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta$. Wir zeigen, dass bereits alle $n_\beta < 0$ sind. Es ist klar, dass die n_β nicht positiv sind. Sei nun $B_1 = \{\beta \in B : n_\beta < 0\}$ und $B_2 = \{\beta \in B : n_\beta = 0\}$. Wäre B_2 nicht leer, so gäbe es nach Proposition 1.2.9 und Lemma 1.3.3 $\beta_1 \in B_1$ und $\beta_2 \in B_2$ mit $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle < 0$ und damit $\langle \beta_2, \alpha \rangle > 0$. Dies widerspräche obiger Feststellung.
Sei nun $\tilde{\alpha}$ ein weiteres minimales Element und $\tilde{\beta}_0 \in B$ mit $\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_0 \rangle < 0$. Dann folgt aus den obigen Überlegungen

$$\langle \alpha, \tilde{\alpha} \rangle = \langle \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta, \tilde{\alpha} \rangle = \sum_{\beta \in B} n_\beta \langle \beta, \tilde{\alpha} \rangle \geq n_{\tilde{\beta}_0} \langle \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha} \rangle > 0$$

und damit aus Lemma 1.2.6 $\check{\alpha} = \check{\tilde{\alpha}}$ oder $\check{\alpha} - \check{\tilde{\alpha}} \in \check{R}$. Wäre Letzteres der Fall, so wäre auch $\check{\tilde{\alpha}} - \check{\alpha} = -(\check{\alpha} - \check{\tilde{\alpha}}) \in \check{R}$ im Widerspruch zur Minimalität von α oder $\tilde{\alpha}$, denn eine der Differenzen wäre positiv. Also folgt $\check{\alpha} = \check{\tilde{\alpha}}$ und damit $\alpha = \tilde{\alpha}$. □

1.3.8 Corollar. *Sei $\mathcal{R}$ irreduzibel und $\alpha \in R$ die minimale Wurzel. Dann ist α negativ und für alle $\beta \in R^+$ gilt:*

$$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$$

Beweis. Die erste Aussage haben wir im Beweis zu Satz 1.3.7 gesehen. Weiterhin haben wir gesehen, dass

$$\langle \alpha, \gamma \rangle \leq 0 \text{ für alle } \gamma \in B.$$

Schreibt man $\beta = \sum_{\gamma \in B} n_\gamma \gamma$, alle $n_\gamma \geq 0$, so folgt die Behauptung. □

1.3.9 Definition. Zu $\check{\alpha} = \sum_{\beta \in B} n_\beta \check{\beta} \in \check{R}$ heißt $\mathrm{ht}(\check{\alpha}) = \sum_{\beta \in B} n_\beta$ die Höhe von $\check{\alpha}$.

Die Höhe ermöglicht eine induktive Argumentation. Aus Satz 1.3.7 folgt, dass jedes irreduzible Wurzeldatum genau ein Element $\check{\alpha}$ minimaler Höhe hat. Dann ist $-\check{\alpha}$ das eindeutig bestimmte Element maximaler Höhe in $\check{R}$.

Jetzt können wir mit Hilfe des Spezialfalls eines irreduziblen Wurzeldatums den allgemeinen Fall verstehen:

1.3.10 Satz. *Sei $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{R}_n$ eine Zerlegung in irreduzible Wurzeldaten und $\alpha_0^{(i)}$ die minimale Wurzel von $\mathcal{R}_i$. Dann ist*

$$R_m = \{\alpha_0^{(1)}, \ldots, \alpha_0^{(n)}\}.$$

Beweis. Sei $\mathcal{R}_i = (X_i, \check{X}_i, R_i, \check{R}_i, B_i)$ und $\alpha_0 \in R_m$. Dann ist $\alpha_0 \in R_i$ für ein i und daher schon $\alpha_0^{(i)} \preceq \alpha_0$. Wegen der Minimalität von α_0 gilt sogar Gleichheit. Das

heißt es kann nicht mehr minimale Wurzeln als die $\alpha_0^{(i)}$ geben.
Sei hingegen $\alpha \in R$ mit $\alpha \preceq \alpha_0^{(i)}$. Dann gibt es ein $1 \leq j \leq n$ mit $\alpha \in R_j$. Wäre nun $i \neq j$, so könnten wir

$$\check{\alpha}_0^{(i)} - \check{\alpha} = \sum_{\beta \in B_i} n_\beta \check{\beta} + \sum_{\beta \in B_j} n_\beta \check{\beta}$$

schreiben und wegen $\check{\alpha}_0^{(i)} \in \check{R}^-$ gäbe es ein $\beta \in B_i$ mit $n_\beta < 0$ im Widerspruch zu $\check{\alpha} \preceq \check{\alpha}_0^{(i)}$. Also muss α schon in R_i liegen und aus der Minimalität von $\check{\alpha}_0^{(i)}$ in R_i folgt $\alpha = \alpha_0^{(i)}$. □

Kapitel 2

Weylgruppen

2.1 Die endliche Weylgruppe

Wir betrachten weiterhin ein fixiertes Wurzeldatum $\mathcal{R} = (X, \check{X}, R, \check{R}, B)$ mit ausgezeichneter Basis B. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass W_0 von den Spiegelungen $S_0 = \{s_\alpha : \alpha \in B\}$ erzeugt wird. Dabei gehen wir vor wie in [5] Chap. 3-6 und 4-1.

2.1.1 Lemma. *Für $\alpha \in B$ gilt:*

$$s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = R^+ \setminus \{\alpha\}$$

Beweis. Sei $\beta = \sum_{\gamma \in B} n_\gamma \gamma \in R^+$ und $\beta \neq \alpha$. Weil R reduziert ist, ist $n_{\gamma_0} > 0$ für ein $\gamma_0 \neq \alpha$. Durch Anwenden von s_α sehen wir:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \check{\alpha})\alpha = \sum_{\gamma \in B} \tilde{n}_\gamma \gamma$$

Also ist $\tilde{n}_{\gamma_0} = n_{\gamma_0} > 0$ und damit $s_\alpha(\beta) \in R^+$: Wäre nun $s_\alpha(\beta) = \alpha$, so wäre $\beta = s_\alpha(s_\alpha(\beta)) = -\alpha \in R^-$. Weil s_α injektiv ist und $R^+ \setminus \{\alpha\}$ endlich, schränkt sich s_α zu einer Bijektion auf $R^+ \setminus \{\alpha\}$ ein. $\square$

Das folgende Lemma ermöglicht uns eine induktive Argumentation:

2.1.2 Lemma. *Sei $\alpha \in R^+ \setminus B$. Dann gibt es ein $s \in S_0$ mit* $\mathrm{ht}(s(\alpha)) < \mathrm{ht}(\alpha)$ *und* $s(\alpha) \in R^+$.

Beweis. Wegen $(\alpha, \check{\alpha}) = 2$ gibt es ein $\beta \in B$ mit $(\beta, \check{\alpha}) > 0$. Aus

$$s_\beta(\check{\alpha}) = \check{\alpha} - (\beta, \check{\alpha})\check{\beta}$$

folgt $\mathrm{ht}(s_\beta(\alpha)) = \mathrm{ht}(\alpha) - (\beta, \check{\alpha}) < \mathrm{ht}(\alpha)$. Aus Lemma 2.1.1 folgt die zweite Behauptung. $\square$

2.1.3 Satz. *W_0 wird von S_0 erzeugt.*

Beweis. Sei W_0' die von S_0 erzeugte Untergruppe von W_0 und $s_\alpha \in W_0$ ein beliebiger Erzeuger. Wegen $s_\alpha = s_{-\alpha}$ dürfen wir annehmen, dass α bereits positiv ist. Per Induktion nach $\mathrm{ht}(\alpha)$ folgt aus Lemma 2.1.2, dass es ein $w \in W_0'$ gibt mit $w(\alpha) = \beta \in B$. Nach Lemma 1.1.14 ist $s_\alpha = s_{w^{-1}(\beta)} = w^{-1}s_\beta w \in W_0'$. □

Wir werden die Aussage des letzten Satzes nun weiter verschärfen. Als nächstes zeigen wir, dass (W_0, S_0) ein Coxeter-System ist, das heißt

- $W_0 \cong \langle S_0 : (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1\rangle$,
- $m(\alpha, \alpha) = 1$ für alle $\alpha \in B$ und
- $m(\alpha, \beta) \geq 2$ für alle $\alpha, \beta \in B$ mit $\alpha \neq \beta$,

wobei $m(\alpha, \beta)$ die Ordnung von $s_\alpha s_\beta$ in W_0 sei. Die folgenden Sätze, mit Ausnahme von Proposition 2.1.13, bis einschließlich Satz 2.1.15 stammen dabei aus Chap. 1.4-1.9 in [4].

2.1.4 Definition. Für $w \in W_0$ heißt

$$\mathrm{l}(w) = \min \{r \in \mathbb{N} : \text{Es existieren } s_1, \ldots, s_r \in S_0 \text{ mit } w = s_1 \ldots s_r\}$$

die Länge von w. Ein Ausdruck der Form

$$w = s_1 \ldots s_r$$

heißt reduziert, falls $r = \mathrm{l}(w)$.

2.1.5 Bemerkung. Für $w \in W_0$ gilt:

(i) $\mathrm{l}(w) = 1$ genau dann, wenn $w = s_\alpha \in S_0$.

(ii) $\mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(w^{-1})$

(iii) $\det(w) = (-1)^r$, falls $w = s_1 \ldots s_r$

Beweis. (i) ist klar.
(ii): Ist $w = s_1 \ldots s_r$, so ist $w^{-1} = s_r \ldots s_1$ und damit $\mathrm{l}(w^{-1}) \leq \mathrm{l}(w)$. Per Symmetrie folgt bereits Gleichheit.
(iii): Für $\alpha \in R$ ist $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Andererseits besteht der Kern der Linearform $(\cdot, \check{\alpha})$ aus Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und hat Dimension $\dim V_R - 1$. Also gilt: $\det(s_\alpha) = -1$. Die Multiplikativität der Determinante zeigt die Behauptung. □

2.1.6 Definition. Sei $w \in W_0$. Wir setzen

$$\mathrm{n}(w) = \#(R^+ \cap w^{-1}(R^-)).$$

Wir werden nun zeigen, dass $\mathrm{l} = \mathrm{n}$ ist.

2.1.7 Lemma. *Für $\alpha \in B$ und $w \in W_0$ gilt:*

(i) $\mathrm{n}(w) = \mathrm{n}(w^{-1})$

(ii) Ist $w(\alpha) \in R^+$, *so ist* $\mathrm{n}(ws_\alpha) = \mathrm{n}(w) + 1$.

(iii) Ist $w(\alpha) \in R^-$, *so ist* $\mathrm{n}(ws_\alpha) = \mathrm{n}(w) - 1$.

(iv) Ist $w^{-1}(\alpha) \in R^+$, *so ist* $\mathrm{n}(s_\alpha w) = \mathrm{n}(w) + 1$.

(v) Ist $w^{-1}(\alpha) \in R^-$, *so ist* $\mathrm{n}(s_\alpha w) = \mathrm{n}(w) - 1$.

Beweis. (i): $R^+ \cap w^{-1}(R^-) = w^{-1}(w(R^+) \cap R^-) = -w^{-1}(R^+ \cap w(R^-))$
(ii): Es folgt unter Benutzung von Lemma 2.1.1:

$$\begin{aligned} R^+ \cap (ws_\alpha)^{-1}R^- &= R^+ \cap s_\alpha w^{-1}R^- = s_\alpha(s_\alpha(R^+) \cap w^{-1}R^-) \\ &= s_\alpha((\{-\alpha\}\dot\cup R^+ \setminus \{\alpha\}) \cap w^{-1}R^-) \\ &= \{\alpha\} \dot\cup s_\alpha(R^+ \cap w^{-1}R^-) \end{aligned}$$

(iii):

$$R^+ \cap (ws_\alpha)^{-1}R^- = s_\alpha((\{-\alpha\}\dot\cup R^+ \setminus \{\alpha\}) \cap w^{-1}R^-) = s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\} \cap w^{-1}R^-)$$

Das heißt: $\{\alpha\}\dot\cup s_\alpha(R^+ \cap (ws_\alpha)^{-1}R^-) = R^+ \cap w^{-1}R^-$
(iv) und (v) folgen, aus (ii) und (iii), indem man w durch w^{-1} ersetzt und (i) anwendet. □

2.1.8 Corollar. *Sei* $w \in W_0$. *Dann ist* $\mathrm{n}(w) \leq \mathrm{l}(w)$.

Beweis. Es gilt $\mathrm{n}(1) = \mathrm{l}(1) = 0$. Nach Lemma 2.1.7 kann $\mathrm{n}(w)$ bei jeder Multiplikation mit einem s_α höchstens um 1 größer werden. Induktiv folgt die Behauptung. □

2.1.9 Satz. *Sei* $w = s_1 \dots s_r \in W_0$, $s_1 = s_{\alpha_1}, \dots, s_r = s_{\alpha_r} \in S_0$ *mit positiven Wurzeln* α_i *und* $\mathrm{n}(w) < r$. *Dann gibt es* $1 \leq i < j \leq r$ *mit:*

(i) $\alpha_i = s_{i+1} \dots s_{j-1}(\alpha_j)$

(ii) $s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_i \dots s_j$

(iii) $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_r$

Dabei folgen die Aussagen (ii) und (iii) auch ohne die Voraussetzung $\mathrm{n}(w) < r$ *aus der Gleichung in (i).*

Beweis. (i): Wegen $\mathrm{n}(w) < r$ gibt es nach Lemma 2.1.7 ein $j \leq r$ mit $s_1 \dots s_{j-1}(\alpha_j) \in R^-$. Aus $\alpha_j \in R^+$ folgt, dass es ein $i < j$ mit

$$s_i \dots s_{j-1}\,(\alpha_j) \in R^-$$

aber

$$s_{i+1} \dots s_{j-1}\,(\alpha_j) \in R^+.$$

Dies ist nach Lemma 2.1.1 aber nur dann möglich, wenn $\alpha_i = s_{i+1} \dots s_{j-1}(\alpha_j)$.
(ii) und (iii): Sei $w' = s_{i+1} \dots s_{j-1}$. Aus (i) und Lemma 1.1.14 folgt dann

$$s_i = s_{\alpha_i} = w' s_{\alpha_j} w'^{-1} = s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1}.$$

Dies impliziert

$$s_i \dots s_j = s_{i+1} \dots s_{j-1},$$

was (ii) und (iii) zur Folge hat. □

2.1.10 Corollar. *Sei $s_1 \dots s_r$ reduziert mit $s_i = s_{\alpha_i}$ und $\alpha_i \in B$. Dann sind die Elemente*

$$\{\alpha_1, s_1(\alpha_2), \dots, s_1 \dots s_{r-1}(\alpha_r)\}$$

paarweise verschieden.

Beweis. Angenommen zwei dieser Elemente wären gleich, das heißt, es existieren $1 \leq i < j \leq r$ mit

$$s_1 \dots s_{i-1}(\alpha_i) = s_1 \dots s_{j-1}(\alpha_j).$$

Dann wäre auch

$$-\alpha_i = s_i(\alpha_i) = s_{i+1} \dots s_{j-1}(\alpha_j)$$

und damit nach Satz 2.1.9 wegen $s_i = s_{\alpha_i} = s_{-\alpha_i}$

$$s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_r.$$

□

2.1.11 Corollar. *Für $w \in W_0$ ist* $\mathrm{n}(w) = \mathrm{l}(w)$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{n}(w) \leq \mathrm{l}(w)$ ist. Wäre $w = s_1 \dots s_r$ reduziert und $\mathrm{n}(w) < \mathrm{l}(w) = r$, könnten wir w nach Satz 2.1.9 als Produkt von $r-2$ Spiegelungen schreiben. □

Wir können zu $w \in W_0$ die positiven Wurzeln α mit $w(\alpha) \in R^-$ sogar explizit angeben:

2.1.12 Lemma. *Sei $w = s_1 \dots s_r$ reduziert, $s_i = s_{\alpha_i}$, $\beta_i = s_r \dots s_{i+1}(\alpha_i)$ für $1 \leq i < r$ und $\beta_r = \alpha_r$. Dann ist*

$$R^+ \cap w^{-1} R^- = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}.$$

Beweis. Wir zeigen dies per Induktion nach r. Für $r = 0$ ist die Aussage klar. Wir können also annehmen, dass für $w' = s_1 \dots s_{r-1}$ und ${\beta_i}' = s_{r-1} \dots s_{i+1}(\alpha_i)$ bereits gilt:

$$R^+ \cap w'^{-1} R^- = \{\beta'_1, \dots, \beta'_{r-1}\}$$

Für $1 \le i < r$ ist $\alpha_r \neq \beta'_i$, denn sonst wäre $s_{i+1} \dots s_{r-1}(\alpha_r) = \alpha_i$ und $s_1 \dots s_r$ nicht reduziert nach Satz 2.1.9. Wegen Lemma 2.1.1 ist deshalb $\beta_i = s_r(\beta'_i) \in R^+$. Nach Voraussetzung ist $\alpha_r = \beta_r \in R^+$. Wir haben also gesehen, dass

$$\{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subset R^+.$$

Weiterhin gilt $w(\beta_i) = w'(\beta'_i) \in R^-$ für $1 \le i < r$ und $w(\beta_r) = w's_r(\alpha_r) = -w'(\alpha_r) \in R^-$, denn $\alpha_r \notin \{\beta'_1, \dots, \beta'_{r-1}\}$, das heißt $w'(\alpha_r) \in R^+$. Insgesamt folgt:

$$\{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subset R^+ \cap w^{-1}R^-$$

Indem wir Corollar 2.1.10 auf w^{-1} anwenden, sehen wir, dass die β_i paarweise verschieden sind. Wegen $\#R^+ \cap w^{-1}R^- = l(w) = r$ folgt die Gleichheit. □

2.1.13 Proposition. *Seien $v, w \in W_0$ mit*

$$R^+ \cap v^{-1}R^- = R^+ \cap w^{-1}R^-.$$

Dann ist schon $v = w$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach $r = l(v) = l(w)$. Sei $v = s_1 \dots s_r$, $w = s'_1, \dots, s'_r$, $s_i = s_{\alpha_i}$ und $s'_i = s_{\beta_i}$. Nach Lemma 2.1.12 ist also

$$\{s_r \dots s_2(\alpha_1), \dots, \alpha_r\} = \{s'_r \dots s'_2(\beta_1), \dots, \beta_r\}.$$

Es gibt also ein $\sigma \in S_r$ mit

$$s_r \dots s_{i+1}(\alpha_i) = s'_r \dots s'_{\sigma(i)+1}(\beta_{\sigma(i)}) \text{ für alle } 1 \le i \le r.$$

Aus

$$\beta_{\sigma(r)} = s'_{\sigma(r)+1} \dots s'_r(\alpha_r) = s'_{\sigma(r)+1} \dots s'_r s_r s_r(\alpha_r)$$

folgt mit Satz 2.1.9

$$w = s'_1 \dots s'_r = s'_1 \dots s'_r s_r s_r = s'_1 \dots \hat{s'}_{\sigma(r)} \dots s'_r s_r.$$

Sei nun $w' = s'_1 \dots \hat{s'}_{\sigma(r)} \dots s'_r$ und $v' = s_1 \dots s_{r-1}$. Es genügt offenbar, $v' = w'$ zu zeigen. Dies folgt aus der Induktionsvoraussetzung und

$$\begin{aligned} R^+ \cap v'^{-1}R^- &= \{\alpha_{r-1}, \dots, s_{r-1} \dots s_2(\alpha_1)\} = s_r(R^+ \cap v^{-1}R^-) \setminus \{-\alpha_r\} \\ &= s_r(R^+ \cap w^{-1}R^-) \setminus \{-\alpha_r\} \\ &= s_r\{\alpha_r, s_r(\beta_r), \dots, s_r s'_r \dots \hat{s}_{\sigma(r)} \dots s'_2(\beta_1)\} \setminus \{-\alpha_r\} \\ &= \{\beta_r, \dots, s'_r \dots \hat{s}'_{\sigma(r)} \dots s'_2(\beta_1)\} = R^+ \cap w'^{-1}R^-. \end{aligned}$$

□

Wir können jetzt zeigen, dass (W_0, S_0) ein Coxeter System ist. Sei dazu

$$T = \{t_\alpha : \alpha \in B\},$$

F die freie Gruppe mit Erzeugendensystem T und π der durch $\pi(t_\alpha) = s_\alpha$ festgelegte Homomorphismus von F nach W_0. Zu einem Element $s_i = s_{\alpha_i}$ sei stets $t_i = t_{\alpha_i}$ der zugehörige Erzeuger von F und für $\alpha_i, \alpha_j \in B$ sei $m(\alpha_i, \alpha_j) = m(i, j)$ die Ordnung von $s_i s_j$ in W_0. Weiterhin sei N der kleinste Normalteiler, der alle Elemente der Form $(t_\alpha t_\beta)^{m(\alpha,\beta)}$ $(\alpha, \beta \in B)$ enthält. Wir müssen also zeigen:

$$W_0 \cong F/N$$

Wir stellen zunächst fest, dass aus $s_1 \dots s_r = 1$ mit Bemerkung 2.1.5 (iii) folgt, dass r gerade ist.

2.1.14 Lemma. *Sei $r = 2q$ eine gerade natürliche Zahl. Für alle $r' < r$ folge aus $s_1 \dots s_{r'} = 1$ schon $t_1 \dots t_{r'} \in N$. Dann folgt aus jeder Relation der Form $s_1 \dots s_r = 1$*

$$t_1 \dots t_r \in N$$

oder

$$s_1 \dots s_q = s_2 \dots s_{q+1}.$$

Beweis. Sei $s_1 \dots s_r = 1$. Dann gilt:

$$s_1 \dots s_{q+1} = s_r \dots s_{q+2}$$

Also ist die linke Seite nicht reduziert. Es gibt also Indizes $1 \leq i < j \leq q+1$ mit

$$s_1 \dots s_{q+1} = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_{q+1}$$

und daher

$$s_i \dots s_j = s_{i+1} \dots s_{j-1}$$

und

$$s_i \dots s_{j-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} = 1.$$

Dies ist ein Produkt von $2(j-i)$ Spiegelungen. Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle:
1. Fall: $2(j-i) < r$: Dann ist nach Voraussetzung $n = t_i \dots t_{j-1} t_j t_{j-1} \dots t_{i+1} \in N$. Es folgt unter Benutzung der Tatsache, dass $t_\alpha t_\alpha \in N$ für alle $\alpha \in B$:

$$\begin{aligned} t_1 \dots t_r &\equiv t_1 \dots t_r n \equiv t_1 \dots t_i n t_{i+1} \dots t_r \\ &\equiv t_1 \dots t_i t_i \dots t_{j-1} t_j t_{j-1} \dots t_{i+1} t_{i+1} \dots t_r \\ &\equiv t_1 \dots \hat{t}_i \dots \hat{t}_j \dots t_r \equiv 1 \mod N \end{aligned}$$

Die letzte Kongruenz folgt aus $s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_r = s_1 \dots s_r = 1$.
2. Fall: $2(j-i) \geq r$: Dies ist nur möglich, falls $i = 1$ und $j = q+1$. Dies bedeutet aber:

$$s_1 \dots s_q = s_2 \dots s_{q+1}$$

□

2.1.15 Satz. $W_0 \cong F/N$

Beweis. Weil W_0 von S_0 erzeugt wird, ist π surjektiv und aus der Definition der $m(\alpha, \beta)$ folgt $N \subset \ker(\pi)$. Die andere Inklusion zeigen wir induktiv: Sei

$$t_1^{\epsilon_1} \dots t_r^{\epsilon_r} \in \ker(\pi) \text{ mit } \epsilon_1, \dots, \epsilon_r \in \{\pm 1\},$$

das heißt $s_1 \dots s_r = 1$. Wegen $t_i^2 \in N$ für $1 \leq i \leq r$ genügt es, den Fall $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_r = 1$ zu betrachten.
Dann ist $r = 2q$ eine gerade natürliche Zahl. Ist $r = 2$, so heißt das $s_1 s_2 = 1$ und damit $s_1 = s_2$, also

$$t_1 t_2 = t_1^2 \in N.$$

Wir können induktiv annehmen, dass für jedes Element $t'_1 \dots t'_{r'} \in \ker(\pi)$ mit $r' < r$ schon $t'_1 \dots t'_{r'} \in N$ folgt. Außerdem können wir uns auf den Fall $r \geq 4$ beschränken. Insbesondere ist dann immer $q + 2 \leq r$. Wir können annehmen, dass

$$t_i \dots t_r t_1 \dots t_{i-1} \notin N \text{ für alle } 1 \leq i \leq r.$$

Andernfalls ist nämlich auch

$$t_1 \dots t_r \in N,$$

denn aus

$$t_i \dots t_r t_1 \dots t_{i-1} \in N$$

folgt

$$\begin{aligned} t_1 \dots t_r &= t_1 \dots t_{i-1} t_i \dots t_r t_1 \dots t_{i-1} t_{i-1}^{-1} \dots t_1^{-1} \\ &= (t_1 \dots t_{i-1}) t_i \dots t_r t_1 \dots t_{i-1} (t_1 \dots t_{i-1})^{-1} \in N. \end{aligned}$$

Wir wenden nun Lemma 2.1.14 auf die Gleichung

$$s_2 \dots s_r s_1 = 1$$

an und erhalten

$$s_2 \dots s_{q+1} = s_3 \dots s_{q+2}, \tag{2.1}$$

woraus

$$s_3 s_2 s_3 \dots s_{q+1} s_{q+2} s_{q+1} \dots s_4 = 1$$

folgt. Im Falle

$$n = t_3 t_2 t_3 \dots t_{q+1} t_{q+2} t_{q+1} \dots t_4 \in N$$

wäre auch

$$t_1 \dots t_r \equiv t_1 t_3 n t_4 \dots \hat{t}_{q+2} t_{q+3} \dots t_r \equiv t_1 \hat{t}_2 t_3 \dots \hat{t}_{q+2} \dots t_r \mod N. \tag{2.2}$$

Aus Gleichung (2.1) folgte

$$s_1 \hat{s}_2 s_3 \dots \hat{s}_{q+2} \dots s_r = s_1 \dots s_r = 1$$

und damit aus der Induktionsvoraussetzung und Gleichung (2.2) $t_1 \dots t_r \in N$. Wir dürfen also Lemma 2.1.14 anwenden und annehmen, dass bereits

$$s_3 s_2 \dots s_q = s_2 \dots s_{q+1}$$

gilt. Andererseits folgt aus

$$s_1 \dots s_r = 1$$

auch

$$s_1 \dots s_q = s_2 \dots s_{q+1}$$

und zusammen:

$$s_1 = s_3.$$

Wendet man obiges Verfahren auf die Gleichungen

$$s_1^{(j)} \dots s_r^{(j)} = 1$$

mit $s_i^{(j)} = s_{(i+j) \mod r}$ an, so folgt: $s_1 = s_3 \dots = s_{r-1}$ und $s_2 = s_4 \dots = s_r$. Wir sehen also

$$s_1 \dots s_r = (s_1 s_2)^q = 1$$

und damit folgt aus der Definition von N

$$t_1 \dots t_r = (t_1 t_2)^q \in N.$$

□

2.1.16 Satz. (W_0, S_0) *ist ein Coxeter-System.*

Beweis. Die Hauptarbeit haben wir schon mit Satz 2.1.15 geleistet. Wir wissen auch, dass für $\alpha \in B$ $m(\alpha, \alpha) = 1$ ist. Es bleibt also noch zu zeigen:

$$m(\alpha, \beta) \neq 1 \quad \text{für } \alpha \neq \beta$$

Wäre dies nicht nicht der Fall, so wäre $s_\alpha s_\beta(-\beta) = -\beta \in R^-$. Andererseits ist aber nach Lemma 2.1.1 $s_\alpha s_\beta(-\beta) = s_\alpha(\beta) \in R^+$. □

Als nächstes werden wir die Operation von W_0 auf V studieren. Dabei gehen wir vor wie in [5], Chap. 4-5 und 4-6. Corollar 2.1.20 ist Proposition 11-2 in [5]. Für $\alpha \in R$ sei

$$H_\alpha = \{v \in V : (v, \check{\alpha}) = 0\}$$

die zu α orthogonale Hyperebene und

$$\mathcal{H} = \{H_\alpha : \alpha \in R\} = \{H_\alpha : \alpha \in R^+\}$$

die Menge dieser Hyperebenen. Die Zusammenhangskomponenten von

$$V^\# = V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$$

heißen Weylkammern. Ist C eine Weylkammer, so ist

$$(C, \check{\alpha}) \subset \mathbb{R}_{<0} \text{ oder } (C, \check{\alpha}) \subset \mathbb{R}_{>0} \text{ für alle } \alpha \in R,$$

denn $(C, \check{\alpha}) \subset \mathbb{R}^\times$ und $(\cdot, \check{\alpha})$ ist stetig und damit ist das Bild einer Zusammenhangskomponente zusammenhängend. Wir sagen H_α trennt zwei Weylkammern C und D, falls für $c \in C, d \in D$ die Werte $(c, \check{\alpha})$ und $(d, \check{\alpha})$ unterschiedliches Vorzeichen haben. Nach obiger Überlegung hängt das nicht von der Wahl von c und d ab.

2.1.17 Lemma. *(i) $C_0 = \{v \in V : (v, \check{\alpha}) > 0$ für alle $\alpha \in R^+\}$ ist eine Weylkammer.*

(ii) W_0 operiert auf der Menge der Weylkammern.

(iii) Für jede Weylkammer C und $\alpha \in R$ haben wir

$$(C, \check{\alpha}) \subset \mathbb{R}_{<0} \text{ oder } (C, \check{\alpha}) \subset \mathbb{R}_{>0}.$$

Beweis. (i): Offensichtlich ist C_0 in $V^\#$ enthalten. Sei $\{v_\beta : \beta \in B\}$ die durch $(v_\beta, \check{\alpha}) = \delta_{\alpha,\beta}$ definierte Basis von V_R und $v = \sum_{\beta \in B} v_\beta$. Dann ist für $\check{\alpha} = \sum_{\beta \in B} n_\beta \check{\beta} \in \check{R}^+$

$$(v, \check{\alpha}) = \sum_{\beta \in B} n_\beta = \mathrm{ht}(\check{\alpha}) > 0.$$

Also ist C_0 nicht leer. Da C_0 konvex ist, ist C_0 auch zusammenhängend. Ist nun $v \in V^\# \setminus C_0$, so gibt es ein $\alpha \in R^+$ mit $(v, \check{\alpha}) < 0$. Das heißt v liegt in einer anderen Zusammenhangskomponente als C_0. Folglich ist C_0 bereits eine ganze Zusammenhangskomponente.
(ii): Da $(\cdot, \cdot)$ W_0-invariant ist, wird $V^\#$ von jedem $w \in W_0$ in sich selbst abgebildet. Da w aber ein Homöomorphismus ist, permutiert es die Zusammenhangshomponenten.
(iii) haben wir bereits oben gesehen. □

Jetzt können wir der Länge des Coxeter-Systems (W_0, S_0) eine weitere geometrische Bedeutung geben:

2.1.18 Satz. *Für alle $w \in W_0$ gilt:*

$$\mathrm{l}(w) = \#\{H \in \mathcal{H} : H \text{ trennt } C_0 \text{ und } wC_0\}$$

Beweis. Sei $\alpha \in R^+$. Dann trennt H_α C_0 und wC_0 genau dann, wenn $(wC_0, \check{\alpha}) = (C_0, w^{-1}\check{\alpha}) \subset \mathbb{R}_{<0}$ oder mit anderen Worten $w^{-1}(\alpha) \in R^-$. Es folgt:

$$\#\{H \in \mathcal{H} : H \text{ trennt } C_0 \text{ und } wC_0\} = \#(R^+ \cap wR^-) = \mathrm{l}(w^{-1}) = \mathrm{l}(w)$$

□

2.1.19 Satz. *W_0 operiert einfach transitiv auf der Menge der Weylkammern.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Transitivität der Operation. Sei C eine Weylkammer. Es genügt zu zeigen, dass es ein $w \in W_0$ gibt mit $wC = C_0$. Wir fixieren ein $v_0 \in C_0$, ein $v \in C$ und dazu ein $w \in W_0$, so dass $\|w(v) - v_0\|$ minimal ist. Es genügt zu zeigen, dass $w(v) \in C_0$, denn dann ist $wC \cap C_0 \neq \emptyset$ und weil beides Zusammenhangskomponenten sind, erhalten wir $wC = C_0$.
Angenommen, $w(v)$ wäre kein Element von C_0. Dann gäbe es ein $\alpha \in R^+$ mit $(w(v), \check{\alpha}) < 0$. Wir erhielten dann aber

$$\begin{aligned}
\|s_\alpha w(v) - v_0\|^2 &= \langle s_\alpha w(v) - v_0, s_\alpha w(v) - v_0\rangle \\
&= \langle s_\alpha w(v), s_\alpha w(v)\rangle - 2\langle s_\alpha w(v), v_0\rangle + \langle v_0, v_0\rangle \\
&= \langle w(v), w(v)\rangle - 2\langle w(v) - (w(v), \check{\alpha})\alpha, v_0\rangle + \langle v_0, v_0\rangle \\
&= \langle w(v), w(v)\rangle - 2\langle w(v), v_0\rangle + \langle v_0, v_0\rangle + 2(w(v), \check{\alpha})\langle \alpha, v_0\rangle \\
&= \langle w(v) - v_0, w(v) - v_0\rangle + 2(w(v), \check{\alpha})\langle \alpha, v_0\rangle \\
&< \|w(v) - v_0\|^2
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Minimalität von $\|w(v) - v_0\|$.
Dass die Operation frei ist, zeigen wir zuerst für einen Spezialfall. Sei $w \in W_0$ mit $wC_0 = C_0$. Dann gibt es keine Hyperebenen, welche C_0 und wC_0 trennen. Daher folgt $\mathrm{l}(w) = 0$ und damit $w = 1$. Sei nun $C = w'C_0$ eine beliebige Weylkammer und $wC = C$. Dann folgt aus $ww'C_0 = w'C_0$: $w'^{-1}ww'C_0 = C_0$ und damit aus obigem Spezialfall $w = 1$. □

Die Transitivität der Operation hat noch eine interessante Konsequenz für minimale Wurzeln:

2.1.20 Corollar. *Sei $\mathcal{R}$ irreduzibel und $\alpha \in R$ die minimale Wurzel. Dann ist*

$$\|\check{\alpha}\| \geq \|\check{\beta}\| \textit{ für alle } \beta \in R.$$

Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die Norm des dualen Wurzeldatums auf $\check{V}$.

Beweis. Sei $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ das vom dualen Wurzeldatum auf $\check{V}$ induzierte Skalarprodukt und $\beta \in R$. Dann gibt es eine Weylkammer $\check{C} \subset \check{V}$ mit $\check{\beta} \in \overline{\check{C}}$. Weil W_0 transitiv auf den Weylkammern von $\check{V}$ operiert, gibt es ein $w \in W_0$ mit $w\check{C} = -\check{C}_0$ und daher $w(\check{\beta}) \in -\overline{\check{C}}_0 = \{\check{v} \in \check{V} : \langle\langle \check{\gamma}, \check{v}\rangle\rangle \leq 0 \text{ für alle } \gamma \in R^+\}$. Da das Skalarprodukt und damit die Norm W_0-invariant ist, können wir also o.B.d.A. annehmen, dass β schon in $-\overline{\check{C}}_0$ liegt. Nach Definition von α ist $\check{\alpha} \preceq \check{\beta}$ und daher

$$\langle\langle \check{v}, \check{\beta} - \check{\alpha}\rangle\rangle \geq 0 \text{ für alle } \check{v} \in \overline{\check{C}}_0.$$

Nach Corollar 1.3.8 ist $\check{\alpha} \in -\overline{\check{C}}_0$. Wir können die Ungleichung also auf $-\check{\alpha}$ und $-\check{\beta}$ anwenden. Damit folgt:

$$\langle\langle \check{\alpha}, \check{\alpha}\rangle\rangle \geq \langle\langle \check{\alpha}, \check{\beta}\rangle\rangle \geq \langle\langle \check{\beta}, \check{\beta}\rangle\rangle$$

□

2.2 Die affine Weylgruppe

2.2.1 Definition. Die Weylgruppe W ist das semidirekte Produkt von W_0 und X bezüglich der Inklusion $W_0 \subset \mathrm{Aut}(X)$.
Analog definieren wir die affine Weylgruppe W_{aff} als das semidirekte Produkt von W_0 und Q bezüglich der Inklusion $W_0 \subset \mathrm{Aut}(Q)$.

Da Q eine Untergruppe von X ist, können wir uns die W_{aff} als Untergruppe von W vorstellen. Da wir die Verknüpfung in W_{aff} multiplikativ schreiben, uns X aber als additive Gruppe vorstellen, schreiben wir e^x, wenn wir ein Element $x \in X$ als Element von W beziehungsweise W_{aff} auffassen. Dann gilt

$$e^x e^{x'} = e^{x+x'} \text{ für alle } x, x' \in X.$$

Des weiteren gilt definitionsgemäß

$$w_0 e^x = e^{w_0(x)} w_0 \text{ für alle } w_0 \in W_0, x \in X.$$

Im Folgenden schreiben wir $W = W_0 e^X$ und $W_{aff} = W_0 e^Q$. Ein beliebiges Element von W hat die Form $w_0 e^x$ mit $w_0 \in W_0$ und $x \in X$. Außerdem kürzen wir $s_\alpha e^{k\alpha}$ durch $s_{\alpha,k}$ ab. Dabei gilt

$$s_{\alpha,k}^2 = s_\alpha e^{k\alpha} s_\alpha e^{k\alpha} = s_\alpha^2 e^{-k\alpha+k\alpha} = 1.$$

Wir wollen ähnlich wie im letzten Abschnitt zeigen, dass W_{aff} eine Coxeter-Gruppe ist. Genauer werden wir zeigen, dass (W_{aff}, S) ein Coxeter-System ist, wobei

$$S = S_0 \cup \{s_\alpha e^\alpha : \alpha \in R_m\}.$$

Dazu führen wir zunächst den Begriff des affinen Wurzeldatums ein und verallgemeinern den Höhenbegriff. Die Idee zu dieser Herangehensweise, die wir auf nicht irreduzible Wurzeldaten verallgemeinern, und das wichtige Lemma 2.2.5 entstammen [5] Kapitel 11-4. Bei den darauf folgenden Schritten handelt es sich um eine Adaption der analogen Aussagen für die endliche Weylgruppe in Kapitel 2.1.

2.2.2 Definition. $\check{R}_{aff} = \check{R} \times \mathbb{Z} \subset \check{X} \times \mathbb{Z}$ heißt das zu R gehörige affine Wurzeldatum. Dabei seien

$$\check{R}_{aff}^+ = \check{R}^+ \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \check{R}^- \times \mathbb{Z}_{>0} = \check{R} \times \mathbb{Z}_{>0} \cup \check{R}^+ \times \{0\} \text{ und}$$

$$\check{R}_{aff}^- = \check{R}^- \times \mathbb{Z}_{\leq 0} \cup \check{R}^+ \times \mathbb{Z}_{<0} = \check{R} \times \mathbb{Z}_{<0} \cup \check{R}^- \times \{0\}$$

die zugehörigen Mengen von positiven beziehungszweise negativen affinen Wurzeln.

Wir schreiben auch $s_{\alpha,k} = s_{(\check{\alpha},k)}$. Wir haben in Kapitel 2.1 ausgenutzt, dass W_0 auf R operiert. Deshalb definieren wir nun auch eine Operation von W und damit von W_{aff} auf $\check{X} \times \mathbb{Z}$, die sich zu einer Operation auf $\check{R}_{aff}$ einschränken wird. Für $w_0 \in W_0, x \in X, \check{x} \in \check{X}$ und $k \in \mathbb{Z}$ setzen wir:

$$w_0 e^x(\check{x}, k) = (w_0(\check{x}), k - (x, \check{x}))$$

Warum wir hier ein Minuszeichen verwenden, wird erst später, nämlich durch Satz 2.2.18, ersichtlich. Wir erhalten so in der Tat eine Gruppenoperation, denn für $w_0' \in W_0$ und $x' \in X$ ist

$$\begin{aligned} w_0 e^x(w_0' e^{x'}(\check{x}, k)) &= w_0 e^x(w_0'(\check{x}), k - (x', \check{x})) \\ &= (w_0 w_0'(\check{x}), k - (x', \check{x}) - (x, w_0(\check{x}))) \\ &= (w_0 w_0'(\check{x}), k - (w_0'^{-1}(x) + x', \check{x})) \\ &= (w_0 w_0' e^{w_0'^{-1}(x)} e^{x'})(\check{x}, k) \\ &= (w_0 e^x w_0' e^{x'})(\check{x}, k) \end{aligned}$$

Wegen $W_0 \check{R} = \check{R}$ ist die Einschränkung auch eine Operation auf $\check{R}_{aff}$.

2.2.3 Lemma. *Sei $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}_{aff}$ und $w = w_0 e^x \in W$. Dann ist*

$$w s_{\alpha,k} w^{-1} = s_{w(\check{\alpha},k)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} w s_{\alpha,k} w^{-1} &= w_0 e^x s_\alpha e^{k\alpha} e^{-x} w_0^{-1} = w_0 s_\alpha w_0^{-1} e^{w_0(s_\alpha(x) - x + k\alpha)} \\ &= s_{w_0(\alpha)} e^{(k-(x,\check{\alpha}))w_0(\alpha)} = s_{w(\check{\alpha},k)} \end{aligned}$$

□

Wir verallgemeinern noch die Höhenfunktion auf affine Wurzeldaten. Sei ab jetzt immer $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{R}_n$ ($\mathcal{R}_i = (Q_i, \check{Q}_i, R_i, \check{R}_i, B_i)$) eine Zerlegung in irreduzible Wurzeldaten mit minimalen Elementen $\alpha_0^{(i)} \in R_i$. Wir setzen für $\alpha \in R_i$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{ht}(\check{\alpha}, k) = \mathrm{ht}(\check{\alpha}) + k(2 \cdot \mathrm{ht}(-\alpha_0^{(i)}) + 1).$$

Per Konstruktion ist eine affine Wurzel genau dann positiv, wenn sie positive Höhe hat. Da $-\alpha_0^{(i)}$ das eindeutig bestimmte Element maximaler Höhe in $\check{R}_i$ ist, ist für $\check{\beta} \in R_i$ und $l \in \mathbb{Z}$ $\mathrm{ht}(\check{\alpha}, k) \leq \mathrm{ht}(\check{\beta}, l)$ äquivalent zu $l > k$ oder $l = k$ und $\mathrm{ht}(\check{\alpha}) \leq \mathrm{ht}(\check{\beta})$.

Als erstes zeigen wir, dass W_{aff} von S erzeugt wird. Dazu sei zunächst W'_{aff} die von S erzeugte Untergruppe von W_{aff}. Außerdem sei

$$\check{B}_{aff} = \{(\check{\beta}, 0) : \beta \in B\} \cup \{(\check{\alpha}, 1) : \alpha \in R_m\}$$

die zu S korrespondierende Teilmenge von $\check{R}_{aff}$.

2.2.4 Lemma. *Sei $\mathcal{R}$ irreduzibel und $\alpha, \beta \in R$. Dann gibt es ein $w \in W_0$ mit*

$$(w(\alpha), \check{\beta}) \neq 0.$$

Beweis. Sei U der von $W_0(\check{\alpha})$ erzeugte Unterraum von $\check{V}$ und $U^\perp$ sein orthogonales Komplement. Dann ist jede Kowurzel schon in U oder in $U^\perp$ enthalten. Denn gäbe es ein $\check{\gamma} = u + u^\perp \in \check{R}$ mit $u, u^\perp \neq 0$, dann wären u und $u^\perp$ wegen $s_\gamma(\gamma) = -\gamma = -u - u^\perp$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren von s_γ zum Eigenwert -1. Also ist

$$\check{R} = (\check{R} \cap U) \dot{\cup} (\check{R} \cap U^\perp).$$

Wegen $\check{\alpha} \in \check{R} \cap U \neq \emptyset$ muss $\check{R} \cap U^\perp$ wegen der Irreduzibilität von R und Bemerkung 1.2.4 schon leer sein. Das heißt, wir finden ein $w \in W_0$ mit $\langle\langle \check{\beta}, w^{-1}(\check{\alpha}) \rangle\rangle \neq 0$ und daher $(w(\alpha), \check{\beta}) \neq 0$. □

2.2.5 Lemma. *Sei $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff} \setminus \check{B}_{aff}$. Dann gibt es ein $w \in W'_{aff}$ mit*

$$w(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff} \textit{ und } \mathrm{ht}(w(\check{\alpha}, k)) < \mathrm{ht}(\check{\alpha}, k).$$

Beweis. Wir können im Folgenden annehmen, dass R irreduzibel ist, denn die Höhenfunktion von R setzt die der irreduziblen Komponenten von $\mathcal{R}_e$ fort und wir können die Elemente der affinen Weylgruppen der irreduziblen Komponenten auch als Elemente von W_{aff} auffassen. Sei α_0 die minimale Wurzel in R. In diesem Beweis sei mit $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ und $\| \cdot \|$ stets die Norm beziehungsweise das Skalarprodukt des dualen Wurzeldatums auf $\check{V}$ gemeint.
Da W_0 von $S_0 \subset S$ erzeugt wird, wissen wir bereits $W_0 \subset W'_{aff}$. Im Falle $k = 0$ folgt die Behauptung dann aus Lemma 2.1.2. Wir können also im Folgenden $k \geq 1$ annehmen. Nach Lemma 2.2.4 gibt es ein $w \in W_0$ mit

$$(w(\alpha), \check{\alpha}_0) \neq 0.$$

Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle:
1. Fall: $w(\check{\alpha}) = \pm\check{\alpha}_0$: Ist schon $\check{\alpha} = \check{\alpha}_0$, so folgt wegen $(\check{\alpha}, k) \notin \check{B}_{aff}$ $k \geq 2$ und damit

$$s_\alpha e^\alpha(\check{\alpha}, k) = (-\check{\alpha}, k - (\alpha, \check{\alpha})) = (-\check{\alpha}, k - 2) \in \check{R}^+,$$

denn $-\check{\alpha}$ ist positiv. Außerdem ist klar, dass die Höhe durch Anwenden von $s_\alpha e^\alpha$ kleiner wird. Aus $s_\alpha e^\alpha \in S$ folgt in diesem Fall die Behauptung. Ist nun $\check{\alpha} \neq \check{\alpha}_0$, so folgt $\mathrm{ht}(\check{\alpha}_0) < \mathrm{ht}(\check{\alpha})$. Durch Übergang zu $w s_\alpha$ können wir $w(\check{\alpha}) = \check{\alpha}_0$ annehmen. Damit erhalten wir

$$\mathrm{ht}(w(\check{\alpha}, k)) = \mathrm{ht}(\check{\alpha}_0, k) < \mathrm{ht}(\check{\alpha}, k)$$

und wegen $k \geq 1$ auch $w(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+$.
2.Fall: $w(\check{\alpha}) \neq \pm\check{\alpha}_0$: Nach Lemma 1.2.5 gilt

$$1 \leq (w(\alpha), \check{\alpha}_0)(\alpha_0, w(\check{\alpha})) \leq 3$$

und mit Hilfe von Corollar 2.1.20 folgt weiter

$$\frac{(w(\alpha),\check{\alpha}_0)}{(\alpha_0,w(\check{\alpha}))}=\frac{2\langle\langle w(\check{\alpha}),\check{\alpha}_0\rangle\rangle}{\langle\langle w(\check{\alpha}),w(\check{\alpha})\rangle\rangle}\frac{\langle\langle\check{\alpha}_0,\check{\alpha}_0\rangle\rangle}{2\langle\langle w(\check{\alpha}),\check{\alpha}_0\rangle\rangle}=\frac{\langle\langle\check{\alpha}_0,\check{\alpha}_0\rangle\rangle}{\langle\langle w(\check{\alpha}),w(\check{\alpha})\rangle\rangle}\geq 1.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $(\alpha_0, w(\check{\alpha})) = \pm 1$. Indem wir gegebenenfalls zu ws_α übergehen, können wir $(\alpha_0, w(\check{\alpha})) = 1$ annehmen. Dann folgt

$$s_{\alpha_0}e^{\alpha_0}w(\check{\alpha},k)=(s_{\alpha_0}w(\check{\alpha}),k-(\alpha_0,w(\check{\alpha})))=(s_{\alpha_0}w(\check{\alpha}),k-1).$$

Ist $s_{\alpha_0}w(\check{\alpha}) \in \check{R}^+$, so ist wegen $s_{\alpha_0}e^{\alpha_0} \in S \subset W'_{aff}$ nichts mehr zu zeigen. Andernfalls wenden wir noch s_β an, wobei $\beta = s_{\alpha_0}w(\alpha)$. □

2.2.6 Corollar. *Sei $(\check{\alpha},k) \in \check{R}^+_{aff}$. Dann gibt es ein $w \in W'_{aff}$ mit $w(\check{\alpha},k) \in \check{B}_{aff}$.*

Beweis. Dies folgt per Induktion nach $\mathrm{ht}(\check{\alpha},k)$ aus Lemma 2.2.5. Ist $\mathrm{ht}(\check{\alpha},k) = 1$, so ist $k = 0$ und damit $\alpha \in B$, also $(\check{\alpha},k) \in \check{B}_{aff}$. Ist nun $(\check{\alpha},k) \in \check{R}_{aff} \setminus \check{B}_{aff}$, so finden wir ein $w \in W'_{aff}$, so dass wir die Induktionsvoraussetzung auf $w(\check{\alpha},k)$ anwenden können. □

2.2.7 Satz. *W_{aff} wird erzeugt von S.*

Beweis. Weil W_0 von $S_0 \subset S$ erzeugt wird, ist W_0 in W'_{aff} enthalten. Wir müssen also noch $e^Q \subset W'_{aff}$ zeigen. Dafür genügt es, $e^\beta \in W'_{aff}$ für alle $\beta \in B$ zu zeigen. Nach Corollar 2.2.6 gibt es ein $w = w_0e^x \in W'_{aff}$ mit

$$w(\check{\beta},1)=(w_0(\check{\beta}),1-(x,\check{\beta}))\in\check{B}_{aff}.$$

das heißt, es gilt $w_0(\check{\beta}) \in \check{B}$ und $(x,\check{\beta}) = 1$ oder $w_0(\check{\beta}) \in (R_m)\check{}$ und $(x,\check{\beta}) = 0$. Aus Lemma 2.2.3 folgt

$$ws_\beta e^\beta w^{-1}=s_{w_0(\beta)}e^{(1-(x,\check{\beta}))w_0(\beta)}$$

und aus obigen Überlegungen erhalten wir

$$ws_\beta e^\beta w^{-1}=s_{w_0(\beta)} \text{ und } w_0(\beta)\in B$$

oder

$$ws_\beta e^\beta w^{-1}=s_{w_0(\beta)}e^{w_0(\beta)} \text{ und } w_0(\beta)\in R_m.$$

Also folgt $s_\beta e^\beta \in W'_{aff}$ und damit $e^\beta \in W'_{aff}$. □

Wie in Kapitel 2.1 können wir jetzt die Längenfunktion auf W_{aff} definieren.

$$\mathrm{l}(w)\;=\min\{r\in\mathbb{N}:\text{Es existieren } s_1,\dots,s_r\ \in S \text{ mit } w=s_1\dots s_r\}$$

Wie bei der endlichen Weylgruppe sieht man

$$\mathrm{l}(w)=\mathrm{l}(w^{-1}) \text{ für alle } w\in W_{aff}.$$

Wieder nennen wir einen Ausdruck der Form

$$w = s_1 \dots s_r$$

reduziert, falls $r = \mathrm{l}(w)$. Für $w \in W$ können wir weiter

$$\mathrm{n}(w) = \#\check{R}^+_{aff} \cap w^{-1}\check{R}^-_{aff}$$

definieren. Man beachte, dass n mit W im Allgemeinen einen größeren Definitionsbereich als l hat. Dies werden wir später benutzen, um die Länge des Coxeter-Systems (W_{aff}, S) auf W fortzusetzen. Um zeigen zu können, dass die Einschränkung von n auf W_{aff} mit l übereinstimmt, benötigen wir zuerst eine Analogie zur Eigenschaft der Basis B.

2.2.8 Satz. *Sei $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}_{aff} \cap (\check{R}_i \times \mathbb{Z})$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $n_{\beta,l} \in \mathbb{Z}$ mit*

$$(\check{\alpha}, k) = \sum_{(\check{\beta},l) \in \check{B}_{aff} \cap (\check{R}_i \times \mathbb{Z})} n_{\beta,l}(\check{\beta}, l).$$

Dabei haben alle $n_{\beta,l}$ das gleiche Vorzeichen und $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$ genau dann, wenn alle $n_{\beta,l} \geq 0$.

Beweis. Offenbar können wir R als irreduzibel voraussetzen. Sei α_0 das minimale Element von R.
Eindeutigkeit: Angenommen, wir hätten bereits eine Darstellung

$$(\check{\alpha}, k) = \sum_{\beta \in B} n_{\beta,0}(\check{\beta}, 0) + n_{\alpha_0,1}(\check{\alpha}_0, 1).$$

Dann folgt $n_{\alpha_0,1} = k$ und daher

$$\check{\alpha} - k\check{\alpha}_0 = \sum_{\beta \in B} n_{\beta,0}\check{\beta}.$$

Da $\check{B}$ eine Basis von $\check{Q}$ ist, sind die $n_{\beta,0}$ eindeutig bestimmt. Definiert man die $n_{\beta,0}$ und $n_{\alpha_0,1}$ so wie im Eindeutigkeitsbeweis und summiert sie auf, folgt die Existenz.
Wir zeigen als nächstes, dass alle Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben. Dafür dürfen wie o.B.d.A. $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$ annehmen. Ist $k = 0$, so ist per Definition $\check{\alpha} = \sum_{\beta \in B} n_{\beta,0}\check{\beta} \in \check{R}^+$ und damit $n_{\beta,0} \geq 0$ für alle $\beta \in B$.
Ist hingegen $k \geq 1$, so sind die Koeffizienten in den Basisentwicklungen von $\check{\alpha} - \check{\alpha}_0$ und $-\check{\alpha}_0$ nicht negativ. Das heißt die $n_{\beta,0}$ sind als Entwicklungskoeffizienten von

$$\check{\alpha} - k\check{\alpha}_0 = (\check{\alpha} - \check{\alpha}_0) - (k-1)\check{\alpha}_0$$

nicht negativ. Außerdem ist $n_{\alpha_0,1} = k > 0$. Das heißt alle $n_{\beta,l}$ sind nicht negativ.
Wir haben ebenso eine Richtung der Äquivalenz am Ende des Satzes gezeigt. Ist hingegen $(\check{\alpha}, k) \notin \check{R}^+_{aff}$, so ist $-(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$ und daher sind alle $n_{\beta,l} \leq 0$. Wegen $(\check{\alpha}, k) \neq 0$ muss schon ein $n_{\beta,l}$ kleiner als 0 sein. Dies zeigt die Äquivalenz am Ende des Satzes. $\square$

Am Beweis des letzten Satzes kann man erkennen, warum es sinnvoll ist, eine Operation von W auf $\check{R}_{aff}$ statt $R \times \mathbb{Z}$ zu betrachten. Die obige Eigenschaft beruht nämlich darauf, dass das minimale Element eines irreduziblen Wurzeldatums zur Kowurzel minimaler Höhe gehört.
Mit diesem Resultat können wir das Analogon zu Lemma 2.1.1 formulieren, das zeigt, dass l und n ausgewertet an einem Erzeuger aus S übereinstimmen.

2.2.9 Lemma. *Sei $s = s_{\alpha,k} \in S$. Dann gilt:*

(i) $\check{R}^+_{aff} \cap s^{-1}\check{R}^-_{aff} = \{(\check{\alpha}, k)\}$

(ii) $s(\check{R}^+_{aff} \setminus \{(\check{\alpha}, k)\}) = \check{R}^+_{aff} \setminus \{(\check{\alpha}, k)\}$

Beweis. (i): Ist $s \in S_0$, so folgt die Aussage aus Lemma 2.1.1. Andernfalls ist $\alpha \in R_m$ und $k = 1$. Dann ist

$$s(\check{\alpha}, 1) = (-\check{\alpha}, 1 - (\alpha, \check{\alpha})) = (-\check{\alpha}, -1) \in \check{R}^-_{aff}.$$

Wir müssen also zeigen, dass für jedes weitere Paar $(\check{\beta}, l) \in \check{R}^+_{aff}$

$$s(\check{\beta}, l) \in \check{R}^+_{aff}$$

gilt. Ist β orthogonal zu α, so ist $s(\check{\beta}, l) = (\check{\beta}, l)$. Wir können also annehmen, dass R irreduzibel ist. Sei

$$(\check{\beta}, l) = \sum_{\gamma \in B} n_{\gamma,0}(\check{\gamma}, 0) + l(\check{\alpha}, 1).$$

Dann gibt es ein $\gamma \in B$ mit $n_{\gamma,0} > 0$, denn sonst wäre $(\check{\beta}, l) = (l\check{\alpha}, l)$ und damit $l = 1$, da R reduziert ist. Das Element $(\check{\alpha}, 1)$ hatten wir jedoch ausgenommen. Damit folgt aus Satz 2.2.8

$$\begin{aligned}
s(\check{\beta}, l) &= (s_\alpha(\sum_{\gamma \in B} n_{\gamma,0}\check{\gamma} + l\check{\alpha}), l - (\alpha, \check{\beta})) \\
&= (\sum_{\gamma \in B} n_{\gamma,0}(\check{\gamma} - (\alpha, \check{\gamma})\check{\alpha}) + l\check{\alpha} - l(\alpha, \check{\alpha})\check{\alpha}, l - (\alpha, \check{\beta})) \\
&= (\check{\beta} - (\alpha, \check{\beta})\check{\alpha}, l - (\alpha, \check{\beta})) = (\check{\beta}, l) - (\alpha, \check{\beta})(\check{\alpha}, 1) \in \check{R}^+_{aff},
\end{aligned}$$

denn der einzige Koeffizient, der sich verändert hat, ist der von $(\check{\alpha}, 1)$.
(ii): Wegen $(\check{\alpha}, k) = s(-\check{\alpha}, -k)$ und der Injektivität von s ist

$$(\check{\alpha}, k) \notin s\check{R}^+_{aff}.$$

Damit folgt aus Teil (i)

$$s(\check{R}^+_{aff} \setminus \{(\check{\alpha}, k)\}) \subset \check{R}^+_{aff} \setminus \{(\check{\alpha}, k)\}.$$

Daher ist wegen $s^2 = 1$ aber auch

$$\check{R}^+_{aff} \setminus \{(\check{\alpha}, k)\} = ss(\check{R}^+_{aff} \setminus \{(\check{\alpha}, k)\}) \subset s(\check{R}^+_{aff} \setminus \{(\check{\alpha}, k)\}).$$

□

Damit können wir weiter wie in Kapitel 2.1 argumentieren:

2.2.10 Lemma. *Für* $(\check{\alpha}, k) \in \check{B}_{aff}$ *und* $w \in W$ *gilt:*

(i) $\mathrm{n}(w) = \mathrm{n}(w^{-1})$

(ii) Ist $w(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$*, so ist* $\mathrm{n}(ws_{\alpha,k}) = \mathrm{n}(w) + 1$.

(iii) Ist $w(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^-_{aff}$*, so ist* $\mathrm{n}(ws_{\alpha,k}) = \mathrm{n}(w) - 1$.

(iv) Ist $w^{-1}(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$*, so ist* $\mathrm{n}(s_{\alpha,k}w) = \mathrm{n}(w) + 1$.

(v) Ist $w^{-1}(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^-_{aff}$*, so ist* $\mathrm{n}(s_{\alpha,k}w) = \mathrm{n}(w) - 1$.

Beweis. Der Beweis verläuft genau wie der von Lemma 2.1.7 unter Benutzung von Lemma 2.2.9 (ii) statt Lemma 2.1.1. □

Die folgenden Sätze beweist man alle wie im Fall der endlichen Weylgruppe. Wir listen deshalb nur die Resultate auf:

2.2.11 Satz. *Sei* $w = s_1 \dots s_r \in W_{aff}$*,* $s_1 = s_{\alpha_1,k_1}, \dots, s_r = s_{\alpha_r,k_r} \in S$ *und* $\mathrm{n}(w) < r$*. Dann gibt es* $1 \leq i < j \leq r$ *mit:*

(i) $(\check{\alpha}_i, k_i) = s_{i+1} \dots s_{j-1}(\check{\alpha}_j, k_j)$

(ii) $s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_i \dots s_j$

(iii) $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_r$

Dabei folgen die Aussagen (ii) und (iii) auch ohne die Voraussetzung $\mathrm{n}(w) < r$ *aus der Gleichung in (i).*

2.2.12 Corollar. *Für* $w \in W_{aff}$ *ist* $\mathrm{n}(w) = \mathrm{l}(w)$.

Wir schreiben ab jetzt immer $\mathrm{l}(w)$, selbst dann, wenn w in W aber nicht in W_{aff} enthalten ist.

2.2.13 Lemma. *Sei* $w \in W_{aff}$ *und* $w = s_1 \dots s_r$ *eine reduzierter Ausdruck,* $s_i = s_{\alpha_i,k_i}$ *mit* $(\check{\alpha}_i, k_i) \in \check{R}^+_{aff}$ *und* $(\check{\beta}_i, l_i) = s_r \dots s_{i+1}(\check{\alpha}_i, k_i)$ *für* $1 \leq i < r$ *und* $(\check{\beta}_r, l_r) = (\check{\alpha}_r, k_r)$*. Dann ist*

$$\check{R}^+_{aff} \cap w^{-1}\check{R}^-_{aff} = \{(\check{\beta}_1, l_1), \dots, (\check{\beta}_r, l_r)\}$$

und die $(\check{\beta}_i, l_i)$ *sind paarweise verschieden.*

2.2.14 Satz. *Seien* $v, w \in W_{aff}$ *mit*

$$\check{R}^+_{aff} \cap v^{-1}\check{R}^-_{aff} = \check{R}^+_{aff} \cap w^{-1}\check{R}^-_{aff}.$$

Dann ist schon $v = w$.

2.2.15 Corollar. *Die Längenfunktion von W_{aff} setzt die von W_0 fort.*

Beweis. Sei $w \in W_0$ und $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$. Dann gilt

$$w(\check{\alpha}, k) = (w(\check{\alpha}), k).$$

Das heißt $w(\check{\alpha}, k)$ ist genau dann negativ, wenn $k = 0$ ist und $w(\check{\alpha})$ negativ ist. Wir haben also eine Bijektion

$$R^+ \cap w^{-1}R^- \xrightarrow{\cong} \check{R}^+_{aff} \cap w^{-1}\check{R}^-_{aff}.$$

□

2.2.16 Satz. *(W_{aff}, S) ist ein Coxeter-System.*

Wir fahren nun fort, indem wir eine Operation von W auf V betrachten. Für $w = w_0 e^x \in W$ und $v \in V$ setzen wir

$$w_0 e^x(v) = w_0(v) + w_0(x).$$

Man beachte, dass e^x dann die Translation um x ist.
Für alle $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}_{aff}$ setzen wir $f_{(\check{\alpha},k)}(v) = f_{\alpha,k}(v) = (v, \check{\alpha}) + k$. Weiter sei

$$H_{\alpha,k} = \{v \in V : f_{\alpha,k}(v) = 0\}$$

die zu $(\check{\alpha}, k)$ gehörige affine Hyperebene. Die Menge dieser Hyperebenen bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_{aff}$. Wegen $H_{\alpha,k} = H_{-\alpha,-k}$ ist $\mathcal{H}_{aff} = \{H_{\alpha,k} : (\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}\}$. Die Zusammenhangskomponenten von

$$V^0 = V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}_{aff}} H = \{v \in V : f_{\alpha,k}(v) \notin \mathbb{Z} \text{ für alle } (\check{\alpha}, k) \in \check{R}_{aff}\}$$

heißen Alkoven.

2.2.17 Lemma. *(i) Für alle $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}_{aff}$ und alle Alkoven A ist $f_{\alpha,k}(A) \subset \mathbb{R}_{>0}$ oder $f_{\alpha,k}(A) \subset \mathbb{R}_{<0}$.*

(ii) W operiert auf der Menge der Alkoven.

(iii) $A_0 = \{v \in V : 0 < (v, \check{\alpha}) < 1$ für alle $\alpha \in R^+\}$ ist ein Alkoven.

Beweis. (i): Nach Definition von V^0 ist $f_{\alpha,k}(v) \neq 0$ für alle $v \in V^0$. Da A zusammenhängend und $f_{\alpha,k}$ stetig ist, folgt die Behauptung.
(ii): Offensichtlich ist für $w \in W$ $w(V^0) \subset V^0$. Da w ein Homöomorphismus ist, werden die Zusammenhangskomponenten V^0 von W permutiert.
(iii): Definitionsgemäß haben wir $A_0 \subset V_0$. Sei $\{v_\beta : \beta \in B\}$ die durch $(v_\beta, \check{\alpha}) = \delta_{\alpha,\beta}$ definierte Basis von V_R, $c = \max\{\mathrm{ht}(\check{\alpha}) : \alpha \in R\}$ und $v = \frac{1}{2c} \sum_{\beta \in B} v_\beta$. Dann folgt aus

$$0 < (v, \check{\alpha}) = \frac{\mathrm{ht}(\check{\alpha})}{2c} < 1 \text{ für alle } \alpha \in R^+,$$

dass A_0 nicht leer ist. Weil A_0 konvex ist, ist A_0 auch zusammenhängend. Ist nun $v \in V^0 \setminus A_0$, so gibt es ein $\alpha \in R^+$ mit $f_{\alpha,0}(v) < 0$ oder $f_{\alpha,-1} > 0$. Nach Teil (i) liegt v damit ein in einer anderen Zusammenhangskomponente als A_0, das heißt A_0 ist schon eine ganze Zusammenhangskomponente. □

Seien A und A' zwei Alkoven mit Elementen $v \in A$ und $v' \in A'$. Wir sagen $H_{\alpha,k}$ trennt A und A', falls $f_{\alpha,k}(v)$ und $f_{\alpha,k}(v')$ unterschiedliche Vorzeichen haben. Dies ist wohldefiniert nach Teil (i) des vorigen Lemmas.

2.2.18 Satz. *Für alle $w \in W$ gilt*

$$\mathrm{l}(w) = \#\{H \in \mathcal{H}_{aff} : H \text{ trennt } A_0 \text{ und } wA_0\}.$$

Beweis. Sei $v_0 \in A_0$, $w = w_0 e^x$ und $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$. Dann ist $w(\check{\alpha}, k)$ genau dann negativ, wenn $k - (x, \check{\alpha})$ negativ ist oder wenn $w_0(\check{\alpha})$ negativ ist und $k = (x, \check{\alpha})$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$f_{w(\check{\alpha},k)}(v_0) = f_{(w_0(\check{\alpha}),k-(x,\check{\alpha}))}(v_0) = (v_0, w_0(\check{\alpha})) + k - (x, \check{\alpha}) < 0.$$

Das heißt, $w(\check{\alpha}, k)$ ist genau dann negativ, wenn

$$\begin{aligned} f_{w(\check{\alpha},k)}(v_0) &= (v_0, w_0(\check{\alpha})) + k - (x, \check{\alpha}) = (w_0^{-1}(v_0) - x, \check{\alpha}) + k \\ &= f_{\alpha,k}(e^{-x} w_0^{-1}(v_0)) = f_{\alpha,k}(w^{-1}(v_0)) \end{aligned}$$

negativ ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $H_{\alpha,k}$ die Alkoven A_0 und $w^{-1}A_0$ trennt. Aus $\mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(w^{-1})$ folgt die Behauptung. □

2.2.19 Satz. *W_{aff} operiert einfach transitiv auf der Menge der Alkoven.*

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 2.1.19: Wir zeigen zunächst, dass die Operation transitiv ist. Es genügt, zu einem Alkoven A ein $w \in W_{aff}$ zu finden, so dass $wA = A_0$ ist. Dazu fixieren wir ein $v_0 \in A_0$ und ein $v \in A$. Da W_0 endlich ist, ist auch $W_0 v$ endlich und damit liegen in jedem Ball um v_0 nur endlich viele Elemente von $W_{aff} v = e^Q W_0 v$. Wir finden also ein $w \in W_{aff}$, so dass $\|v_0 - w(v)\|$ minimal wird und haben zu zeigen, dass dann schon $w(v) \in A_0$ ist.
Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es ein $\alpha \in R$ und ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $H_{\alpha,k}$ $w(v)$ und v_0 trennt. Sei nun $s = s_\alpha e^{k\alpha}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} sw(v) - w(v) &= s_\alpha w(v) - k\alpha - w(v) \\ &= w(v) - (w(v), \check{\alpha})\alpha - k\alpha - w(v) \\ &= -f_{\alpha,k}(w(v))\alpha \end{aligned}$$

und

$$s(v_0) - v_0 = -f_{\alpha,k}(v_0)\alpha.$$

Da $f_{\alpha,k}(v_0)$ und $f_{\alpha,k}(w(v))$ unterschiedliches Vorzeichen haben, folgt aus

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f_{\alpha,k}(w(v))}\langle v_0 - sw(v), w(v) - sw(v)\rangle + \frac{1}{-f_{\alpha,k}(v_0)}\langle v_0 - s(v_0), w(v) - s(v_0)\rangle \\
&= \langle v_0 - sw(v), \alpha\rangle + \langle s(v_0) - w(v), \alpha\rangle \\
&= \langle s(v_0) + v_0 - sw(v) - w(v), \alpha\rangle \\
&= \langle 2v_0 - (v_0, \check{\alpha})\alpha - k\alpha - 2w(v) + k\alpha + (w(v), \check{\alpha})\alpha, \alpha\rangle \\
&= \langle 2(v_0 - w(v)) - (v_0 - w(v), \check{\alpha})\alpha, \alpha\rangle \\
&= 2\langle v_0 - w(v), \alpha\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle(v_0 - w(v), \check{\alpha}) \\
&= 2\langle v_0 - w(v), \alpha\rangle - 2\langle v_0 - w(v), \alpha\rangle = 0,
\end{aligned}$$

dass mindestens eins der Skalarprodukte $\langle v_0 - sw(v), w(v) - sw(v)\rangle$ und $\langle v_0 - s(v_0), w(v) - s(v_0)\rangle$ nicht positiv ist. Damit folgt aus dem Cosinus-Satz

$$\begin{aligned}
\|w(v) - v_0\|^2 &= \|sw(v) - v_0\|^2 + \|w(v) - sw(v)\|^2 - 2\langle v_0 - sw(v), w(v) - sw(v)\rangle \\
&> \|sw(v) - v_0\|^2
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\|w(v) - v_0\|^2 &= \|w(v) - s(v_0)\|^2 + \|s(v_0) - v_0\|^2 - 2\langle v_0 - s(v_0), w(v) - s(v_0)\rangle \\
&> \|w(v) - s(v_0)\|^2 = \|w(v) - s_\alpha(v_0) + k\alpha\|^2 = \|s_\alpha w(v) - v_0 - k\alpha\|^2 \\
&= \|sw(v) - v_0\|^2.
\end{aligned}$$

Dies widerspricht der Minimalität von $\|w(v) - v_0\|$. Also ist die Operation transitiv. Jetzt zeigen wird, dass die Operation frei ist und behandeln dabei zunächst den Spezialfall, dass ein $w \in W_{aff}$ A_0 fixiert. Dann ist aber $l(w) = 0$ und damit $w = 1$. Sei nun A ein beliebiger Alkoven mit $wA = A$ und $A = w'A_0$. Dann folgt $ww'A_0 = w'A_0$ und damit $w'^{-1}ww'A_0 = A_0$. Aus dem Spezialfall folgt dann $w = 1$. $\square$

2.3 Die Längenfunktion auf W

Bei diesem Abschnitt handelt es sich um eine Ausarbeitung des Anhangs von [11]. Die einfache Transitivität der Operation von W_{aff} auf der Menge der Alkoven hat eine interessante Konsequenz für die Weylgruppe W. Sei

$$\Omega = \{u \in W : uA_0 = A_0\} = \{u \in W : \mathrm{l}(u) = 0\}.$$

2.3.1 Satz. *(i) W_{aff} ist Normalteiler in W.*

(ii) W ist das semidirekte Produkt von Ω und W_{aff}.

(iii) $\Omega \cong X/Q$. Insbesondere ist Ω abelsch.

Beweis. (i): Sei $w = w_0 e^x \in W$ und $w_{aff} = w_0' e^{x'} \in W_{aff}$.Wir müssen wegen

$$\begin{aligned} ww_{aff}w^{-1} &= w_0 e^x w_0' e^{x'} e^{-x} w_0^{-1} = w_0 w_0' e^{w_0'^{-1}(x) + x' - x} w_0^{-1} \\ &= w_0 w_0' w_0^{-1} e^{w_0 w_0'^{-1}(x) + w_0(x' - x)} = w_0 w_0' w_0^{-1} e^{w_0(x')} e^{w_0(w_0'^{-1}(x) - x)} \end{aligned}$$

noch $w_0'^{-1}(x) - x \in Q$ zeigen. Das folgt aus Lemma 1.1.11 (i).
(ii): Sei $w_{aff} \in W_{aff} \cap \Omega$. Dann ist $\mathrm{l}(w_{aff}) = 0$ und damit $w_{aff} = 1$. Also folgt $\Omega \cap W_{aff} = 1$. Ist hingegen $w \in W$ beliebig, so gibt es ein $w_{aff} \in W_{aff}$ mit $wA_0 = w_{aff}A_0$. Daraus folgt $u = ww_{aff}^{-1} \in \Omega$ und damit $w = uw_{aff}$, das heißt $W = \Omega W_{aff}$.
(iii): Nach Teil (ii) ist

$$\Omega \cong W/W_{aff} = W_0 e^X / W_0 e^Q \cong X/Q.$$

□

Die Untergruppe Ω ist im Folgenden von zentraler Bedeutung. Sie erlaubt es, für W Eigenschaften nachzuweisen, die denen des Coxeter-Systems (W_{aff}, S) ähnlich sind. Wir beginnen mit der Fortsetzung der Längenfunktion.

2.3.2 Lemma. l *ist auf den Doppelnebenklassen $\Omega w \Omega$ konstant.*

Beweis. Für $u \in \Omega$ und $w \in W$ ist

$$\mathrm{l}(wu) = \#\{H \in \mathcal{H}_{aff} : H \text{ trennt } wA_0 = wuA_0 \text{ und } A_0\} = \mathrm{l}(w).$$

Daher folgt für $u' \in \Omega$

$$\mathrm{l}(uwu') = \mathrm{l}(uw) = \mathrm{l}(w^{-1}u^{-1}) = \mathrm{l}(w^{-1}) = \mathrm{l}(w).$$

□

2.3.3 Corollar. *Ω normalisiert S.*

Beweis. Sei $u \in \Omega$ und $s \in S$. Nach Lemma 2.3.2 ist $\mathrm{l}(usu^{-1}) = \mathrm{l}(s) = 1$. Da W_{aff} Normalteiler in W ist, ist aber auch $usu^{-1} \in W_{aff}$ und damit $usu^{-1} \in S$. □

2.3.4 Satz. *Für $w = w_0 e^x \in W$ gilt:*

$$\mathrm{l}(w) = \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^+} |(x, \check{\alpha})| + \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^-} |1 + (x, \check{\alpha})|$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(w_0 e^x) &= \#\{(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff} : w_0 e^x(\check{\alpha}, k) = (w_0(\check{\alpha}), k - (x, \check{\alpha})) \in \check{R}^-_{aff}\} \\
&= \#\{(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff} : w_0(\alpha) \in R^+, (x, \check{\alpha}) > k\} \\
&+ \#\{(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff} : w_0(\alpha) \in R^-, (x, \check{\alpha}) \geq k\} \\
&= \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^+} \#\{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k < (x, \check{\alpha})\} \\
&+ \sum_{\alpha \in R^-, w_0(\alpha) \in R^+} \#\{k \in \mathbb{Z} : 0 < k < (x, \check{\alpha})\} \\
&+ \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^-} \#\{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k \leq (x, \check{\alpha})\} \\
&+ \sum_{\alpha \in R^-, w_0(\alpha) \in R^-} \#\{k \in \mathbb{Z} : 0 < k \leq (x, \check{\alpha})\} \\
&= \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^+} (\#\{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k < (x, \check{\alpha})\} + \#\{k \in \mathbb{Z} : 0 < k \leq -(x, \check{\alpha})\}) \\
&+ \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^-} (\#\{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k \leq (x, \check{\alpha})\} + \#\{k \in \mathbb{Z} : 0 < k < -(x, \check{\alpha})\}) \\
&= \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^+} |(x, \check{\alpha})| + \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^-} |1 + (x, \check{\alpha})|
\end{aligned}$$

□

2.3.5 Lemma. *Für $x \in X$ und $w_0 \in W_0$ gilt:*

$$\mathrm{l}(e^{w_0(x)}) = \mathrm{l}(e^x)$$

Beweis. Es genügt den Fall $w_0 = s_\beta \in S_0$ zu betrachten.

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(e^{s_\beta(x)}) &= \sum_{\alpha \in R^+} |(s_\beta(x), \check{\alpha})| = \sum_{\alpha \in R^+} |(x, s_\beta(\check{\alpha}))| \\
&= \sum_{\beta \neq \alpha \in R^+} |(x, \check{\alpha})| + |(x, -\check{\beta})| = \sum_{\beta \neq \alpha \in R^+} |(x, \check{\alpha})| + |(x, \check{\beta})| \\
&= \sum_{\alpha \in R^+} |(x, \check{\alpha})| = \mathrm{l}(e^x)
\end{aligned}$$

□

2.3.6 Definition. Zu $\beta \in B$ sei $\omega_{\check{\beta}} \in \check{V}_R$ die durch

$$\omega_{\check{\beta}}(\alpha) = (\alpha, \omega_{\check{\beta}}) = \delta_{\alpha,\beta} \text{ für alle } \alpha \in B$$

definierte Linearform. Diese Elemente heißen fundamentale Gewichte.

Der folgende Satz ist Prop. 29 in Chap. VI §1 von [2].

2.3.7 Satz. *Sei* $\check{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R^+} \check{\alpha}$. *Dann gilt* $\check{\rho} = \sum_{\beta \in B} \omega_{\check{\beta}}$.

Beweis. Da für $\alpha \in B$ s_α die Menge $\check{R}^+ \setminus \{\check{\alpha}\}$ permutiert, ist

$$s_\alpha(\check{\rho}) = \check{\rho} - \check{\alpha}.$$

Aus

$$(\alpha, \check{\rho}) = (s_\alpha(\alpha), s_\alpha(\check{\rho})) = (-\alpha, \check{\rho} - \check{\alpha}) = -(\alpha, \check{\rho}) + 2$$

folgt

$$(\alpha, \check{\rho}) = 1 = (\alpha, \sum_{\beta \in B} \omega_{\check{\beta}})$$

und damit, weil $(\cdot, \cdot)$ auf $V_R \times \check{V}_R$ nicht ausgeartet ist,

$$\check{\rho} = \sum_{\beta \in B} \omega_{\check{\beta}}.$$

□

2.3.8 Definition. Ein $x \in X$ heißt dominant, falls

$$(x, \check{\beta}) \geq 0 \text{ für alle } \beta \in B.$$

Die Menge aller dominanten Elemente bezeichnen wir mit X_{dom}. Es ist klar, dass die dominanten Elemente ein Monoid bilden.

2.3.9 Proposition. X_{dom} *ist endlich erzeugt.*

Beweis. Wir behandeln zunächst den Spezialfall, dass $(\cdot, \cdot)$ eine perfekte Paarung ist, das heißt $(\cdot, \cdot)$ induziere einen Isomorphismus der $\mathbb{Z}$-Moduln X und $\mathrm{Hom}(\check{X}, \mathbb{Z})$: Sei $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine Basis $\check{b}_1, \ldots, \check{b}_n$ von $\check{X}$ und ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_m$, so dass $a_1\check{b}_1, \ldots, a_m\check{b}_m$ eine Basis von $\check{Q}$ ist. Wir setzen nun

$$\check{X}_1 = \langle a_1\check{b}_1, \ldots, a_m\check{b}_m, \check{b}_{m+1}, \ldots \check{b}_n\rangle = \check{Q} \oplus \langle \check{b}_{m+1}, \ldots \check{b}_n\rangle = \langle \check{\beta}_1, \ldots \check{\beta}_m, \check{b}_{m+1}, \ldots \check{b}_n\rangle.$$

Dann ist $\check{X}_1$ eine Untergruppe von $\check{X}$ vom endlichen Index $|a_1| \cdot \ldots \cdot |a_m|$. Wir setzen weiter

$$X_1 = \{x \in V : (x, \check{x}) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \check{x} \in \check{X}_1\}.$$

Wir können dann X_1 mit $\mathrm{Hom}(\check{X}_1, \mathbb{Z})$ identifizieren und X als Untergruppe vom Index $|a_1| \cdot \ldots \cdot |a_m|$ von X_1 auffassen.
Sei nun $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die zu $\check{\beta}_1, \ldots \check{\beta}_m, \check{b}_{m+1}, \ldots \check{b}_n$ gehörige Dualbasis von X_1. Wir setzen

$$X_{1,dom} = \{x \in X_1 : (x, \check{\beta}) \geq 0 \text{ für alle } \beta \in B\}.$$

Ein Element $x = \sum_{i=1}^n c_i \omega_i$ liegt genau dann in $X_{1,dom}$, wenn $c_i \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq m$ erfüllt ist. Darüber hinaus wissen wir

$$X_{dom} = X_{1,dom} \cap X.$$

Da X endlichen Index in X_1 hat, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\tilde{\omega}_i = k\omega_i \in X \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Wir setzen nun

$$M = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{\omega}_i \in V : \lambda_i \in [0,1] \text{ für } 1 \leq i \leq m \text{ und } \lambda_i \in [-1,1] \text{ für } m+1 \leq i \leq n\} \cap X.$$

Sei nun $\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{\omega}_i \in M$. Wegen $X \subset X_1$ sind alle λ_i von der Form $\lambda_i = \frac{c_i}{k}$ mit $c_i \in \mathbb{Z}$ und $|c_i| \leq k$. Deshalb ist M endlich. Wir zeigen, dass M auch ein Erzeugendensystem von X_{dom} ist. Sei etwa $x = \sum_{i=1}^n c_i \omega_i \in X_{dom}$ Dann dürfen wir wegen $\tilde{\omega}_i \in M$ für $1 \leq i \leq m$ und $\pm\tilde{\omega}_i \in M$ für $m+1 \leq i \leq n$ bereits

$$|c_i| \leq k \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

annehmen. Dann haben wir aber bereits $x = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{k} \tilde{\omega}_i \in M$. Dies zeigt den Spezialfall.
Im allgemeinen Fall definieren wir für $\alpha \in R$

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

und setzen $X' = X$,

$$\check{X}' = \{\check{x} \in V : \langle x, \check{x} \rangle \in \mathbb{Z} \text{ für alle } x \in X'\},$$

$R' = R$, $\check{R}' = \{\tilde{\alpha} : \alpha \in R\}$ und $B' = B$. Wegen Satz 1.2.3 haben wir $\check{R}' \subset \check{X}'$ und $(X', \check{X}', R', \check{R}', B')$ ist zusammen mit der Bijektion $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ein Wurzeldatum mit perfekter Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dies ist klar bis auf Punkt (iv) der Definition eines Wurzeldatums. Wir bezeichnen die zu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gehörigen Spiegelungen mit t_α bzw. $t_{\tilde{\alpha}}$, das heißt für $x \in X'$ bzw. $\check{x} \in \check{X}'$ haben wir

$$t_\alpha(x) = x - \langle x, \tilde{\alpha} \rangle \alpha = x - (x, \check{\alpha})\alpha = s_\alpha(x)$$

und

$$t_{\tilde{\alpha}}(\check{x}) = \check{x} - \langle \alpha, \check{x} \rangle \tilde{\alpha} = \check{x} - \langle \check{x}, \tilde{\alpha} \rangle \alpha = \check{x} - (\check{x}, \check{\alpha})\alpha = s_\alpha(\check{x}).$$

Damit ist $t_\alpha(R) = R$ klar. Für $\tilde{\beta} \in \check{R}'$ folgt wegen der W_0-Invarianz von $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$t_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}) = s_\alpha(\tilde{\beta}) = \frac{2s_\alpha(\beta)}{\langle \beta, \beta \rangle} = \frac{2s_\alpha(\beta)}{\langle s_\alpha(\beta), s_\alpha(\beta) \rangle} \in \check{R}'.$$

Aus Satz 1.2.3 folgt jedoch auch

$$X'_{dom} = X_{dom}$$

und X'_{dom} ist endlich erzeugt nach dem Spezialfall. □

2.3.10 Lemma. *Sei $x \in X_{dom}$ und $w_0 \in W_0$. Dann gilt:*

(i) $l(e^x) = 2(x, \check{\rho})$

(ii) $\mathrm{l}(w_0 e^x) = \mathrm{l}(w_0) + \mathrm{l}(e^x)$

Beweis. (i): Unter Verwendung der Sätze 2.3.4 und 2.3.7 erhalten wir

$$\mathrm{l}(e^x) = \sum_{\alpha \in R^+} (x, \check{\alpha}) = (x, \sum_{\alpha \in R^+} \check{\alpha}) = (x, 2\check{\rho}) = 2(x, \check{\rho}).$$

(ii): Dies folgt auch aus Satz 2.3.4:

$$\begin{aligned} l(w_0 e^x) &= \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^+} (x, \check{\alpha}) + \sum_{\alpha \in R^+, w_0(\alpha) \in R^-} (1 + (x, \check{\alpha})) \\ &= \#\{\alpha \in R^+ : w_0(\alpha) \in R^-\} + \sum_{\alpha \in R^+} (x, \check{\alpha}) \\ &= \mathrm{l}(w_0) + \mathrm{l}(e^x) \end{aligned}$$

□

Wir setzen nun für $w = w_0 e^x \in W$ und $\alpha \in R^+$

$$\mathrm{n}(\alpha, w) = \begin{cases} (x, \check{\alpha}), & \text{falls } w_0(\alpha) \in R^+ \\ 1 + (x, \check{\alpha}), & \text{falls } w_0(\alpha) \in R^-. \end{cases}$$

Das heißt

$$\mathrm{l}(w) = \sum_{\alpha \in R^+} |n(\alpha, w)|.$$

2.3.11 Lemma. *Seien $x, x' \in X$ und $w_0 \in W_0$, so dass $\mathrm{n}(\alpha, w_0 e^x)$ und $\mathrm{n}(\alpha, e^{x'})$ für alle $\alpha \in R^+$ das gleiche Vorzeichen haben. Dann gilt*

$$\mathrm{l}(w_0 e^{x+x'}) = \mathrm{l}(w_0 e^x) + \mathrm{l}(e^{x'}).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(w_0 e^{x+x'}) &= \sum_{\alpha\in R^+} |\mathrm{n}(\alpha, w_0 e^{x+x'})| = \sum_{\alpha\in R^+} |\mathrm{n}(\alpha, w_0 e^{x}) + (x', \check{\alpha})| \\
&= \sum_{\alpha\in R^+} |\mathrm{n}(\alpha, w_0 e^{x}) + \mathrm{n}(\alpha, e^{x'})| = \sum_{\alpha\in R^+} (|\mathrm{n}(\alpha, w_0 e^{x})| + |\mathrm{n}(\alpha, e^{x'})|) \\
&= \mathrm{l}(w_0 e^{x}) + \mathrm{l}(e^{x'})
\end{aligned}$$

□

2.3.12 Corollar. *Seien $x, x' \in X$. Dann gilt*

(i) $\mathrm{l}(w_0 e^{2x}) = \mathrm{l}(w_0 e^{x}) + \mathrm{l}(e^{x})$ *für alle* $w_0 \in W_0$.

(ii) $\mathrm{l}(e^{x+x'}) = l(e^{x}) + \mathrm{l}(e^{x'})$, *falls es ein $w_0 \in W_0$ gibt mit $x, x' \in W_0(X_{dom})$, das heißt, x und x' liegen im Abschluss der gleichen Weylkammer von V.*

Beweis. (i): Nach Lemma 2.3.11 müssen wir zeigen, dass $\mathrm{n}(\alpha, w_0 e^{x})$ und $\mathrm{n}(\alpha, e^{x})$ für alle $\alpha \in R^+$ das gleiche Vorzeichen haben. Ist $w_0(\alpha) \in R^+$, so ist

$$\mathrm{n}(\alpha, w_0 e^{x}) = (x, \check{\alpha}) = \mathrm{n}(\alpha, e^{x}).$$

Andernfalls erhalten wir

$$\mathrm{n}(\alpha, w_0 e^{x}) = 1 + (x, \check{\alpha}) \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } (x, \check{\alpha}) \geq 0 \\ \leq 0 & \text{falls } (x, \check{\alpha}) < 0 \end{cases}$$

und

$$\mathrm{n}(\alpha, e^{x}) = (x, \check{\alpha}) \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } (x, \check{\alpha}) \geq 0 \\ \leq 0 & \text{falls } (x, \check{\alpha}) < 0 \end{cases}.$$

(ii) Wegen

$$\mathrm{n}(\alpha, e^{x}) = (x, \check{\alpha}) = (w_0^{-1}(x), w_0^{-1}(\check{\alpha})) \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } w_0^{-1}(\alpha) \in R^+ \\ \leq 0 & \text{falls } w_0^{-1}(\alpha) \in R^- \end{cases}$$

und

$$\mathrm{n}(\alpha, e^{x'}) = (x, \check{\alpha}) = (w_0^{-1}(x'), w_0^{-1}(\check{\alpha})) \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } w_0^{-1}(\alpha) \in R^+ \\ \leq 0 & \text{falls } w_0^{-1}(\alpha) \in R^- \end{cases}$$

folgt die Behauptung aus Lemma 2.3.11. □

Die Idee zum Beweis des folgenden Satzes stammt aus dem Beweis zu Satz 2.2.4 in [7].

2.3.13 Satz. *Seien $u, v \in W_0$ und $x \in X$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{l}(u) + \mathrm{l}(v) - \mathrm{l}(uv) = 2\#\{\alpha \in R^+ : v(\alpha) \in R^-, uv(\alpha) \in R^+\}$

(ii) $\mathrm{l}(u) + \mathrm{l}(ve^x) - \mathrm{l}(uve^x) = 2\#\{\alpha \in R^+ : v(\alpha) \in R^-, uv(\alpha) \in R^+, (x, \check{\alpha}) \geq 0\} + 2\#\{\alpha \in R^+ : v(\alpha) \in R^+, uv(\alpha) \in R^-, (x, \check{\alpha}) < 0\}$

Beweis. (i) folgt mit $x = 0$ aus (ii). Zum Nachweis von (ii) benutzen wir die paarweise disjunkten Mengen

$$M_1 = \check{R}^+_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}\check{R}^+_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}u^{-1}\check{R}^-_{aff},$$

$$M_2 = \check{R}^+_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}\check{R}^-_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}u^{-1}\check{R}^-_{aff},$$

$$M_3 = \check{R}^+_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}\check{R}^-_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}u^{-1}\check{R}^+_{aff}$$

und

$$M_4 = \check{R}^-_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}\check{R}^+_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}u^{-1}\check{R}^-_{aff} = -M_3.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\check{R}^+_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}\check{R}^-_{aff} = M_2 \dot{\cup} M_3,$$

$$\check{R}^+_{aff} \cap e^{-x}v^{-1}u^{-1}\check{R}^-_{aff} = M_1 \dot{\cup} M_2$$

und

$$e^{-x}v^{-1}(\check{R}^+_{aff} \cap u^{-1}\check{R}^-_{aff}) = M_1 \dot{\cup} M_4.$$

und daher

$$\mathrm{l}(ve^x) = \#M_2 + \#M_3,$$

$$\mathrm{l}(uve^x) = \#M_1 + \#M_2$$

und

$$\mathrm{l}(u) = \#M_1 + \#M_4 = \#M_1 + \#M_3.$$

Es folgt also

$$\mathrm{l}(u) + \mathrm{l}(ve^x) - \mathrm{l}(uve^x) = 2\#M_3.$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
\#M_3 &= \#\{(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff} : ve^x(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^-_{aff}, uve^x(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}\} \\
&= \#\{(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff} : (v(\check{\alpha}), k - (x, \check{\alpha})) \in \check{R}^-_{aff}, (uv(\check{\alpha}), k - (x, \check{\alpha})) \in \check{R}^+_{aff}\} \\
&= \#\{(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff} : v(\check{\alpha}) \in \check{R}^-, uv(\check{\alpha}) \in \check{R}^+, k = (x, \check{\alpha})\} \\
&= \#\{\alpha \in R^+ : v(\check{\alpha}) \in \check{R}^-, uv(\check{\alpha}) \in \check{R}^+, (x, \check{\alpha}) \geq 0\} \\
&+ \#\{\alpha \in R^- : v(\check{\alpha}) \in \check{R}^-, uv(\check{\alpha}) \in \check{R}^+, (x, \check{\alpha}) > 0\} \\
&= \#\{\alpha \in R^+ : v(\alpha) \in R^-, uv(\alpha) \in R^+, (x, \check{\alpha}) \geq 0\} \\
&+ \#\{\alpha \in R^+ : v(\alpha) \in R^+, uv(\alpha) \in R^-, (x, \check{\alpha}) < 0\}.
\end{aligned}$$

□

Für $x \in X$ setzen wir nun

$$\mathrm{n}(x) = \#\{\alpha \in R^+ : (x, \check{\alpha}) < 0\}.$$

Dann ist x genau dann dominant, wenn $n(x) = 0$ ist.

2.3.14 Satz. *Sei $x \in X$ und $w_0 \in W$ mit $w_0(x) \in X_{dom}$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{l}(w_0) \geq \mathrm{n}(x)$

(ii) Es gibt genau ein $u \in W_0$ mit $\mathrm{l}(u) = \mathrm{n}(x)$ und $u(x) \in X_{dom}$.

(iii) Für $\alpha \in R^+$ ist $u(\alpha)$ genau dann negativ, wenn $(x, \check{\alpha})$ negativ ist.

Beweis. (i): Für alle $\alpha \in R$ gilt $(w_0(x), w_0(\check{\alpha})) = (x, \check{\alpha})$. Deshalb impliziert $(x, \check{\alpha}) < 0$, dass $w_0(\alpha)$ negativ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{l}(w_0) &= \#\{\alpha \in R^+ : w_0(\alpha) \in R^-\} \geq \#\{\alpha \in R^+ : (x, \check{\alpha}) < 0, w_0(\alpha) \in R^-\} \\ &= \#\{\alpha \in R^+ : (x, \check{\alpha}) < 0\} = \mathrm{n}(x). \end{aligned}$$

Existenz in (ii): Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach $\mathrm{n}(x)$. Für $\mathrm{n}(x) = 0$ ist x bereits dominant und $w_0 = 1$ erfüllt die Behauptung. Wir können im Folgenden also $\mathrm{n}(x) \geq 1$ und damit $x \notin X_{dom}$ annehmen. Dann exisitiert ein $\alpha \in R^+$ mit $(x, \check{\alpha}) < 0$ und damit ein $\beta \in B$ mit $(x, \check{\beta}) < 0$. Da s_β $R^+ \setminus \{\beta\}$ permutiert und $(x, s_\beta(\check{\beta})) = -(x, \check{\beta})$ positiv ist, folgt aus $(s_\beta(x), \check{\alpha}) = (x, s_\beta(\check{\alpha}))$ für alle $\alpha \in R^+$

$$\mathrm{n}(s_\beta(x)) = \mathrm{n}(x) - 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung finden wir also ein $u' \in W_0$ mit $\mathrm{l}(u') = \mathrm{n}(s_\beta(x)) = \mathrm{n}(x) - 1$ und $u' s_\beta(x) \in X_{dom}$. Sei nun $u = u' s_\beta$. Dann ist also $u(x) \in X_{dom}$ und

$$\mathrm{l}(u) = \mathrm{l}(u' s_\beta) \leq \mathrm{l}(u') + 1 = \mathrm{n}(x).$$

Aus Teil (i) folgt, dass schon Gleichheit gelten muss.
(iii) und Eindeutigkeit in (ii): Haben wir ein solches Element wie in (ii), so folgt wie im Beweis von (i)

$$\{\alpha \in R^+ : (x, \check{\alpha}) < 0\} \subset \{\alpha \in R^+ : u(\alpha) \in R^-\}.$$

nach Definition von u sind diese Mengen aber schon gleich, da sie gleich mächtig sind. Dies zeigt (iii). Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 2.1.13 und der Tatsache, dass die Menge aller $\alpha \in R^+$, für welche $u(\alpha)$ negativ ist, nach (iii) gar nicht von u abhängt. □

Zu $x \in X$ sei u ein solches Element wie in Teil (ii) des letzten Satzes. Wir fixieren einen reduzierten Ausdruck $u = s_r \dots s_1$ mit $s_i = s_{\beta_i}$ und positiven Wurzeln β_i: Dann setzen wir $u_0 = 1$ und für $1 \leq t \leq r$:

$$u_t = s_t \dots s_1$$

2.3.15 Lemma. *Für $1 \leq t \leq r$ gilt:*

$$(u_{t-1}(x), \check{\beta}_t) < 0$$

Beweis. Nach Lemma 2.1.12 ist $s_1 \dots s_{t-1}(\beta_t) \in R^+$ und $us_1 \dots s_{t-1}(\beta_t) \in R^-$. Deshalb folgt aus Satz 2.3.14 (iii)

$$(u_{t-1}(x), \check{\beta}_t) = (x, s_1 \dots s_{t-1}(\check{\beta}_t)) < 0.$$

□

2.3.16 Satz. *Sei $x \in X$, $u = s_r \dots s_1$ wie in Satz 2.3.14 (ii), $w_0 \in W_0$, $s_i = s_{\beta_i}$ und $1 \leq t \leq r$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{l}(w_0) = \mathrm{l}(w_0 u_t^{-1}) + l(u_t)$, *falls* $w_0(\alpha) \in R^-$ *für alle* $\alpha \in \{\beta_1, \dots, s_1 \dots s_{t-1}(\beta_t)\}$.

(ii) $\mathrm{l}(w_0 e^x) = \mathrm{l}(w_0 u_t^{-1}) + \mathrm{l}(u_t e^x)$, *falls* $t < r$ *und* $w_0(\alpha) \in R^+$ *für alle* $\alpha \in \{s_1 \dots s_t(\beta_{t+1}), \dots, s_1 \dots s_{r-1}(\beta_r)\}$ *oder* $t = r$.

Beweis. (i): Wir wenden Satz 2.3.13 (i) und Lemma 2.1.12 an und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(w_0 u_t^{-1}) + \mathrm{l}(u_t) - \mathrm{l}(w_0) &= 2\#\{\alpha \in R^+ : u_t(\alpha) \in R^-, w_0(\alpha) \in R^+\} \\
&= 2\#(R^+ \cap u_t^{-1} R^- \cap w_0^{-1} R^+) \\
&= 2\#(\{\beta_1, \dots, s_1 \dots s_{t-1}(\beta_t)\} \cap w_0^{-1} R^+) = 0.
\end{aligned}$$

(ii): Aus Teil (ii) von Satz 2.3.13 folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(w_0 u_t^{-1}) + \mathrm{l}(u_t e^x) - \mathrm{l}(w_0 e^x) = {} & 2\#\{\alpha \in R^+ : u_t(\alpha) \in R^-, w_0(\alpha) \in R^+, (x, \check{\alpha}) \geq 0\} \\
&+ 2\#\{\alpha \in R^+ : u_t(\alpha) \in R^+, w_0(\alpha) \in R^-, (x, \check{\alpha}) < 0\}.
\end{aligned}$$

Wir müssen also noch zeigen dass die beiden obigen Mengen leer sind. Sei zunächst $\alpha \in R^+$ mit $u_t(\alpha) \in R^-$. Dann gibt es ein $1 \leq k \leq t$ mit $\alpha = s_1 \dots s_{k-1}(\beta_k)$ und aus Lemma 2.3.15 folgt

$$(x, \check{\alpha}) = (u_{k-1}(x), \check{\beta}) < 0.$$

Das heißt die erste Menge ist leer.
Ist andererseits $\alpha \in R^+$ mit $u_t(\alpha) \in R^+$ und $(x, \check{\alpha}) < 0$. Nach Satz 2.3.14 (iii) ist also $u(\alpha) \in R^-$ und damit

$$\alpha \in \{s_1 \dots s_t(\beta_{t+1}), \dots, s_1 \dots s_{r-1}(\beta_r)\}.$$

Nach Voraussetzung ist dann aber $w_0(\alpha)$ positiv und damit auch die zweite Menge leer. □

2.3.17 Corollar. *Sei $x \in X$ und u wie in Satz 2.3.14 (ii). Dann gilt:*

$$\mathrm{l}(ue^x) = \mathrm{l}(e^x) - \mathrm{n}(x) = \mathrm{l}(e^x) - \mathrm{l}(u)$$

Beweis. Durch Anwenden von Teil (ii) von Satz 2.3.16 mit $t = \mathrm{n}(x)$ und $w_0 = 1$ folgt die Behauptung. □

2.3.18 Lemma. *Sei $x \in X$, u wie in Satz 2.3.14 (ii) und $v = e^{-x}u^{-1}$. Dann ist v das eindeutig bestimmte kürzeste Element von $e^{-x}W_0$.*

Beweis. Aus Satz 2.3.4 folgt für $w \in W_0$

$$\mathrm{l}(e^{-x}w^{-1}) = \mathrm{l}(we^{x}) = \sum_{\alpha \in R^+, w(\alpha) \in R^+} |(x, \check{\alpha})| + \sum_{\alpha \in R^+, w(\alpha) \in R^-} |(x, \check{\alpha}) + 1|.$$

Dies zeigt, dass die Länge eines Elementes $e^{-x}w^{-1}$ für $w \in W_0$ genau dann minimal ist, wenn

$$\{\alpha \in R^+ : w(\alpha) \in R^-\} = \{\alpha \in R^+ : (x, \check{\alpha}) < 0\}.$$

Dies bedeutet aber nach Satz 2.3.14 (iii)

$$R^+ \cap w^{-1}(R^-) = R^+ \cap u^{-1}(R^-).$$

Wegen Proposition 2.1.13 ist dies nur für $w = u$ möglich. $\square$

2.4 Die Bruhatordnung

Wir definieren nun eine partielle Ordnung auf W_{aff}. Dazu sei

$$T = \bigcup_{w \in W_{aff}} w^{-1} S w$$

die Menge aller zu S konjugierten Elemente in W_{aff}. Es gilt $t = t^{-1}$ für alle $t \in T$. Zu $w, w' \in W_{aff}$ schreiben wir $w' \to w$, falls $w'^{-1} w \in T$ und $\mathrm{l}(w') < \mathrm{l}(w)$. Wir schreiben $w' \leq w$, falls es $w_0, \ldots, w_k \in W_{aff}$ gibt mit

$$w' = w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_k = w.$$

Offensichtlich wird durch "$\leq$" eine Ordnungsrelation definiert.

2.4.1 Definition. Die durch "$\leq$" definierte Ordnungsrelation heißt die Bruhatordnung.

Zur Untersuchung der Bruhatordnung benötigen wir die sogenannte Austauschbedingung im Coxeter-System (W_{aff}, S). Diese und das vorgehende Lemma stammen aus [4] Chap. 5.7 und 5.8.

2.4.2 Lemma. *Sei $w \in W_{aff}$ und $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $w(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$

(ii) $\mathrm{l}(w s_{\alpha,k}) > \mathrm{l}(w)$

Beweis. Wir zeigen zunächst per Induktion nach $\mathrm{l}(w)$, dass die zweite Aussage die erste impliziert. Ist $\mathrm{l}(w) = 0$ und damit $w = 1$, ist dies klar. Ist hingegen $\mathrm{l}(w) > 0$, so gibt es ein $s \in S$ mit $\mathrm{l}(sw) = \mathrm{l}(w) - 1$ und damit

$$\mathrm{l}(s w s_{\alpha,k}) \geq \mathrm{l}(w s_{\alpha,k}) - 1 > \mathrm{l}(w) - 1 = \mathrm{l}(sw).$$

Induktiv können wir also $sw(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$ annehmen. Angenommen $w(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^-_{aff}$. Dann wäre nach Lemma 2.2.9

$$w(\check{\alpha}, k) = -(\check{\beta}, l),$$

wobei $(\check{\beta}, l)$ die eindeutige positive affine Wurzel mit $s = s_{\beta,l}$ sei. Weiter erhielten wir aus Lemma 2.2.3

$$(sw) s_{\alpha,k} (sw)^{-1} = s_{\beta,l} = s$$

und damit

$$w s_{\alpha,k} = sw,$$

was im Widerspruch zu

$$\mathrm{l}(w s_{\alpha,k}) > \mathrm{l}(w) > \mathrm{l}(sw)$$

stünde.
Sei nun umgekehrt $w(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$. Angenommen $\mathrm{l}(ws_{\alpha,k})$ wäre kleiner als $\mathrm{l}(w)$. Dann könnten wir das eben gezeigte auf $ws_{\alpha,k}$ anwenden und erhielten

$$-w(\check{\alpha}, k) = ws_{\alpha,k}(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}.$$

$\square$

Wir können jetzt die sogenannte Austauscheigenschaft in W_{aff} zeigen:

2.4.3 Satz. *Sei $w = s_1 \dots s_r \in W_{aff}$ reduziert und $t \in T$ mit $\mathrm{l}(wt) < \mathrm{l}(w)$. Dann gibt es ein $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$ mit $t = s_{\alpha,k}$ und ein $1 \leq i \leq r$ mit*

$$wt = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r \text{ und } (\check{\alpha}_i, k_i) = s_{i+1} \dots s_r(\check{\alpha}, k).$$

Beweis. Nach Lemma 2.2.3 gibt es $\alpha \in R$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $t = s_{\alpha,k}$. Wegen $s_{\alpha,k} = s_{-\alpha,-k}$ können wir o.B.d.A. $(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$ annehmen. Aus Lemma 2.4.2 folgt

$$w(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^-_{aff}$$

und daher gibt es ein $1 \leq i \leq r$ mit

$$s_{i+1} \dots s_r(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^+_{aff}$$

und

$$s_i \dots s_r(\check{\alpha}, k) \in \check{R}^-_{aff}.$$

Da $(\check{\alpha}_i, k_i)$ die einzige positive affine Wurzel ist, die von $s_i = s_{\alpha_i,k_i}$ nach $\check{R}^-_{aff}$ abgebildet wird, muss schon

$$(\check{\alpha}_i, k_i) = s_{i+1} \dots s_r(\check{\alpha}, k)$$

gelten. Lemma 2.2.3 impliziert

$$s_{i+1} \dots s_r t s_r \dots s_{i+1} = s_i$$

und damit

$$wt = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r.$$

$\square$

Mit der Austauscheigenschaft werden wir die Bruhatordnung auf W_{aff} charakterisieren. Dabei gehen wir vor wie in [4] Chap 5.9-5.11.

2.4.4 Lemma. *Seien $w, w' \in W_{aff}$, $w' \leq w$ und $s \in S$. Dann ist $w's \leq w$ oder $w's \leq ws$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $w' \to w$. Sei $t = w'^{-1}w \in T$. Im Falle $s = t$ folgt

$$w's = w \leq w.$$

Wir können also $s \neq t$ annehmen.
1. Fall: $\mathrm{l}(w's) = \mathrm{l}(w') - 1$. Dann ist

$$w's \to w' \to w$$

und damit $w's \leq w$.
2. Fall: $\mathrm{l}(w's) = \mathrm{l}(w') + 1$. Wir setzen $t' = sts \in T$. Damit haben wir

$$w'st' = w'ts = ws.$$

Wir wollen $\mathrm{l}(w's) < \mathrm{l}(ws)$ zeigen, denn dann folgt aus $(w's)^{-1}ws = t'$: $w's \leq ws$. Wäre dies nicht der Fall, so erhielten wir $\mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w's)$, denn wegen $w'^{-1}w \in T$ ist genau eine der beiden Längen gerade. Sei nun $w' = s_1 \dots s_r$ reduziert. Dann folgt aus

$$\mathrm{l}(w'st') = \mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w's)$$

und der Austauschbedingung

$$w'st' = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r s$$

für ein $1 \leq i \leq r$. Der ausgelassene Faktor kann dabei nicht s sein, denn sonst wäre $w'st' = w'$ und damit $s = t'$, also auch $s = t$. Wir erhielten also

$$ws = w'st' = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r s$$

und folglich

$$w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$$

im Widerspruch zu $\mathrm{l}(w) > \mathrm{l}(w')$.
Behandeln wir jetzt den allgemeinen Fall

$$w' = w_0 \to \dots \to w_k = w.$$

Der Fall $k = 0$ ist klar. Ist hingegen $k \geq 1$, so wissen wir bereits aus dem Spezialfall

$$w's \leq w_1 \text{ oder } w's \leq w_1 s.$$

Durch Iteration dieses Arguments erhalten wir

$$w's \leq w_1 s \leq w_2 s \leq \dots \leq w_k s = ws,$$

das heißt $w's \leq ws$, oder es gibt ein $1 \leq i \leq r$ mit

$$w's \leq w_1 s \leq \dots \leq w_{i-1} s \leq w_i \leq w.$$

$\square$

2.4.5 Satz. *Seien $w', w \in W_{aff}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $w' \leq w$

(ii) *Für jeden reduzierten Ausdruck $w = s_1 \dots s_r$ existieren $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq r$ mit*
$$w' = s_{i_1} \dots s_{i_n}.$$

(iii) *Es existiert eine reduzierter Ausdruck $w = s_1 \dots s_r$ und $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq r$ mit*
$$w' = s_{i_1} \dots s_{i_n}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Implikation von (i) nach (ii) und behandeln dabei wieder den Spezialfall $w' \to w$ mit einem reduzierten Ausdruck $w = s_1 \dots s_r$. Dann ist $t = w'^{-1}w \in T$ und wegen $\mathrm{l}(w') < \mathrm{l}(w)$ erhalten wir aus der Austauschbedingung
$$w' = wt = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r.$$
Indem wir Satz 2.2.11 anwenden, können wir durch Weglassen weiterer Faktoren einen reduzierten Ausdruck für w' gewinnen. Wendet man dies nun sukzessive auf alle Schritte von
$$w' = w_0 \to \dots \to w_k = w$$
an, so folgt die Behautung.
Dass (iii) aus (ii) folgt, ist klar. Seien nun $w = s_1 \dots s_r$ und $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq r$ wie in Bedingung (iii). Wir zeigen $w' \leq w$ per Induktion nach $\mathrm{l}(w)$. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{l}(w') \leq \mathrm{l}(w)$. Im Falle $\mathrm{l}(w) = 0$ ist $w = w' = 1$. Ist nun $\mathrm{l}(w) > 0$ und $i_n < r$, so können wir die Induktionsvoraussetzung auf ws_r anwenden und es folgt
$$w' \leq ws_r = s_1 \dots s_{r-1} \leq w.$$
Ist andererseits $i_n = r$, so können wir induktiv $w's_r \leq ws_r$ annehmen und aus Lemma 2.4.4 folgt
$$w' \leq ws_r \leq w$$
oder
$$w' \leq ws_r s_r = w.$$
□

2.4.6 Corollar. *Seien $w, w' \in W_{aff}$ mit $\mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w') = \mathrm{l}(ww')$. Dann gilt $w' \leq ww'$.*

Beweis. Seien $w = s_1 \dots s_r$ und $w' = s'_1 \dots s'_{r'}$ reduziert. Dann ist auch $ww' = s_1 \dots s_r s'_1 \dots s'_{r'}$ reduziert und Bedingung (iii) von Satz 2.4.5 ist erfüllt. □

2.4.7 Lemma. *Seien $w, w' \in W_{aff}$ mit $w' < w$ und $\mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(w') + 1$. Es gebe ein $s \in S$ mit $w' < w's$ und $w's \neq w$. Dann haben wir*
$$w < ws \text{ und } w's < ws.$$

Beweis. Nach Lemma 2.4.4 ist $w's \leq w$ oder $w's \leq ws$. Wegen $\mathrm{l}(w's) = \mathrm{l}(w') + 1 = \mathrm{l}(w)$ wäre im ersten Fall $w's = w$. Also muss der zweite Fall eintreten und wegen $w' \neq w$ ist $w's < ws$. Aus

$$\mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(w') + 1 = \mathrm{l}(w's) < \mathrm{l}(ws)$$

folgt dann auch

$$w < ws.$$

□

2.4.8 Satz. *Für $w, w' \in W_{aff}$ sind äquivalent:*

(i) $w' \leq w$

(ii) Es existiert eine Folge $w' = w_0, w_1, \ldots, w_k = w$ in W_{aff} mit

$$\mathrm{l}(w_1) - \mathrm{l}(w_0) = \ldots = \mathrm{l}(w_k) - \mathrm{l}(w_{k-1}) = 1$$

und $w_0^{-1}w_1, \ldots, w_{k-1}^{-1}w_k \in T$.

Beweis. Die Implikation "(ii)⇒(i)" ist klar und beim Beweis der anderen Richtung genügt es offenbar, den Fall $w' \to w$ zu betrachten.
In diesem Fall zeigen wir die Behauptung per Induktion nach $\mathrm{l}(w') + \mathrm{l}(w)$. Im Falle $\mathrm{l}(w') + \mathrm{l}(w) = 1$ ist $w' = 1$ und $w \in S$, die Behauptung also offensichtlich erfüllt.
Sei nun $w = s_1 \ldots s_r$ reduziert und $r \geq 1$. Nach Satz 2.4.5 gibt es $1 \leq i_1 < \ldots i_n \leq r$ mit

$$w' = s_{i_1} \ldots s_{i_n}.$$

Dann ist $\mathrm{l}(w') < \mathrm{l}(w's_r)$ oder $\mathrm{l}(w') > \mathrm{l}(w's_r)$. Im ersten Fall muss also $i_n < r$ sein und w' ist ein Teilausdruck von ws_r. Wir können die Induktionsannahme also auf die Elemente w' und ws_r anwenden und die Behauptung folgt aus $\mathrm{l}(w) - \mathrm{l}(ws_r) = 1$.
Andernfalls ist

$$w's_r \to w' \leq w$$

und nach Induktionsannahme existieren $w's_r = w_0, \ldots, w_k = w \in W_{aff}$ mit

$$w_0^{-1}w_1, \ldots, w_{k-1}^{-1}w_k \in T$$

und

$$\mathrm{l}(w_1) - \mathrm{l}(w_0) = \ldots = \mathrm{l}(w_k) - \mathrm{l}(w_{k-1}) = 1.$$

Wegen $w_0 s_r = w' > w's_r = w_0$ und $w_k s_r = ws_r < w = w_k$ finden wir ein minimales $i \geq 1$, so dass $w_i s_r < w_i$ gilt. Wäre $w_i \neq w_{i-1}s_r$, so könnten wir Lemma 2.4.7 auf $w_{i-1} < w_i \neq w_{i-1}s_r$ anwenden und erhielten $w_i < w_i s_r$ im Widerspruch zur Wahl von i. Also folgt

$$w_i = w_{i-1}s_r.$$

Die Minimalität von i impliziert $\mathrm{l}(w_{j-1}s_r) + 1 = \mathrm{l}(w_{j-1}) + 2 = \mathrm{l}(w_j) + 1 = \mathrm{l}(w_j s_r)$ und damit $w_{j-1}s_r \to w_j s_r$ für alle $1 \leq j < i$. Wir erhalten also

$$w' = w_0 s_r \to w_1 s_r \to \ldots \to w_{i-1}s_r = w_i \to \ldots \to w_k = w,$$

wobei die Längendifferenzen der aufeinanderfolgenden Elemente 1 sind und

$$(w_0 s_r)^{-1} w_1 s_r = s_r w_0^{-1} w_1 s_r, \ldots, w_{k-1}^{-1} w_k \in T.$$

□

Wir setzen jetzt die Bruhatordnung auf W fort. Es handelt sich dabei um eine Ausarbeitung des Anhangs in [11].

2.4.9 Definition. Seien $w = uw_{aff}, w' = u'w'_{aff} \in W$. Wir schreiben $w \leq w'$, falls $u = u'$ und $w_{aff} \leq w'_{aff}$ im Sinne der Bruhatordnung von W_{aff}.

2.4.10 Lemma. *Sei $u \in \Omega$ und $w, w' \in W_{aff}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $w' \leq w$

(ii) $uw'u^{-1} \leq uwu^{-1}$

Beweis. Sei $w = s_1 \ldots s_r$ reduziert und $w' = s_{i_1} \ldots s_{i_n}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq r$. Dann sind

$$uwu^{-1} = (us_1u^{-1}) \ldots (us_ru^{-1})$$

und

$$uw'u^{-1} = (us_{i_1}u^{-1}) \ldots (us_{i_n}u^{-1})$$

reduzierte Ausdrücke, denn die Länge ändert sich durch Konjugation mit einem Element aus Ω nicht und Ω normalisiert S. Dies zeigt die Implikation "(i)⇒(ii)". Die Rückrichtigung erhält man, indem man die bereits gezeigte Implikation auf $uw'u^{-1} \leq uwu^{-1}$ anwendet und mit u^{-1} konjugiert. □

2.4.11 Satz. *Für $w_{aff}, w'_{aff} \in W_{aff}$ sind äquivalent:*

(i) $w'_{aff} \leq w_{aff}$

(ii) $uw'_{aff} \leq uw_{aff}$ *für alle* $u \in \Omega$.

(iii) $w'_{aff}u \leq w_{aff}u$ *für alle* $u \in \Omega$.

(iv) $uw'_{aff}u' \leq uw_{aff}u'$ *für alle* $u, u' \in \Omega$.

Beweis. (i)⇒(ii) folgt unmittelbar aus der Definition.
(ii)⇒(iii): Aus der Vorassetzung folgt insbesondere

$$w'_{aff} \leq w_{aff}$$

und daher ist nach Lemma 2.4.10

$$u^{-1}w'_{aff}u \leq u^{-1}w'_{aff}u.$$

Definitionsgemäß ist dann auch

$$w_{aff}u = u(u^{-1}w'_{aff}u) \leq u(u^{-1}w_{aff}u) = w'_{aff}u.$$

(iii)⇒(iv): Wie oben erhalten wir aus der Voraussetzung und Lemma 2.4.11

$$u'^{-1}w'_{aff}u' \leq u'^{-1}w_{aff}u'$$

und damit

$$uw'_{aff}u'^{-1} = (uu')(u'^{-1}w'_{aff}u') \leq (uu')(u'^{-1}w_{aff}u') = uw_{aff}u'^{-1}.$$

Die Implikation (iv)⇒(i) ist klar. □

2.4.12 Corollar. *Für $w, w' \in W$ sind äquivalent:*

(i) $w' \leq w$

(ii) $w'^{-1} \leq w^{-1}$

Beweis. Per Symmetrie genügt es, eine Richtung zu zeigen. Sind $w, w' \in W_{aff}$, so folgt die Behauptung aus Satz 2.4.5. Sind hingegen $w = uw_{aff}$ und $w' = u'w'_{aff}$, so folgt aus der Definition $u = u'$ und damit die Behauptung aus dem Spezialfall. □

2.4.13 Corollar. *Seien $w, w' \in W$ mit $w' \leq w$. Dann ist*

$$\mathrm{l}(w') \leq \mathrm{l}(w).$$

Beweis. Ist $w' \in W_{aff}$, so ist auch $w \in W_{aff}$ und die Behauptung folgt aus Satz 2.4.5. Der allgemeine Fall ergibt sich damit aus Lemma 2.3.2. □

2.5 Die Braidgruppe

2.5.1 Definition. Sei $\mathcal{B}$ die freie Gruppe mit den Erzeugern $(T_w)_{w\in W}$ modulo der Relationen

$$T_w T_{w'} = T_{ww'}, \text{ falls } \mathrm{l}(ww') = \mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w').$$

Wir nennen $\mathcal{B}$ die Braidgruppe von W.

Es ist klar, dass $\mathcal{B}$ von den Elementen $(T_s)_{s\in S}$ und $(T_u)_{u\in\Omega}$ erzeugt wird.
Im Studium der Hecke Algebren wird die Braidgruppe von fundamentaler Bedeutung sein, denn wir können gewisse Hecke Algebren als Restklassenalgebren einer Gruppenalgebra der Braidgruppe auffassen. Ziel dieses Kapitels ist es, Identitäten in der Braidgruppe herzuleiten, die wir dann in Hecke Algebren verwenden können. Dabei gehen wir vor wie in [6] Abschnitt 2.
Für das Studium von $\mathcal{B}$ werden wir das folgende Lemma benötigen.

2.5.2 Lemma. *Sei $x \in X$ und $\alpha \in B$. Dann gilt*

(i) Ist $(x, \check{\alpha}) > 0$, so folgt $\mathrm{l}(s_\alpha e^x) = \mathrm{l}(e^x) + 1$ und $\mathrm{l}(e^x s_\alpha) = \mathrm{l}(e^x) - 1$.

(ii) Ist $(x, \check{\alpha}) < 0$, so folgt $\mathrm{l}(s_\alpha e^x) = \mathrm{l}(e^x) - 1$ und $\mathrm{l}(e^x s_\alpha) = \mathrm{l}(e^x) + 1$.

(iii) Ist $(x, \check{\alpha}) = 0$, so folgt $\mathrm{l}(s_\alpha e^x) = \mathrm{l}(e^x) + 1$ und $\mathrm{l}(e^x s_\alpha) = \mathrm{l}(e^x) + 1$.

Beweis. Der Beweis aller drei Teile ist gleich. Wir beschränken uns deshalb auf (i). Nach Voraussetzung haben wir

$$e^{-x}(\check{\alpha}, 0) = (\check{\alpha}, (x, \check{\alpha})) \in \check{R}^+_{aff}$$

und

$$e^{x}(\check{\alpha}, 0) = (\check{\alpha}, -(x, \check{\alpha})) \in \check{R}^-_{aff}.$$

Aus Lemma 2.2.10 folgt dann die Behauptung. □

2.5.3 Lemma. *Sei $x \in X$ mit $(x, \check{\alpha}) = 0$. Dann haben wir*

$$T_{e^x} T_{s_\alpha} = T_{s_\alpha} T_{e^x}.$$

Beweis. Aus Lemma 2.5.2 (iii) folgt

$$T_{e^x} T_{s_\alpha} = T_{e^x s_\alpha} = T_{s_\alpha e^{s_\alpha(x)}} = T_{s_\alpha e^x} = T_{s_\alpha} T_{e^x}.$$

□

2.5.4 Lemma. *Sei $x \in X_{dom}$, $\alpha \in B$, $s = s_\alpha$ und $w = se^x se^x$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{l}(e^x s e^x) = 2\mathrm{l}(e^x) - 2(x, \check{\alpha}) + 1$

(ii) $w = e^{2x-(x,\check{\alpha})\alpha}$ und $2x - (x, \check{\alpha})\alpha \in X_{dom}$

(iii) $\mathrm{l}(w) = 2\mathrm{l}(e^x) - 2(x, \check{\alpha})$

(iv) Ist $(x, \check{\alpha}) = 1$, *so folgt*

$$T_w = T_s^{-1} T_{e^x} T_s^{-1} T_{e^x}.$$

Beweis. (i) folgt aus (ii), (iii) und Lemma 2.5.2 (i) oder (iii).
(ii):

$$w = se^x se^x = s^2 e^{x+s(x)} = e^{2x-(x,\check{\alpha})\alpha}$$

Für $\beta \in B \setminus \{\alpha\}$ haben wir

$$(2x - (x,\check{\alpha})\alpha, \check{\beta}) = 2(x, \check{\beta}) - (x, \check{\alpha})(\alpha, \check{\beta}) \geq 2(x, \check{\beta}) \geq 0$$

nach Proposition 1.2.9 und zusammen mit

$$(2x - (x,\check{\alpha})\alpha, \check{\alpha}) = 2(x, \check{\alpha}) - (\alpha, \check{\alpha})(x, \check{\alpha}) = 0$$

folgt $2x - (x, \check{\alpha})\alpha \in X_{dom}$.
(iii): Aus (ii) und Lemma 2.3.10 (i) folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(e^{x+s(x)}) &= 2(x + s(x), \check{\rho}) = 2(x, \check{\rho}) + 2(s(x), \check{\rho}) \\ &= \mathrm{l}(e^x) + 2(x, s(\check{\rho})) = \mathrm{l}(e^x) + 2(x, \check{\rho} - \check{\alpha}) \\ &= \mathrm{l}(e^x) + 2(x, \check{\rho}) - 2(x, \check{\alpha}) = 2\mathrm{l}(e^x) - 2(x, \check{\alpha}) \end{aligned}$$

(iv): Wegen $\mathrm{l}(sw) = \mathrm{l}(e^x se^x) = \mathrm{l}(w) + 1$ haben wir

$$T_s T_w = T_{sw} = T_{e^x se^x}.$$

Lemma 2.5.2 (i) impliziert

$$T_{e^x s} T_s = T_{e^x}$$

und mit Teil (i) folgt durch Einsetzen von $(x, \check{\alpha}) = 1$

$$T_{e^x s} T_{e^x} = T_{e^x se^x} = T_{sw}.$$

Durch Kombination dieser Gleichungen erhalten wir

$$T_w = T_s^{-1} T_{sw} = T_s^{-1} T_{e^x s} T_{e^x} = T_s^{-1} T_{e^x} T_s^{-1} T_{e^x}.$$

□

2.5.5 Lemma. *(i) Seien* $v, w \in W_0$ *und* $v^{-1}w = s_1 \dots s_r$ *reduziert mit* $s_i = s_{\alpha_i}$ *und* $\alpha_i \in B$. *Sei* $\beta_i = s_r \dots s_{i+1}(\alpha_i)$ *für* $1 \leq i < r$ *und* $\beta_r = \alpha_r$. *Dann haben wir*

$$T_v^{-1} T_w = T_{s_1}^{\epsilon_1} \dots T_{s_r}^{\epsilon_r}$$

mit $\epsilon_i = 1$, *falls* $w(\beta_i) \in R^-$ *und* $\epsilon_i = -1$, *falls* $w(\beta_i) \in R^+$.

(ii) Seien $v, w \in W_0$ und $w = s_1 \dots s_r$ reduziert mit $s_i = s_{\alpha_i}$ und $\alpha_i \in B$. Sei $\beta_i = s_r \dots s_{i+1}(\alpha_i)$ für $1 \leq i < r$ und $\beta_r = \alpha_r$. Dann haben wir

$$T_{vw^{-1}}^{-1} T_v = T_{s_1}^{\epsilon_1} \dots T_{s_r}^{\epsilon_r}$$

mit $\epsilon_i = 1$, falls $v(\beta_i) \in R^-$ und $\epsilon_i = -1$, falls $v(\beta_i) \in R^+$.

Beweis. Es ist, klar, das (ii) aus (i) folgt. (i) zeigen wir per vollständiger Induktion nach r. Der Fall $r = 0$ ist klar. Induktiv dürfen wir also

$$T_v^{-1} T_{ws_r} = T_{s_1}^{\epsilon_1} \dots T_{s_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}}$$

mit ϵ_i wie in der Behauptung annehmen. Aus Lemma 2.1.7 folgt

$$T_{ws_r} = \begin{cases} T_w T_{s_r}, & \text{falls } w(\alpha_r) \in R^+ \\ T_w T_{s_r}^{-1}, & \text{falls } w(\alpha_r) \in R^-. \end{cases}$$

Durch Einsetzen erhalten wir die behauptete Gleichung. □

2.5.6 Lemma. *Sei $x \in X$.*

(i) Es gibt $y, z \in X_{dom}$ mit $x = y - z$.

(ii) Ist $\alpha \in B$ mit $(x, \check{\alpha}) \geq 0$, so gibt es $y, z \in X_{dom}$ mit

$$x = y - z, (y, \check{\alpha}) = (x, \check{\alpha}) \text{ und } (z, \check{\alpha}) = 0.$$

(iii) Seien $y, z \in X_{dom}$ mit $x = y - z$. Dann hängt $\bar{T}_x = T_{e^y} T_{e^z}^{-1}$ nicht von der Wahl von y und z ab.

Beweis. (i) folgt aus (ii): Gibt es ein $\alpha \in B$ mit $(x, \check{\alpha}) \geq 0$, so können wir obige Elemente y und z verwenden, andernfalls ist schon $-x \in X_{dom}$ und $x = 0 - (-x)$. (ii): Wir konstruieren zunächst ein Element $\tilde{z} \in X_{dom}$ mit

$$(\tilde{z}, \check{\alpha}) = 0 \text{ und } (\tilde{z}, \check{\beta}) > 0 \text{ für } \beta \in B \setminus \{\alpha\}.$$

Sei zunächst $\omega_\alpha \in Q \otimes \mathbb{R}$ das zu α gehörige fundamentale Gewicht. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\omega_\alpha \in X$. Sei weiter $2\rho = \sum_{\beta \in R^+} \beta = 2 \sum_{\beta \in B} \omega_\beta$. Wir setzen dann

$$\tilde{z} = 2n\rho - 2n\omega_\alpha = 2n \sum_{\beta \in B \setminus \{\alpha\}} \omega_\beta.$$

Dieses Element hat offenbar die geforderte Eigenschaft. Nun sei

$$k = \max\{|(x, \check{\beta})| : \beta \in B\}.$$

Dann haben wir $z = k\tilde{z} \in X_{dom}$ und setzen $y = x + z$. Per Konstruktion ist

$$(y, \check{\alpha}) = (x, \check{\alpha}) \geq 0$$

und

$$(y, \check{\beta}) = (x+z, \check{\beta}) = (x, \check{\beta}) + k(\tilde{z}, \check{\beta}) \geq 0 \text{ für alle } \beta \in B \setminus \{\alpha\}.$$

(iii): Sei nun $x = y_1 - z_1 = y_2 - z_2$ mit $y_1, y_2, z_1, z_2 \in X_{dom}$. Dann gilt $y_1 + z_2 = y_2 + z_1 \in X_{dom}$. Aus Corollar 2.3.12 folgt dann

$$T_{e^{y_1}} T_{e^{z_1}}^{-1} = T_{e^{y_1}} T_{e^{z_2}} T_{e^{z_2}}^{-1} T_{e^{z_1}}^{-1} T_{e^{y_2}}^{-1} T_{e^{y_2}} = T_{e^{y_1+z_2}} T_{e^{z_2}}^{-1} T_{e^{y_2+z_1}}^{-1} T_{e^{y_2}} = T_{e^{y_2}} T_{e^{z_2}}^{-1}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass zwei Elemente der Form T_{e^y} und T_{e^z} mit $y, z \in X_{dom}$ wegen

$$T_{e^y} T_{e^z} = T_{e^{y+z}} = T_{e^{z+y}} = T_{e^z} T_{e^y}$$

stets kommutieren. □

2.5.7 Lemma. *(i) Ist $x \in X_{dom}$, so ist $\bar{T}_x = T_{e^x}$.*

(ii) $\bar{T}_{x_1} \bar{T}_{x_2} = \bar{T}_{x_1+x_2}$ für alle $x_1, x_2 \in X$

(iii) Sei $x \in X$, $\alpha \in B$ mit $(x, \check{\alpha}) = 0$ und $s = s_\alpha$. Dann kommutieren T_s und $\bar{T}_x$.

(iv) Sei $x \in X$ und $\alpha \in B$ mit $(x, \check{\alpha}) = 1$ und $s = s_\alpha$. Dann folgt

$$\bar{T}_x = T_s \bar{T}_{s(x)} T_s.$$

(v) Sei $x \in X$, $\alpha \in B$ mit $(x, \check{\alpha}) \in \{0, -1\}$ und $s = s_\alpha$. Dann ist

$$T_s^\epsilon \bar{T}_x T_s = \bar{T}_{s(x)}$$

mit $\epsilon = 1$, falls $(x, \check{\alpha}) = -1$ und $\epsilon = -1$, falls $(x, \check{\alpha}) = 0$.

Beweis. (i) und (ii) sind klar.
(iii): Nach Lemma 2.5.6 (i) finden wir $y, z \in X_{dom}$ mit $x = y - z$ und $(y, \check{\alpha}) = (z, \check{\alpha}) = 0$. Dann folgt unter Benutzung von Lemma 2.5.3

$$T_s \bar{T}_x = T_s T_{e^y} T_{e^z}^{-1} = T_{e^y} T_{e^z}^{-1} T_s = \bar{T}_x T_s.$$

(iv): Wir wählen $y, z \in X_{dom}$ mit $x = y - z$, $(y, \check{\alpha}) = 1$ und $(z, \check{\alpha}) = 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} T_s^{-1} \bar{T}_x T_s^{-1} \bar{T}_x &= T_s^{-1} T_{e^y} T_{e^z}^{-1} T_s^{-1} T_{e^y} T_{e^z}^{-1} = T_s^{-1} T_{e^y} T_s^{-1} T_{e^y} T_{e^z}^{-2} \\ &\overset{2.5.4(iv)}{=} T_{se^y se^y} T_{e^{2z}}^{-1} = T_{e^{2y-\alpha}} T_{e^{2z}}^{-1} = \bar{T}_{2y-\alpha} \bar{T}_{-2z} \\ &= \bar{T}_{2x-\alpha} = \bar{T}_{s(x)+x} = \bar{T}_{s(x)} \bar{T}_x \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\bar{T}_x = T_s \bar{T}_{s(x)} T_s.$$

(v): Ist $(x, \check{\alpha}) = 0$, so folgt dies aus (iii). Andernfalls wenden wir (iv) für $-x$ und und erhalten

$$\bar{T}_{-x} = T_s \bar{T}_{s(-x)} T_s.$$

Durch Inversion beider Seiten sehen wir

$$\bar{T}_x = T_s^{-1}\bar{T}_{s(x)}T_s^{-1}$$

und deshalb

$$T_s\bar{T}_xT_s = \bar{T}_{s(x)}$$

□

2.5.8 Lemma. *Sei $\alpha \in R_m$ und $s = s_\alpha e^\alpha \in S$ der zugehörige Erzeuger von W_{aff}. Dann haben wir*

$$T_s = \bar{T}_{-\alpha}T_{s_\alpha}^{-1}.$$

Beweis. Nach Corollar 1.3.8 ist $-\alpha$ dominant. Aus $e^\alpha(\check{\alpha}, 1) = (\check{\alpha}, -1) \in \check{R}_{aff}^-$ folgt mit Lemma 2.2.10 (v)

$$\mathrm{l}(s_\alpha) + \mathrm{l}(s) = \mathrm{l}(se^{-\alpha}) + 1 = \mathrm{l}(e^{-\alpha}) = \mathrm{l}(ss_\alpha).$$

Daher haben wir

$$T_s = T_{ss_\alpha}T_{s_\alpha}^{-1} = T_{e^{-\alpha}}T_{s_\alpha}^{-1}.$$

□

Das folgende Lemma stammt aus [7].

2.5.9 Lemma. *Sei $\alpha \in B$ mit $\check{\alpha} \in 2\check{X}$, α_0 die eindeutig bestimmte minimale Wurzel des zu α gehörigen Summanden einer Zerlegung von $\mathcal{R}_e$ in irreduzible Wurzeldaten und $\tilde{s} = s_{\alpha_0}e^{\alpha_0}$ die zugehörige affine Spiegelung in S.*

(i) Sei $\beta \in R^+ \setminus \{-\alpha_0\}$. Dann ist $(\alpha_0, \check{\beta}) \in \{0, -1\}$.

(ii) Es gibt ein $w \in W_0$ mit $w(\alpha_0) = -\alpha$.

(iii) $T_{w^{-1}}^{-1}T_{\tilde{s}}^{-1}T_{w^{-1}} = T_{s_\alpha}\bar{T}_{-\alpha}$ für jedes $w \in W_0$ mit $w(\alpha_0) = -\alpha$.

Beweis. (i): Für diesen Teil dürfen wir annehmen, dass $\mathcal{R}$ irreduzibel ist. Wegen Corollar 1.3.8 gilt $(\alpha_0, \check{\beta}) \leq 0$. Aus Lemma 1.2.5 folgt, dass nur eine der beiden ganzen Zahlen $(\alpha_0, \check{\beta})$ und $(\beta, \check{\alpha}_0)$ von 0 und von -1 verschieden sein kann. Wegen Corollar 2.1.20 haben wir

$$(\alpha_0, \check{\beta}) = \frac{2\langle\langle\check{\alpha}_0, \check{\beta}\rangle\rangle}{\langle\langle\check{\alpha}_0, \check{\alpha}_0\rangle\rangle} \geq \frac{2\langle\langle\check{\alpha}_0, \check{\beta}\rangle\rangle}{\langle\langle\check{\beta}, \check{\beta}\rangle\rangle} = (\beta, \check{\alpha}_0),$$

denn die Nenner sind nicht positiv. Dies zeigt die Behauptung.
(ii): Auch hier dürfen wir annehmen, dass $\mathcal{R}$ irreduzibel ist. Gäbe es kein solches w, wären α_0 und α in verschiedenen W_0-Orbits. Dies hätte wegen Teil (i) und $\alpha \in 2\check{X}$

$$(\alpha_0, w(\check{\alpha})) = 0 \text{ für alle } w \in W_0$$

zur Konsequenz im Widerspruch zu Corollar 2.2.4.
(iii): Sei w wie in (ii) und $u \in W_0$ das kürzeste Element mit $u(\alpha_0) \in X_{dom}$. Nach

Satz 2.3.14 (i) und (ii) gibt es genau ein solches Element. Lemma 2.3.18 zufolge ist dann $v = e^{-\alpha_0}u^{-1}$ das eindeutig bestimmte kürzeste Element von $e^{-\alpha_0}W_0$. Wir haben

$$e^{-\alpha_0}W_0 \cap \Omega \subset W_{aff} \cap \Omega = \{1\} \text{ aber } 1 \notin e^{-\alpha_0}W_0.$$

Andererseits liegt $\tilde{s} = s_{\alpha_0}e^{\alpha_0} = e^{-\alpha_0}s_{\alpha_0}$ in $e^{-\alpha_0}W_0$ und hat die Länge 1. Deshalb ist $v = \tilde{s}$ und damit

$$u = s_{\alpha_0}.$$

Sei nun $w = s_1 \dots s_r$ reduziert und $\beta_1, \dots, \beta_r$ wie in Lemma 2.5.5 (ii). Dann haben wir

$$T_{uw^{-1}}^{-1}T_u = T_{s_1}^{\epsilon_1} \dots T_{s_r}^{\epsilon_r}$$

mit

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } u(\beta_i) \in R^- \\ -1, & \text{falls } u(\beta_i) \in R^+. \end{cases}$$

Wegen Satz 2.3.14 (iii) haben wir aber auch

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\alpha_0, \check{\beta}_i) < 0 \\ -1, & \text{falls } (\alpha_0, \check{\beta}_i) \geq 0, \end{cases}$$

denn nach Lemma 2.1.12 gilt

$$\{\beta_1, \dots, \beta_r\} = R^+ \cap w^{-1}R^-,$$

die β_i sind also insbesondere positiv. Außerdem sind deshalb alle β_i von $-\alpha_0$ verschieden, denn $w(-\alpha_0) = \alpha \in R^+$. Deshalb können wir wegen Teil (i) Lemma 2.5.7 (v) iterativ anwenden und aus obiger Beschreibung der ϵ_i erhalten wir

$$\bar{T}_{-\alpha} = \bar{T}_{w(\alpha_0)} = T_{s_1}^{\epsilon_1} \dots T_{s_r}^{\epsilon_r}\bar{T}_{\alpha_0}T_{s_r} \dots T_{s_1} = T_{s_1}^{\epsilon_1} \dots T_{s_r}^{\epsilon_r}\bar{T}_{\alpha_0}T_{w^{-1}}.$$

Zusammen mit obiger Formel folgt

$$T_{uw^{-1}}^{-1}T_u = \bar{T}_{-\alpha}T_{w^{-1}}^{-1}\bar{T}_{-\alpha_0}$$

und damit

$$T_{uw^{-1}}^{-1}T_u\bar{T}_{\alpha_0}T_{w^{-1}} = \bar{T}_{-\alpha}.$$

Aus Lemma 1.1.14 und $w^{-1}(\alpha) = -\alpha_0 \in R^+$ folgt zusammen mit Lemma 2.1.7 (ii) außerdem

$$T_{uw^{-1}} = T_{s_{\alpha_0}w^{-1}} = T_{w^{-1}s_\alpha} = T_{w^{-1}}T_{s_\alpha}.$$

Zusammen mit Lemma 2.5.8 erhalten wir schließlich

$$T_{w^{-1}}^{-1}T_{\tilde{s}}^{-1}T_{w^{-1}} = T_{w^{-1}}^{-1}T_{s_{\alpha_0}}\bar{T}_{\alpha_0}T_{w^{-1}} = T_{s_\alpha}\bar{T}_{-\alpha}.$$

□

2.5.10 Proposition. *$\mathcal{B}$ wird von den Elementen $\bar{T}_x = T_{e^x}$ ($x \in X_{dom}$) und T_s ($s \in S_0$) erzeugt.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}'$ die von obigen Elementen erzeugte Untergruppe von $\mathcal{B}$. Wir zeigen zunächst, dass alle Elemente der Form T_s mit $s \in S$ in $\mathcal{B}'$ enthalten sind. Sei nun $\alpha \in R_m$ beliebig und $s = s_\alpha e^\alpha$ der zugehörige Erzeuger von W_{aff}. Dann haben wir

$$T_s = T_{e^{-\alpha}} T_{s_\alpha}^{-1} = \bar{T}_{-\alpha} T_{s_\alpha}^{-1}$$

nach Lemma 2.5.8. Das heißt, T_s ist schon in $\mathcal{B}'$, denn $-\alpha$ ist dominant und s_α ist ein Element der endlichen Weylgruppe, die von S_0 erzeugt wird. Folglich haben wir $T_s \in \mathcal{B}'$ für alle $s \in S$ und damit

$$T_w \in \mathcal{B}' \text{ für alle } w \in W_{aff}.$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass alle Elemente der Form T_u mit $u \in \Omega$ in $\mathcal{B}'$ sind. Für $u = w_0 e^{x_0} \in \Omega$ setzen wir

$$x = 2k\rho - w_0(x_0)$$

mit $2\rho = \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$ und $k = \max\{|(w_0(x_0), \check{\beta})| : \beta \in B\}$. Dann haben wir

$$e^x u = e^x w_0 e^{x_0} = w_0 e^{w_0^{-1}(x) + x_0} = w_0 e^{k w_0^{-1}(2\rho)} \in W_0 e^Q = W_{aff},$$

das heißt $T_{e^x u} \in \mathcal{B}'$. Außerdem ist x dominant, denn für $\beta \in B$ haben wir

$$(x, \check{\beta}) = k(2\rho, \check{\beta}) - (w_0(x_0), \check{\beta}) = 2k - (w_0(x_0), \check{\beta}) \geq k \geq 0.$$

Somit haben wir auch

$$T_u = T_{e^x}^{-1} T_{e^x u} \in \mathcal{B}'.$$

$\square$

Kapitel 3

Affine generische Hecke Algebren

3.1 Die Definition von H

Wir führen zunächst generische Gewichte ein. Dazu seien $(q_s)_{s\in S}$ Unbekannte mit $q_s = q_{s'}$, falls s und s' in W konjugiert sind. Den zugehörigen Polynomring über den ganzen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}[q_*]$. Für $s \in S$ sei $[s]$ die Menge aller Elemente von S, die in W zu s konjugiert sind und $\tilde{S} = \{[s] : s \in S\}$. Für eine Abbildung $n : \tilde{S} \to \mathbb{N}$ nennen wir

$$q_n = \prod_{[s]\in\tilde{S}} q_s^{n([s])}$$

ein Monom in q_*. Dies ist wohldefiniert, denn q_s und $q_{s'}$ sind gleich, falls s und s' in W konjugiert sind. Zu jedem $w = uw_{aff} \in W$ mit $u \in \Omega$ und $w_{aff} \in W_{aff}$ fixieren wir einen reduzierten Ausdruck $w_{aff} = s_1 \dots s_r$ und setzen

$$n_w([s]) = \#\{1 \le i \le r : s_i \in [s]\}.$$

3.1.1 Lemma. *(i) Die Abbildung $W \to \mathbb{N}_0^{\tilde{S}}, w \mapsto n_w$ ist unabhängig von der Wahl der reduzierten Ausdrücke.*

(ii) Es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{Z}^{\tilde{S}}$ mit $\varphi(T_w) = n_w$ für alle $w \in W$.

Beweis. (i): Sei $w_{aff} \in W_{aff}$ mit zwei reduzierten Ausdrücken $w_{aff} = s_1 \dots s_r = s'_1 \dots s'_r$ und $s \in S$. Dann müssen wir

$$\#\{1 \le i \le r : s_i \in [s]\} = \#\{1 \le i \le r : s'_i \in [s]\}$$

zeigen. Wir zeigen dies per Induktion nach r. Ist $r = 0$, so haben wir nichts zu zeigen.
Im Falle $r \ge 1$ sei $s_i = s_{\alpha_i,k_i}$ und $s'_i = s_{\beta_i,l_i}$. Wir betrachten das Element $s_1 w_{aff} =$

$s_2 \dots s_r = s_1 s_1' \dots s_r'$. Indem wir Satz 2.4.3 auf $w_{aff}^{-1} = s_r' \dots s_1'$ und s_1 anwenden sehen wir, dass es ein $1 \leq i \leq r$ mit

$$s_1' \dots s_{i-1}'(\beta_i, l_i) = (\alpha_1, k_1) \text{ und } s_2 \dots s_r = s_1 w_{aff} = s_1' \dots \hat{s}_i' \dots s_r'$$

gibt. Induktiv können wir also

$$\#\{1 < j \leq r : s_j \in [s]\} = \#\{1 \leq j \leq r : j \neq i, s_j' \in [s]\}$$

annehmen. Andererseits haben wir wegen $(\alpha_1, k_1) = s_1' \dots s_{i-1}'(\beta_i, l_i)$ und Lemma 2.2.3

$$s_1 = s_{\alpha_1, k_1} = (s_1' \dots s_{i-1}') s_i' (s_1' \dots s_{i-1}')^{-1},$$

das heißt $s_1 \in [s]$ genau dann, wenn $s_i' \in [s]$.
(ii): Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe haben wir genau einen Homomorphismus φ' von der freien Gruppe mit den Erzeugern $(T_w)_{w \in W}$ nach $\mathbb{Z}^{\tilde{S}}$ mit $\varphi'(T_w) = n_w$ für alle $w \in W$. Nach Definition von φ' und (i) liegen dann alle Elemente $T_w T_{w'} T_{ww'}^{-1}$ mit $\mathrm{l}(ww') = \mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w')$ im Kern von φ', das heißt es gibt einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{Z}^{\tilde{S}}$ mit $\varphi(T_w) = n_w$. □

Wir setzen nun für $w \in W$:

$$q_w = q_{n_w} = q_{\varphi(T_w)}$$

Ist $x \in X$, so schreiben wir q_x statt q_{e^x}.

3.1.2 Lemma. *(i) Sei $w \in W$ und $s \in S$. Dann haben wir*

$$q_{ws} = \begin{cases} q_w q_s, & \textit{falls } \mathrm{l}(ws) > \mathrm{l}(w) \\ q_w q_s^{-1}, & \textit{falls } \mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w). \end{cases}$$

und

$$q_{sw} = \begin{cases} q_s q_w, & \textit{falls } \mathrm{l}(sw) > \mathrm{l}(w) \\ q_s^{-1} q_w, & \textit{falls } \mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(w). \end{cases}$$

(ii) Sei $s \in S$ und $w \in W$ mit $\mathrm{l}(sws) = \mathrm{l}(w)$. Dann ist

$$q_{sws} = q_w.$$

(iii) $q_x = q_{w_0(x)}$ für alle $w_0 \in W_0$ und $x \in X$

(iv) Seien $w, w' \in W$ mit $\mathrm{l}(ww') = \mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w')$. Dann gilt:

$$q_{ww'} = q_w q_{w'}$$

Beweis. (i): Dies folgt aus den Relationen in $\mathcal{B}$. Wir haben

$$T_{ws} = \begin{cases} T_w T_s, & \text{falls } \mathrm{l}(ws) > \mathrm{l}(w) \\ T_w T_s^{-1}, & \text{falls } \mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w). \end{cases}$$

Wir haben also

$$q_{ws} = q_{\varphi(T_{ws})} = \begin{cases} q_{\varphi(T_wT_s)} = q_{\varphi(T_w)+\varphi(T_s)} = q_wq_s, & \text{falls } \mathrm{l}(ws) > \mathrm{l}(w) \\ q_{\varphi(T_wT_s^{-1})} = q_{\varphi(T_w)-\varphi(T_s)} = q_wq_s^{-1}, & \text{falls } \mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w). \end{cases}$$

Die zweite Aussage zeigt man analog.
(ii):

$$q_w = \begin{cases} q_sq_{sw} = q_sq_{sws}q_s^{-1} = q_{sws}, & \text{falls } \mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(sws) \\ q_s^{-1}q_{sw} = q_s^{-1}q_{sws}q_s = q_{sws}, & \text{falls } \mathrm{l}(sw) > \mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(sws). \end{cases}$$

(iii): Per Induktion genügt es, den Fall $w_0 = s \in S_0$ zu betrachten. Die Behauptung folgt dann aus $se^xs = e^{s(x)}$ und Lemma 2.3.5 und (ii).
(iv): Wegen $\mathrm{l}(ww') = \mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w')$ haben wir $T_{ww'} = T_wT_{w'}$ und damit

$$q_{ww'} = q_{\varphi(T_{ww'})} = q_{\varphi(T_wT_{w'})} = q_{\varphi(T_w)+\varphi(T_{w'})} = q_{\varphi(T_w)}q_{\varphi(T_{w'})} = q_wq_{w'}.$$

□

3.1.3 Lemma. *Seien $w \in W$ und $u, u' \in \Omega$. Dann gilt:*

(i) $q_w = q_{w^{-1}}$

(ii) $q_{uwu'} = q_w$

Beweis. (i): Sei $w = u''s_1 \dots s_r$ reduziert. Dann ist

$$w^{-1} = s_r \dots s_1u''^{-1} = u''^{-1}u''s_ru''^{-1} \dots u''s_1u''^{-1}.$$

Wegen $\mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(w^{-1})$ und Corollar 2.3.3 ist dies auch ein reduzierter Ausdruck und die Konjugationsklassen sind die gleichen.
(ii): Sei $w = u''s_1 \dots s_r$ reduziert. Dann haben wir

$$uwu' = uu''s_1 \dots s_ru' = uu''u'u'^{-1}s_1u' \dots u'^{-1}s_ru'$$

und daher

$$q_{uwu'} = q_{u'^{-1}s_1u' \dots u'^{-1}s_ru'} = q_{s_1 \dots s_r} = q_w.$$

□

Der folgende Satz wird es uns ermöglichen, Hecke Algebren zu definieren:

3.1.4 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und A der freie R-Modul mit Basis $(T_w)_{w\in W}$. Weiter seien $a_s, b_s \in R$ Elemente mit der Eigenschaft*

$$a_s = a_{s'} \text{ und } b_s = b_{s'} \text{ falls } s \text{ und } s' \text{ in } W \text{ konjugiert sind.}$$

Dann gibt es genau eine R-Algebra-Struktur auf A mit

$$T_s^2 = a_sT_s + b_s \text{ für alle } s \in S$$

und

$$T_wT_{w'} = T_{ww'} \text{ falls } \mathrm{l}(ww') = \mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w').$$

Zum Beweis werden wir die Vorgehensweise von [4] Chap. 7.1-7.3 verallgemeinern, wo vorausgesetzt wird, dass W eine Coxetergruppe ist. Wir werden dabei die existierende Algebrastruktur von $\mathrm{End}_R(A)$ verwenden. Für $u \in \Omega$ und $s \in S$ definieren wir R-lineare Abbildungen durch

$$L_u(T_w) = T_{uw}, R_u(T_w) = T_{wu} \text{ für alle } w \in W,$$

$$L_s(T_w) = \begin{cases} T_{sw}, & \text{falls } \mathrm{l}(sw) > \mathrm{l}(w) \\ a_s T_w + b_s T_{sw}, & \text{falls } \mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(w) \end{cases}$$

und

$$R_s(T_w) = \begin{cases} T_{ws}, & \text{falls } \mathrm{l}(ws) > \mathrm{l}(w) \\ a_s T_w + b_s T_{ws}, & \text{falls } \mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w). \end{cases}$$

Aus der Definition ist klar, dass für $u, u' \in \Omega$ und $s \in S$

$$L_u R_{u'} = R_{u'} L_u, L_s R_u = R_u L_s \text{ und } L_u R_s = R_s L_u$$

gilt. Als nächstes werden wir zeigen, dass auch die Abbildungen L_s und R_t für $s, t \in S$ kommutieren. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

3.1.5 Lemma. *Seien $w \in W$ und $s, t \in S$ mit*

$$\mathrm{l}(sw) = \mathrm{l}(wt) \text{ und } \mathrm{l}(swt) = \mathrm{l}(w).$$

Dann folgt

$$sw = wt.$$

Beweis. Sei $w = uw_{aff} = us_1 \dots s_r$ reduziert.
1. Fall: $\mathrm{l}(sw) > \mathrm{l}(w)$. Sei $s' = u^{-1}su$. Dann ist

$$\mathrm{l}(s'w_{aff}t) = \mathrm{l}(swt) = \mathrm{l}(w) < \mathrm{l}(sw) = \mathrm{l}(s'w_{aff}).$$

Indem wir Satz 2.4.3 auf $s'w_{aff}$ und t anwenden, erhalten wir

$$s'w_{aff}t = s's_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r \text{ für ein } 1 \leq i \leq r \text{ oder } s'w_{aff}t = s_1 \dots s_r = w_{aff}.$$

Wir wollen den ersten Fall ausschließen. Angenommen, dieser träte ein. Dann wäre

$$w_{aff}t = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$$

und damit

$$\mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(w_{aff}) > \mathrm{l}(w_{aff}t) = \mathrm{l}(wt) = \mathrm{l}(sw)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt also

$$w_{aff} = s'w_{aff}t = u^{-1}swt$$

und damit

$$wt = sw.$$

2. Fall: $\mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(ssw)$ Wir können dann den ersten Fall auf das Element sw anwenden. Das bedeutet

$$swt = ssw = w,$$

was

$$wt = sw$$

zur Konsequenz hat. □

3.1.6 Lemma. *Seien $s, t \in S$. Dann gilt*

$$L_s R_t = R_t L_s.$$

Beweis. Sei $w \in W$. Dann genügt es, zu zeigen, dass $L_s R_t(T_w)$ und $R_t L_s(T_w)$ übereinstimmen. Da die Multiplikation mit s oder t die Länge jeweils um 1 ändert, können genau die folgenden sechs Fälle auftreten:
1. Fall: $\mathrm{l}(w) < \mathrm{l}(wt) = \mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(swt)$ Dann haben wir

$$L_s R_t(T_w) = L_s(T_{wt}) = T_{swt} = R_t(T_{sw}) = R_t L_s(T_w).$$

2. Fall: $\mathrm{l}(swt) < \mathrm{l}(wt) = \mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(w)$

$$\begin{aligned} L_s R_t(T_w) &= L_s(a_t T_w + b_t T_{wt}) \\ &= a_t(a_s T_w + b_s T_{sw}) + b_t(a_s T_{wt} + b_s T_{swt}) \\ &= a_s a_t T_w + b_s a_t T_{sw} + a_s b_t T_{wt} + b_s b_t T_{swt} \\ &= a_s(a_t T_w + b_t T_{wt}) + b_s(a_t T_{sw} + b_t T_{swt}) \\ &= a_s R_t(T_w) + b_s R_t(T_{sw}) \\ &= R_t(a_s T_w + b_s T_{sw}) \\ &= R_t L_s(T_w) \end{aligned}$$

3. Fall: $\mathrm{l}(wt) = \mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(swt) = \mathrm{l}(w)$ In diesem Fall können wir das vorherige Lemma anwenden und erhalten

$$sw = wt.$$

Insbesondere sind s und t konjugiert in W und damit $a_s = a_t$ und $b_s = b_t$. Es folgt:

$$\begin{aligned} L_s R_t(T_w) &= L_s(a_s T_w + b_s T_{wt}) \\ &= a_s(a_s T_w + b_s T_{sw}) + b_s T_{swt} \\ &= a_s(a_s T_w + b_s T_{wt}) + b_s T_{swt} \\ &= R_t(a_s T_w + b_s T_{sw}) \\ &= R_t L_s(T_w) \end{aligned}$$

4. Fall: $\mathrm{l}(wt) < \mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(swt) < \mathrm{l}(sw)$

$$L_s R_t(T_w) = L_s(a_t T_w + b_t T_{wt}) = a_t T_{sw} + b_t T_{swt} = R_t(T_{sw}) = R_t L_s(T_w)$$

5. Fall: $\mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(swt) < \mathrm{l}(wt)$

$$L_s R_t(T_w) = L_s(T_{wt}) = a_s T_{wt} + b_s T_{swt} = R_t(a_s T_w + b_s T_{sw}) = R_t L_s(T_w)$$

6. Fall $\mathrm{l}(w) = \mathrm{l}(swt) < \mathrm{l}(wt) = \mathrm{l}(sw)$ Durch Anwenden des Lemmas sehen wir wieder

$$sw = wt, a_s = a_t \text{ und } b_s = b_t.$$

Dann haben wir

$$L_sR_t(T_w) = L_s(T_{wt}) = a_sT_{wt} + b_sT_{swt} = a_sT_{sw} + b_sT_{swt} = R_t(T_{sw}) = R_tL_s(T_w).$$

□

Wir können jetzt Satz 3.1.4 beweisen:

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer solchen Algebra:
Sei $\mathcal{L}$ die kleinste Unteralgebra von $\mathrm{End}_R(A)$, welche alle L_s $(s \in S)$ und alle L_u $(u \in \Omega)$ enthält. Dann kommutieren nach Lemma 3.1.6 alle R_u und alle R_s mit jedem Element $L \in \mathcal{L}$. Wir betrachten den R-Modulhomomorphismus

$$f : \mathcal{L} \to A, L \mapsto L(T_1).$$

Sei nun $w = us_1 \dots s_r$ reduziert. Dann haben wir per Definition $f(L_uL_{s_1} \dots L_{s_r}) = T_w$, das heißt, f ist surjektiv. Sei nun $L \in \mathcal{L}$ mit $f(L) = 0$. Wir zeigen nun per Induktion nach $\mathrm{l}(w)$, dass $L(T_w) = 0$ ist.
Ist $\mathrm{l}(w) = 0$, bedeutet dies $w = u \in \Omega$ und damit

$$L(T_u) = L(R_u(T_1)) = R_u(L(T_1)) = R_u(0) = 0.$$

Ist nun $\mathrm{l}(w) \geq 1$, so gibt es ein $s \in S$ mit $\mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w)$. Es folgt nach Induktionsannahme

$$L(T_w) = LR_s(T_{ws}) = R_s(L(T_{ws})) = 0.$$

f ist folglich bijektiv. Sei für $w \in W$ $w = us_1 \dots s_r$ eine reduzierte Darstellung. Dann setzen wir

$$L_w = L_uL_{s_1} \dots L_{s_r}.$$

Dies hängt nicht von der Wahl des reduzierten Ausdrucks von w ab, denn f ist injektiv und für jede Wahl wird das entstehende Element von f auf T_w abgebildet. Wir können so die Algebrastruktur von $\mathrm{End}_R(A)$ durch

$$T_wT_{w'} = f(L_wL_{w'}) = L_wL_{w'}(T_1)$$

und R-lineare Fortsetzung auf A übertragen. Wir müssen noch die Relationen in A nachweisen: Für $s \in S$ haben wir

$$T_s^2 = L_s^2(T_1) = L_s(T_s) = a_sT_s + b_sT_1 = a_sT_s + b_s.$$

Seien nun $w, w' \in W$ mit $\mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w') = \mathrm{l}(ww')$. Dann haben wir

$$T_{ww'} = L_{ww'}(T_1) = L_wL_{w'}(T_1) = T_wT_{w'}.$$

Dies zeigt, dass A mit dieser Multiplikation wirklich die geforderten Relationen erfüllt.

Zur Eindeutigkeit der Algebrastruktur: Seien $\cdot$ und $\odot$ zwei Multiplikationsabbildungen auf A, welche die geforderten Relationen erfüllen. Unter Benutzung der Distributivgesetze genügt es,

$$T_w \cdot T_{w'} = T_w \odot T_{w'} \text{ für alle } w, w' \in W$$

zu zeigen. Dazu betrachten wir zunächst 2 Spezialfälle:
1. Fall: $w = u \in \Omega$. Dann haben wir $\mathrm{l}(uw') = \mathrm{l}(w') = \mathrm{l}(u) + \mathrm{l}(w')$ und deshalb

$$T_u \cdot T_{w'} = T_{uw'} = T_u \odot T_{w'}.$$

2. Fall: $w = s \in S$. In diesem Fall haben wir

$$T_s \cdot T_{w'} = \begin{cases} T_{sw'} & \text{, falls } \mathrm{l}(sw') > \mathrm{l}(w') \\ T_s \cdot T_s \cdot T_{sw'} = (a_s T_s + b_s) \cdot T_{sw'} = a_s T_{w'} + b_s T_{sw'} & \text{, falls } \mathrm{l}(sw') < \mathrm{l}(w') \end{cases}$$

und

$$T_s \odot T_{w'} = \begin{cases} T_{sw'} & \text{, falls } \mathrm{l}(sw') > \mathrm{l}(w') \\ T_s \odot T_s \odot T_{sw'} = (a_s T_s + b_s) \odot T_{sw'} = a_s T_{w'} + b_s T_{sw'} & \text{, falls } \mathrm{l}(sw') < \mathrm{l}(w'). \end{cases}$$

Das bedeutet

$$T_s \cdot T_{w'} = T_s \odot T_{w'}.$$

Den allgemeinen Fall behandeln wir per Induktion nach $\mathrm{l}(w)$. Der Fall $\mathrm{l}(w) = 0$ ist gerade der erste Spezialfall. Wir dürfen also $\mathrm{l}(w) \geq 1$ annehmen. Dann finden wir ein $s \in S$ mit $\mathrm{l}(sw) < \mathrm{l}(w)$. Wir können induktiv annehmen, dass es eindeutig bestimmte Elemente $a_1, \dots a_n \in R$ und $w_1, \dots, w_n \in W$ gibt, so dass

$$T_{sw} \cdot T_{w'} = T_{sw} \odot T_{w'} = \sum_{i=1}^{n} a_i T_{w_i}.$$

Wir haben dann

$$T_w \cdot T_{w'} = T_s \cdot T_{sw} \cdot T_{w'} = \sum_{i=1}^{n} a_i T_s \cdot T_{w_i}$$

und

$$T_w \odot T_{w'} = T_s \odot T_{sw} \odot T_{w'} = \sum_{i=1}^{n} a_i T_s \odot T_{w_i}.$$

Die Produkte in den Summanden stimmen aber nach dem zweiten Speziallfall überein. □

3.1.7 Definition. Die generische Hecke Algebra H ist der freie $\mathbb{Z}[q_*]$-Modul mit Basis $(T_w)_{w \in W}$, wobei die Multiplikation über die Relationen

$$T_s^2 = (q_s - 1) T_s + q_s \text{ für alle } s \in S \text{ und}$$

$$T_{ww'} = T_w T_{w'}, \text{ falls } \mathrm{l}(ww') = \mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w')$$

gegeben ist.

Man beachte, dass wir sowohl die Erzeuger der Braidgruppe als auch die Basiselemente von H mit T_w bezeichnen. Dies erklärt sich durch Corollar 3.1.9. Sollte nicht aus dem Zusammenhang klar sein, welches Element mit T_w gemeint ist, geben wir dies explizit an.
Wir können statt $\mathbb{Z}[q_*]$ auch die Ringe $\mathbb{Z}[q_*^{\pm 1}]$ der Laurent-Polynome in q_* und $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$ betrachten, wobei $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$ den Ring der Laurent-Polynome in den Variablen $q_s^{\frac{1}{2}}$ mit $(q_s^{\frac{1}{2}})^2 = q_s$ bezeichne. Die zugehörigen generischen Hecke Algebren bezeichnen wir mit $H[q_*^{-1}]$ und $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$. Wir können dann H als Unteralgebra von $H[q_*^{-1}]$ und $H[q_*^{-1}]$ als Unteralgebra von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ auffassen. Wir können nun unsere bisherigen Notationen fortsetzen, indem wir für eine Funktion $n : \tilde{S} \to \mathbb{Z}$

$$q_n = \prod_{[s]\in\tilde{S}} q_s^{n([s])} \in \mathbb{Z}[q_*^{\pm 1}]$$

definieren. Insebesondere erhalten wir für jedes $\gamma \in \mathcal{B}$ ein Element $q_{\varphi(\gamma)} \in \mathbb{Z}[q_*^{\pm 1}]$.

3.1.8 Satz. *In $H[q_*^{-1}]$ und $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ sind die Elemente $(T_w)_{w\in W}$ invertierbar. Im Speziellen gilt*

$$T_s^{-1} = q_s^{-1}T_s + (q_s^{-1} - 1) \text{ für alle } s \in S \text{ und}$$
$$T_u^{-1} = T_{u^{-1}} \text{ für alle } u \in \Omega.$$

Die Elemente T_u sind dabei sogar schon in H invertierbar.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Elemente $(T_u)_{u\in\Omega}$ und $(T_s)_{s\in S}$ invertierbar sind. Für $u \in \Omega$ haben wir

$$T_u T_{u^{-1}} = T_{u^{-1}} T_u = T_1 = 1.$$

Für $s \in S$ gilt

$$T_s(q_s^{-1}T_s + (q_s^{-1} - 1)) = q_s^{-1}((q_s - 1)T_s + q_s) + (q_s^{-1} - 1)T_s = 1$$

und diese Elemente kommutieren miteinander. □

3.1.9 Corollar. *Sei $\mathcal{A}$ die Gruppenalgebra von $\mathcal{B}$ über $\mathbb{Z}[q_*^{\pm 1}]$ (bzw. $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$) modulo des von den Elementen $(T_s^2 - (q_s - 1)T_s - q_s)_{s\in S}$ erzeugten Ideals. Dann ist $H[q_*^{-1}]$ (bzw. $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$) isomorph zu $\mathcal{A}$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis für $H[q_*^{-1}]$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 3.1.4 genügt es, zu zeigen, dass die Elemente $(T_w)_{w\in W}$ eine Basis von $\mathcal{A}$ bilden, denn in beiden Algebren sind die Relationen aus Satz 3.1.4 erfüllt.
Lineare Unabhängigkeit: Sei F die freie Gruppe mit den Erzeugern $(T_w)_{w\in W}$. Dann gibt es nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe genau einen Gruppenhomomorphismus $F \to H[q_*^{-1}]^\times$, der die Elemente T_w auf die entsprechenden Elemente in $H[q_*^{-1}]$ abbildet. Aufgrund der Relationen in $H[q_*^{-1}]$ induziert dieser einen

Gruppenhomomorphismus $\mathcal{B} \to H[q_*^{-1}]^\times$. Folglich haben wir einen Algebrenhomomorphismus $\mathbb{Z}[q_*^{\pm 1}][\mathcal{B}] \to H[q_*^{-1}]$, der die Elemente $T_w \in \mathbb{Z}[q_*^{\pm 1}][\mathcal{B}]$ auf die Elemente $T_w \in H[q_*^{-1}]$ abbildet. Aufgrund der Relationen in $H[q_*^{-1}]$ induziert dieser einen Algebrenhomomorphismus $\mathcal{A} \to H[q_*^{-1}]$. Da die Bilder der Elemente $T_w \in \mathcal{A}$ linear unabhängig in $H[q_*^{-1}]$ sind, sind dies auch die Elemente $(T_w)_{w \in W}$ in $\mathcal{A}$.
Erzeugendensystem: Sei $\tilde{\mathcal{A}}$ der von allen Elementen $(T_w)_{w \in W}$ erzeugte Untermodul von $\mathcal{A}$. Wegen der Relationen in $\mathcal{A}$ haben wir

$$T_s \tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}} \text{ und } T_u \tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}} \text{ für alle } s \in S, u \in \Omega.$$

Die Elemente T_s $(s \in S)$ und T_u $(u \in \Omega)$ erzeugen jedoch $\mathcal{A}$ als Algebra, denn die entsprechenden Elemente in $\mathcal{B}$ erzeugen die Braidgruppe. Das heißt $\tilde{\mathcal{A}}$ ist ein Linksideal. Andererseits enthält $\tilde{A}$ das Einselement T_1. Das bedeutet $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. $\square$

Folglich können wir unsere Resultate aus Kapitel 2.5 in den Hecke Algebren $H[q_*^{-1}]$ und $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ benutzen.

3.2 Die Hecke Algebra $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$

Von nun an sei stets vorausgesetzt, dass $(\cdot,\cdot)$ eine perfekte Paarung ist. Wir werden jetzt die Hecke Algebra $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ behandeln. Dabei werden wir ihr Zentrum berechnen und zeigen, dass dieses ein freier $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-Modul ist. Wir gehen dazu ähnlich vor wie in [6] Abschnitt 3. Dort wird eine etwas weniger allgemeine Variante betrachtet: An Stelle von $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$ wird der Ring der Laurent-Polynome in einer Variabeln $\mathbb{C}[v^{\pm 1}]$ über den komplexen Zahlen betrachten. Darüber hinaus wird eine Abbildung $L : S \to \mathbb{N}_0$ mit $L(s) = L(s')$, falls s und s' in W konjugiert sind, als gegeben vorausgesetzt. Die zugehörige Hecke Algebra wird dann über die Relationen

$$T_s^2 = (v^{2L(s)} - 1)T_s + v^{2L(s)}$$

und

$$T_w T_{w'} = T_{ww'} \text{ falls } \mathrm{l}(ww') = \mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w')$$

definiert. Wir erhalten diese Hecke Algebra also aus $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$, indem wird das Bild des von $q_s^{\frac{1}{2}} \mapsto v^{L(s)}$ induzierten Algebrenhomomorphismus betrachten und dieses mit $\mathbb{C}$ tensorieren.
In [6] wird weiter eine Fortsetzung $L : W \to \mathbb{N}_0$ mit

$$L(ww') = L(w) + L(w') \text{ falls } \mathrm{l}(ww') = \mathrm{l}(w) + \mathrm{l}(w')$$

betrachtet. Diese induziert einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{L} : \mathcal{B} \to \mathbb{Z}$ mit $\tilde{L}(T_w) = L(w)$ für alle $w \in W$. Der Schlüssel zur Anpassung der dortigen Argumente auf unsere Situation wird es sein, die Abbildung $\tilde{L}$ durch die Abbildung φ aus Lemma 3.1.1 zu ersetzen, das heißt für $\gamma \in \mathcal{B}$ ersetzen wir $v^{\tilde{L}(\gamma)}$ durch $q_{\varphi(\gamma)}^{\frac{1}{2}}$.
Für $x \in X$ setzen wir nun

$$\Theta_x = q_{\varphi(\bar{T}_x)}^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_x.$$

Ist etwa $x = y - z$ mit $y, z \in X_{dom}$, so bedeutet dies

$$\Theta_x = q_y^{-\frac{1}{2}} q_z^{\frac{1}{2}} T_{e^y} T_{e^z}^{-1}.$$

Sei nun $\Theta : \mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}][X] \to H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ der durch $x \mapsto \Theta_x$ induzierte Homomorphismus von $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-Moduln. Dann ist dieser auch multiplikativ, denn φ und $x \mapsto \bar{T}_x$ sind Gruppenhomomorphismen. Das Bild von Θ bezeichnen wir mit A.

3.2.1 Lemma. *Die Elemente $(T_w\Theta_x)_{w\in W_0, x\in X}$ sind $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-linear unabhängig.*

Beweis. Sei

$$\sum_{i=1}^{n} f_i T_{w_i} \Theta_{x_i} = 0$$

mit paarweise verschiedenen $(w_1, x_1), \ldots, (w_n, x_n) \in W_0 \times X$ und $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$. Dann finden wir ein $x \in X$ mit $x + x_i \in X_{dom}$ für $1 \le i \le n$: Wir können etwa $x = 2k\rho$ mit $k = \max\{|(x_i, \check{\alpha})| : 1 \leq i \leq n, \alpha \in B\}$ wählen. Multiplizieren wir unsere Gleichung von rechts mit Θ_x, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{n} f_i T_{w_i} \Theta_{x_i+x} &= \sum_{i=1}^{n} f_i q_{x+x_i}^{-\frac{1}{2}} T_{w_i} \bar{T}_{x_i+x} \\ &\overset{2.5.7}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i q_{x+x_i}^{-\frac{1}{2}} T_{w_i} T_{e^{x_i+x}} \overset{2.3.10}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i q_{x+x_i}^{-\frac{1}{2}} T_{w_i e^{x_i+x}} \end{aligned}$$

Weil die Elemente $(T_w)_{w\in W}$ linear unabhängig sind, folgt $f_i q_{x+x_i}^{-\frac{1}{2}} = 0$ für $1 \leq i \leq n$ und damit $f_i = 0$.

□

3.2.2 Corollar. *$\Theta : \mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}][X] \to A$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-Algebren und A ist ein freier $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-Modul mit Basis $(\Theta_x)_{x\in X}$.*

Beweis. Wir wissen bereits alles bis auf die Injektivität von Θ. Diese folgt unmittelbar aus Lemma 3.2.1. □

3.2.3 Corollar. *A ist ein Integritätsbereich.*

Beweis. Nach Corollar 3.2.2 ist A isomorph zu einem Ring von Laurentpolynomen über dem Integritätsbereich $\mathbb{Z}$. □

Sei nun K der Quotientenkörper von A, $x \in X$, $\alpha \in B$ und $s = s_\alpha$. Dann haben wir

$$\frac{\Theta_x - \Theta_{s_\alpha(x)}}{1 - \Theta_{-\alpha}} \in A,$$

denn mit $n = (x, \check{\alpha})$ gilt

$$\begin{aligned} \Theta_x - \Theta_{s_\alpha(x)} &= \Theta_x - \Theta_{x-n\alpha} = \Theta_x(1 - \Theta_{-n\alpha}) \\ &= \Theta_x(1 - \Theta_{-\alpha}^n) = \Theta_x(1 - \Theta_{-\alpha})(1 + \Theta_{-\alpha} + \ldots + \Theta_{-\alpha}^{n-1}). \end{aligned}$$

Ist zusätzlich $\alpha \in 2\check{X}$, so erhalten wir mit $n = \frac{1}{2}(x, \check{\alpha})$

$$\Theta_x - \Theta_{s(x)} = \Theta_x - \Theta_{x-2n\alpha} = \Theta_x(1 - \Theta_{-2\alpha}^n) = \Theta_x(1 - \Theta_{-2\alpha})(1 + \ldots + \Theta_{-2\alpha}^{n-1})$$

und daher

$$\frac{\Theta_x - \Theta_{s(x)}}{1 - \Theta_{-2\alpha}} \in A.$$

Wir setzen nun

$$a_s = \begin{cases} q_s - 1, & \text{falls } \check{\alpha} \notin 2\check{X} \\ (q_s - 1) + q_s^{\frac{1}{2}}(q_{\tilde{s}}^{\frac{1}{2}} - q_{\tilde{s}}^{-\frac{1}{2}})\Theta_{-\alpha}, & \text{falls } \check{\alpha} \in 2\check{X} \end{cases}$$

und

$$b_s = \begin{cases} 1 - \Theta_{-\alpha}, & \text{falls } \check{\alpha} \notin 2\check{X} \\ 1 - \Theta_{-2\alpha}, & \text{falls } \check{\alpha} \in 2\check{X}. \end{cases}$$

Dabei sei $\tilde{s}$ die affine Spiegelung aus Lemma 2.5.9. Nach obiger Überlegung haben wir stets

$$\frac{\Theta_x - \Theta_{s(x)}}{b_s} \in A.$$

3.2.4 Lemma. *Sei $x \in X$ und $s = s_\alpha \in S_0$. Dann haben wir*

(i) $\Theta_x T_s - T_s \Theta_{s(x)} = \frac{a_s}{b_s}(\Theta_x - \Theta_{s(x)})$ *und*

(ii) $T_s \Theta_x - \Theta_{s(x)} T_s = \frac{a_s}{b_s}(\Theta_x - \Theta_{s(x)})$,

wobei die rechten Seiten jeweils in A liegen.

Beweis. Wir erhalten (ii), indem wir (i) für $s(x)$ statt x aufstellen.
(i): Dass die rechten Seiten in A liegen, haben wir bereits gesehen. Wir nehmen zunächst an, die nachzuweisende Gleichung ist erfüllt für $x, x' \in X$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \Theta_{x+x'} T_s - T_s \Theta_{s(x+x')} &= \Theta_x (T_s \Theta_{s(x')} + \frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x'} - \Theta_{s(x')})) \\ &- (\Theta_{x'} T_s - \frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x'} - \Theta_{s(x')}))\Theta_{s(x)} \\ &= \Theta_x T_s \Theta_{s(x')} - \Theta_{x'} T_s \Theta_{s(x)} \\ &+ \frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x+x'} - \Theta_{x+s(x')} + \Theta_{s(x)+x'} - \Theta_{s(x+x')}) \\ &= (T_s \Theta_{s(x)} + \frac{a_s}{b_s}(\Theta_x - \Theta_{s(x)}))\Theta_{s(x')} \\ &- \Theta_{x'}(\Theta_x T_s - \frac{a_s}{b_s}(\Theta_x - \Theta_{s(x)})) \\ &+ \frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x+x'} - \Theta_{x+s(x')} + \Theta_{s(x)+x'} - \Theta_{s(x+x')}) \\ &= T_s \Theta_{s(x+x')} - \Theta_{x+x'} T_s + 2\frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x+x'} - \Theta_{s(x+x')}) \end{aligned}$$

und damit

$$2(\Theta_{x+x'} T_s - T_s \Theta_{s(x+x')}) = 2\frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x+x'} - \Theta_{s(x+x')}).$$

Das bedeutet, die nachzuweisende Formel ist für das Element $x + x'$ erfüllt.
Ist die nachzuweisende Formel für ein $x \in X$ richtig, so können wir sie von links mit $-\Theta_{-x}$ und von rechts mit $\Theta_{-s(x)}$ multiplizieren. Dann haben wir

$$\Theta_{-x} T_s - T_s \Theta_{s(-x)} = \Theta_{-x}\frac{a_s}{b_s}(\Theta_{s(x)} - \Theta_x)\Theta_{s(-x)} = \frac{a_s}{b_s}(\Theta_{-x} - \Theta_{s(-x)}),$$

die behauptete Gleichung ist also auch für $-x$ richtig. Folglich genügt es, diese Formel für ein fixiertes Erzeugendensystem von X nachzuweisen.

Ist $\check{\alpha} \notin 2\check{X}$, so wählen wir ein $x \in X$ mit $(x, \check{\alpha}) = 1$. Wir können etwa $\check{\alpha}$ zu einer Basis von $\check{X}$ ergänzen und x als das zu $\check{\alpha}$ korrespondierende Element einer Dualbasis definieren. Im Falle $\check{\alpha} \in 2\check{X}$ machen wir eine spezielle Wahl, nämlich $x = \alpha$. In beiden Fällen finden wir für ein beliebiges $y \in X$ ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $z = y - kx$ die Gleichung $(z, \check{\alpha}) = 0$ erfüllt. Nach unser Vorüberlegung genügt es, die nachzuweisende Formel für zu $\check{\alpha}$ orthogonale Elemente und jeweils ein x wie oben zu überprüfen.
Für ein $x \in X$ mit $(x, \check{\alpha}) = 0$ lautet die nachzuweisende Identität einfach

$$\Theta_x T_s - T_s \Theta_x = 0.$$

Dies folgt aus Lemma 2.5.7 (iii).
Sei nun $x \in X$ ein Element mit $(x, \check{\alpha}) = 1$. Aus Lemma 2.5.7 (iv) und Satz 3.1.8 folgt dann

$$\begin{aligned}
q_s^{-\frac{1}{2}} T_s \Theta_x &= (q_s^{\frac{1}{2}} T_s^{-1} - (q_s^{-\frac{1}{2}} - q_s^{\frac{1}{2}})) q_{\varphi(\bar{T}_x)}^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_x \\
&= q_s^{\frac{1}{2}} T_s^{-1} q_{\varphi(\bar{T}_x)}^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_x - (q_s^{-\frac{1}{2}} - q_s^{\frac{1}{2}}) \Theta_x \\
&= q_s^{\frac{1}{2}} T_s^{-1} q_{\varphi(T_s \bar{T}_{s(x)} T_s)}^{-\frac{1}{2}} T_s \bar{T}_{s(x)} T_s - (q_s^{-\frac{1}{2}} - q_s^{\frac{1}{2}}) \Theta_x \\
&= q_{\varphi(\bar{T}_{s(x)} T_s)}^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{s(x)} T_s - (q_s^{-\frac{1}{2}} - q_s^{\frac{1}{2}}) \Theta_x \\
&= q_s^{-\frac{1}{2}} \Theta_{s(x)} T_s - (q_s^{-\frac{1}{2}} - q_s^{\frac{1}{2}}) \Theta_x.
\end{aligned}$$

Wir erhalten weiter

$$T_s \Theta_x - \Theta_{s(x)} T_s = (q_s - 1) \Theta_x \frac{1 - \Theta_{-\alpha}}{1 - \Theta_{-\alpha}} = (q_s - 1) \frac{\Theta_x - \Theta_{s(x)}}{1 - \Theta_{-\alpha}} = \frac{a_s}{b_s} (\Theta_x - \Theta_{s(x)}).$$

Dies zeigt die Behauptung für den Fall $\check{\alpha} \notin 2\check{X}$. Im Falle $x = \alpha$ haben wir dann mit Hilfe von Lemma 2.5.9 (iii)

$$\begin{aligned}
\Theta_\alpha (q_s^{-\frac{1}{2}} T_s - (q_s^{\frac{1}{2}} - q_s^{-\frac{1}{2}})) - q_s^{-\frac{1}{2}} T_s \Theta_{-\alpha} &= q_s^{\frac{1}{2}} \Theta_\alpha T_s^{-1} - q_s^{-\frac{1}{2}} T_s \Theta_{-\alpha} \\
&= q_{\varphi(\bar{T}_\alpha T_s^{-1})}^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_\alpha T_s^{-1} - q_{\varphi(T_s \bar{T}_{-\alpha})}^{-\frac{1}{2}} T_s \bar{T}_{-\alpha} \\
&= T_{w^{-1}}^{-1} (q_{\tilde{s}}^{-\frac{1}{2}} T_{\tilde{s}} - q_{\tilde{s}}^{\frac{1}{2}} T_{\tilde{s}}^{-1}) T_{w^{-1}} \\
&= T_{w^{-1}}^{-1} (q_{\tilde{s}}^{\frac{1}{2}} - q_{\tilde{s}}^{-\frac{1}{2}}) T_{w^{-1}} = q_{\tilde{s}}^{\frac{1}{2}} - q_{\tilde{s}}^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

für ein $w \in W_0$. Letztendlich folgt

$$\begin{aligned}
\Theta_\alpha T_s - T_s \Theta_{s(\alpha)} &= (q_s - 1) \Theta_\alpha + q_s^{\frac{1}{2}} (q_{\tilde{s}}^{\frac{1}{2}} - q_{\tilde{s}}^{-\frac{1}{2}}) = a_s \Theta_\alpha \\
&= a_s \Theta_\alpha \frac{1 - \Theta_{-2\alpha}}{1 - \Theta_{-2\alpha}} = \frac{a_s}{b_s} (\Theta_\alpha - \Theta_{s(\alpha)}).
\end{aligned}$$

□

3.2.5 Satz. *(i) Die Elemente $(T_w\Theta_x)_{w\in W_0,x\in X}$ bilden eine $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-Basis von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$.*

(ii) Die Elemente $(\Theta_x T_w)_{w\in W_0,x\in X}$ erzeugen $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ als $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-Modul.

Beweis. Die lineare Unabhängigkeit in (i) wissen wir bereits aus Lemma 3.2.1. Seien H_1 und H_2 die von den Elementen in (i) bzw. (ii) erzeugten Untermoduln von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$. Wir zeigen zunächst per Induktion nach $\mathrm{l}(w)$, dass H_2 alle Elemente der Form $T_w\Theta_x$ enthält. Für $\mathrm{l}(w) = 0$ ist $w = 1$ und $\Theta_x \in H_2$. Andernfalls gibt es ein $s \in S_0$ mit $\mathrm{l}(sw) = \mathrm{l}(w) - 1$. Dann haben wir $T_w = T_s T_{sw}$. Induktiv dürfen wir annehmen, dass es $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$ und $(w_1, x_1), \dots, (w_n, x_n) \in W_0 \times X$ mit

$$T_{sw}\Theta_x = \sum_{i=1}^{n} f_i \Theta_{x_i} T_{w_i}$$

gibt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} T_w\Theta_x = T_s T_{sw}\Theta_x = \sum_{i=1}^{n} f_i T_s \Theta_{x_i} T_{w_i} &\overset{3.2.4}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(\Theta_{s(x_i)} T_s + \frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x_i} - \Theta_{s(x_i)}))T_{w_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i \Theta_{s(x_i)} T_s T_{w_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x_i} - \Theta_{s(x_i)})T_{w_i} \end{aligned}$$

Wegen

$$T_s T_{w_i} = \begin{cases} T_{sw_i}, & \text{falls } \mathrm{l}(sw_i) > \mathrm{l}(w_i) \\ (q_s - 1)T_{w_i} + q_s T_{sw_i}, & \text{falls } \mathrm{l}(sw_i) < \mathrm{l}(w_i). \end{cases}$$

haben wir $\sum_{i=1}^{n} f_i \Theta_{s(x_i)} T_s T_{w_i} \in H_2$. Der zweite Summand ist in H_2 enthalten, denn $\frac{a_s}{b_s}(\Theta_{x_i} - \Theta_{s(x_i)}) \in A$. Das bedeutet $T_w\Theta_x \in H_2$. Analog zeigt man, dass alle Elemente der Form $\Theta_x T_w$ in H_1 enthalten sind. Wir wissen also

$$H_1 = H_2.$$

Folglich ist $H_1 = H_2$ stabil unter Linksmultiplikation mit den Elementen T_s ($s \in S_0$) und Θ_x. Diese erzeugen $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ als Algebra nach Proposition 2.5.10 und Corollar 3.1.9. Das heißt $H_1 = H_2$ ist ein Linksideal, welches das Einselement T_1 enthält. □

3.2.6 Corollar. *Die Elemente $(T_w)_{w\in W_0}$ bilden eine Basis von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ als A-Rechtsmodul. Insbesondere ist $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ ein freier A-Modul von endlichem Rang.*

3.2.7 Lemma. *Sei $x \in X$ und $s \in S_0$. Dann kommutiert T_s mit $\Theta_x + \Theta_{s(x)}$.*

Beweis. Aus Lemma 3.2.4 folgt

$$\Theta_x(T_s + 1) - (T_s + 1)\Theta_{s(x)} = \Theta_x T_s - T_s\Theta_{s(x)} + \Theta_x - \Theta_{s(x)} = (\frac{a_s}{b_s} + 1)(\Theta_x - \Theta_{s(x)}).$$

Stellen wir die gleiche Formel für $s(x)$ statt x auf, erhalten wir

$$\Theta_{s(x)}(T_s+1)-(T_s+1)\Theta_x=(\frac{a_s}{b_s}+1)(\Theta_{s(x)}-\Theta_x).$$

Die Addition beider Gleichungen liefert

$$(\Theta_x+\Theta_{s(x)})(T_s+1)-(T_s+1)(\Theta_x+\Theta_{s(x)})=0,$$

das heißt $\Theta_x+\Theta_{s(x)}$ kommutiert mit T_s+1 und daher mit T_s. □

Wir definieren nun eine W_0-Operation auf A durch

$$w\sum_{i=1}^n a_i\Theta_{x_i}=\sum_{i=1}^n a_i\Theta_{w(x_i)} \text{ für alle } w\in W_0.$$

Mit dieser Operation können wir Lemma 3.2.4 neu formulieren:

3.2.8 Lemma. *Sei $f\in A$ und $s\in S_0$. Dann haben wir*

(i) $fT_s-T_s(sf)=\frac{a_s}{b_s}(f-sf)$ *und*

(ii) $T_sf-(sf)T_s=\frac{a_s}{b_s}(f-sf)$.

Dabei liegen die rechten Seiten in A.

Zum Beweis des folgenden Lemmas und des Satzes 3.2.11 orientieren wir uns an [7] Chap. 4.2.

3.2.9 Lemma. *Sei $f\in A$ und $w\in W_0$. Dann gibt es Elemente $f_{w'}\in A$ $(w'\in W_0)$, so dass*

$$T_wf=\sum_{w'\le w} f_{w'}T_{w'}.$$

Dabei ist $f_w=wf$. In anderen Worten gilt

$$T_wf-(wf)T_w=\sum_{w'<w} f_{w'}T_{w'}.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach $\mathrm{l}(w)$. Ist $\mathrm{l}(w)=0$, so ist dies klar.
Ist hingegen $\mathrm{l}(w)\ge 1$, so gibt es ein $s\in S_0$ mit $\mathrm{l}(sw)=\mathrm{l}(w)-1$. Induktiv können wir also annehmen, dass es Koeffizienten $f_{w'}\in A$ mit

$$T_{sw}f=\sum_{w'\le sw} f_{w'}T_{w'}$$

und $f_{sw}=swf$ gibt. Wir erhalten unter Benutzung von Lemma 3.2.8

$$\begin{aligned}T_wf=T_sT_{sw}f=T_s\sum_{w'\le sw} f_{w'}T_{w'}&=\sum_{w'\le sw} T_sf_{w'}T_{w'}\\&=\sum_{w'\le sw}(sf_{w'}T_s+\frac{a_s}{b_s}(f_{w'}-sf_{w'}))T_{w'}\\&=\sum_{w'\le sw}(sf_{w'}T_sT_{w'}+\frac{a_s}{b_s}(f_{w'}-sf_{w'})T_{w'}).\end{aligned}$$

Nun ist

$$T_s T_{w'} = \begin{cases} T_{sw'}, & \text{falls } \mathrm{l}(sw') > \mathrm{l}(w') \\ (q_s - 1)T_{w'} + q_s T_{sw'}, & \text{falls } \mathrm{l}(sw') < \mathrm{l}(w'). \end{cases}$$

Für jedes vorkommende w' haben wir im ersten Fall $sw' \leq w$ nach Satz 2.4.5. Im anderen Fall haben wir per Konstruktion $sw' \leq w' \leq sw \leq w$. Wir summieren also nur über Elemente $v \leq w$. In der Summe kommt T_w nur einmal vor, nämlich für $w' = sw$. Der zugehörige Koeffizient ist dann

$$sf_{sw} = s^2 wf = wf.$$

□

3.2.10 Satz. *(i) Die Elemente $(\Theta_x T_w)_{w \in W_0, x \in X}$ bilden eine $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-Basis von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$.*

(ii) Die Elemente $(T_w)_{w \in W_0}$ bilden eine Basis von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ als A-Linksmodul.

Beweis. (i): Nach Satz 3.2.5 (ii) haben wir nur noch die lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Sei

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \Theta_{x_i} T_{w_i} = 0$$

mit paarweise verschiedenen $(w_1, x_1), \ldots, (w_n, x_n) \in W_0 \times X$. Mit Hilfe von Lemma 3.2.9 können wir

$$\Theta_{x_i} T_{w_i} = T_{w_i} \Theta_{w_i^{-1}(x_i)} + \sum_{w < w_i} f_w^{(i)} T_w$$

mit geeigneten $f_w^{(i)} \in A$ schreiben. Indem wir Lemma 3.2.9 iteriert anwenden, sehen wir, dass die rechte Summe in $\sum_{w < w_i} T_w A$ liegt. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i T_{w_i} \Theta_{w_i^{-1}(x_i)} \in \sum_{i=1}^{n} \sum_{w < w_i} T_w A.$$

Für ein maximales Element w_i von $\{w_1, \ldots, w_n\}$ folgt $a_i = 0$ aus der linearen Unabhängigkeit der $T_w \Theta_x$. Induktiv folgt so die Behauptung.
(ii) folgt aus (i). □

Wir setzen die Einschränkung der Bruhatordnung auf W_0 nun zu einer Totalordnung fort. Dies können wir zum Beispiel folgendermaßen tun:
Wir wählen zumächst ein maximales Element w_1 bezüglich der Bruhatordnung. Dann wählen wir ein Element w_2, das maximal in $W_0 \setminus \{w_1\}$ ist und setzen $w_1 > w_2$. Wir finden dann ein maximales Element $w_3 \in W_0 \setminus \{w_1, w_2\}$ und definieren $w_1 > w_2 > w_3$. Dies führen wir fort, bis alle Elemente vergleichbar sind. Da W_0 endlich ist, ist es klar, dass wir so eine Totalordung auf W_0 erhalten, die die Bruhatordnung fortsetzt.
Der folgende Satz über das Zentrum von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ geht auf Bernstein zurück und wurde von Lusztig in [6] verallgemeinert.

3.2.11 Satz. *(i) A^{W_0} ist ein freier $\mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$-Modul mit Basis $z_M = \sum_{x\in M}\Theta_x$, wobei M die Bahnen der W_0-Operation auf X durchläuft.*

(ii) A^{W_0} ist das Zentrum von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$.

Beweis. (i): Die lineare Unabhängigkeit der z_M folgt aus Lemma 3.2.1, denn die Bahnen sind disjunkt. Sei nun $f = \sum_{x\in X} a_x\Theta_x \in A^{W_0}$ mit Elementen $a_x \in \mathbb{Z}[q_*^{\pm\frac{1}{2}}]$, von denen alle bis auf endlich viele 0 sind. Dann haben wir aber auch

$$f = \sum_{x\in X} a_x\Theta_{w(x)} \text{ für alle } w \in W_0$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit der Θ_x haben wir $a_{x_1} = a_{x_2}$ für alle $x_1, x_2 \in X$, für die es ein $w \in W_0$ mit $w(x_1) = x_2$ gibt. Die Koeffizienten sind also konstant auf den W_0-Orbits. Das heißt, die z_M erzeugen A.
(ii): Wir zeigen zunächst, dass A^{W_0} im Zentrum enthalten ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass die Elemente z_M zentral in $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ sind. Sei etwa $M = W_0x$. Dann haben wir für $s \in S_0$

$$z_M = \sum_{x'\in W_0x}\Theta_{x'} = \sum_{s(x')\in W_0x}\Theta_{s(x')} = \sum_{x'\in W_0x}\Theta_{s(x')}$$

und damit

$$2z_M = \sum_{x\in M}(\Theta_x + \Theta_{s(x)}) \text{ für alle } s \in S_0.$$

nach Lemma 3.2.7 kommutiert z_M dann mit allen T_s $(s \in S_0)$ und mit allen Θ_x. Diese Elemente erzeugen $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ als Algebra.
Sei nun umgekehrt $z = \sum_{w\in W_0} f_wT_w$ mit $f_w \in A$ zentral in $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$. Wir setzen dann $x = 2\rho \in C_0$. Nach Satz 2.1.19 sind die Elemente $w(x)$ für $w \in W_0$ dann paarweise verschieden, denn sie liegen in unterschiedlichen Weylkammern. Da z zentral ist, haben wir

$$\sum_{w\in W_0}\Theta_x f_w T_w = \sum_{w\in W_0} f_w T_w \Theta_x.$$

nach Lemma 3.2.9 gibt es Elemente $g_{vw} \in A$ mit

$$T_w\Theta_x = \sum_{v\leq w} g_{vw}T_v \text{ für alle } w \in W_0$$

und $g_{ww} = \Theta_{w(x)}$. Wir setzen $g_{vw} = 0$, falls nicht $v \leq w$ gilt. Wir erhalten so

$$\sum_{v\in W_0}\Theta_x f_v T_v = \sum_{v,w\in W_0} g_{vw} f_w T_v.$$

Da die Elemente $(T_v)_{v\in W_0}$ A-linear unabhängig sind, folgt

$$\Theta_x f_v = \sum_{w\in W_0} g_{vw} f_w \text{ für alle } v \in W_0.$$

Sei $G = (g_{vw})_{v,w \in W_0}$ und $f = (f_v)_{v \in W_0}$, wobei die Elemente angeordnet seien in irgendeiner Totalordnung, die die Bruhatordnung fortsetzt. Wir können G als Matrix und f als Vektor mit Einträgen in $K = Quot(A)$ auffassen. Dann bedeutet obige Gleichung, dass f Eigenvektor von G zum Eigenwert Θ_x ist. G ist jedoch eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $g_{ww} = \Theta_{w(x)}$ und diese Elemente sind per Konstruktion paarweise verschieden, die Eigenräume sind also eindimensional. Deshalb gibt es ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda(\delta_{1,v})_{v \in W_0}$ gibt, denn $(\delta_{1,v})_{v \in W_0}$ ist wegen

$$G(\delta_{1,v})_v = (g_{v,1})_v = \Theta_x(\delta_{1,v})_v$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert Θ_x, was $f_v = 0$ für $v \neq 1$ bedeutet. Das heißt $z \in A$. Für $s \in S_0$ folgt dann aber aus Lemma 3.2.8

$$T_s z = z T_s = T_s(sz) + \frac{a_s}{b_s}(z - sz)$$

und damit $T_s(z - sz) \in A$. Dies ist nur für $z = sz$ möglich. Induktiv folgt dann

$$z = wz \text{ für alle } w \in W_0.$$

$\square$

3.3 Die Basis E_w

In diesem Kapitel werden wir die Hecke Algebra H untersuchen. Die Beweise im letzten Kapitel beruhten zu großen Teilen darauf, dass wir die Gewichte q_w in $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ invertieren können. Beispielsweise setzte die komplette Argumentation des letzten Kapitels voraus, dass wir uns $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ als Restklassenalgebra der Gruppenalgebra von $\mathcal{B}$ vorstellen können. Dies ist für H nicht möglich: Die Elemente T_s sind nicht einmal invertierbar in H. Deshalb benötigen wir zur Untersuchung von H eine andere Herangehensweise. Alle Resultate in diesem Kapitel werden wir mit Hilfe der Basis E_w aus [11] Chap. 1, aus dem auch die Vorgehensweise dieses Kapitels stammt, und des dortigen Lemme fondamental (hier Lemma 3.3.3) erzielen. Letzteres beruht darauf, dass wir – auch wenn wir die Gewichte in H nicht invertieren können – trotzdem mit solchen rechnen können, da H Unteralgebra von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ ist. Die Tatsache, dass $(E_w)_{w\in W}$ eine Basis ist, können wir zeigen, ohne die Theorie von Bernstein-Lusztig des letzten Kapitels zu benutzen.
Teil (i) des folgenden Lemmas ist Lemma 5.6 in [3].

3.3.1 Lemma. *Sei $w \in W$ und $s_1 \dots s_r \in W_{aff}$ reduziert. Es gelte $w < ws_1$. Dann folgt:*

(i) $ws_2 \dots s_r < ws_1 \dots s_r$

(ii) Es gibt ganze Zahlen $k_2, \dots, k_r \in \{0, 1\}$ mit

$$q_{ws_1\dots s_r} q^{-1}_{ws_2\dots s_r} = q_{s_1} \prod_{j=2}^{r} q_{s_j}^{2k_j}.$$

Beweis. (i): Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach r. Für $r = 1$ stimmen die Behauptung und die Voraussetzung überein. Wir können also induktiv

$$ws_2 \dots s_{r-1} < ws_1 \dots s_{r-1}$$

und $r \geq 2$ annehmen. Sei $v = ws_2 \dots s_r$ und $v' = ws_1 \dots s_r$. Dann haben wir

$$v^{-1}v' = (s_2 \dots s_r)^{-1} s_1 (s_2 \dots s_r) \in T,$$

es genügt also, $\mathrm{l}(v) < \mathrm{l}(v')$ zu zeigen. Andernfalls hätten wir $\mathrm{l}(v) > \mathrm{l}(v')$ und aus unser Induktionsannahme folgte $vs_r < v's_r$. Lemma 2.4.4 und Satz 2.4.11 implizieren

$$v = vs_rs_r \leq v's_r \text{ oder } v \leq v'.$$

Nach unserer Annahme muss der erste Fall eintreten. Dabei kann keine Gleichheit gelten, denn sonst wäre

$$s_1 \dots s_r = s_2 \dots s_{r-1},$$

aber $s_1 \dots s_r$ ist nach Voraussetzung reduziert. Folglich hätten wir $v < v's_r$ und daher

$$\mathrm{l}(v') < \mathrm{l}(v) < \mathrm{l}(v's_r).$$

Dies kann jedoch nicht sein, denn sonst wäre $\mathrm{l}(v's_r) - \mathrm{l}(v') \geq 2$.
(ii): Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach r. Ist $r = 1$, so steht auf beiden Seiten einfach q_{s_1} und die Behauptung ist erfüllt.
Im allgemeinen Fall haben wir nach Lemma 3.1.2 (i)

$$q_{ws_1\dots s_r} = q_{ws_1\dots s_{r-1}} q_{s_r}^{\epsilon_1}$$

und

$$q_{ws_2\dots s_r} = q_{ws_2\dots s_{r-1}} q_{s_r}^{\epsilon_2}$$

mit

$$\epsilon_1 = \mathrm{l}(ws_1 \dots s_r) - \mathrm{l}(ws_1 \dots s_{r-1}) \in \{\pm 1\}$$

und

$$\epsilon_2 = \mathrm{l}(ws_2 \dots s_r) - \mathrm{l}(ws_2 \dots s_{r-1}) \in \{\pm 1\}.$$

Es folgt

$$q_{ws_1\dots s_r} q_{ws_2\dots s_r}^{-1} = q_1 q_2^{-1} \cdot \begin{cases} 1, & \text{falls } \epsilon_1 = \epsilon_2 \\ q_{s_r}^2, & \text{falls } \epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1 \\ q_{s_r}^{-2}, & \text{falls } \epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1 \end{cases}$$

mit $q_1 = q_{ws_1\dots s_{r-1}}$ und $q_2 = q_{ws_2\dots s_{r-1}}$. In den ersten beiden Fällen folgt die Behauptung dann aus der Induktionsannahme. Im dritten Fall können wir durch die Induktionsannahme

$$q_1 q_2^{-1} = q_{s_1} \prod_{j=1}^{r-1} q_{s_j}^{2k_j}$$

mit $k_j \in \{0, 1\}$ für $1 \leq j < r$ schreiben. Aus Teil (i) und Satz 2.4.5 folgt, dass $q_{ws_2\dots s_r}$ ein Teiler von $q_{ws_1\dots s_r}$ ist, das heißt $q_1 q_2^{-1} q_{s_r}^{-2}$ ist ein Monom in q_*. Deshalb gibt es ein $1 \leq i < r$ mit $k_i = 1$ und $q_{s_i} = q_{s_r}$. Wir haben deshalb

$$q_{ws_1\dots s_r} q_{ws_2\dots s_r}^{-1} = q_{s_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{r-1} q_{s_j}^{2k_j}.$$

□

Für $s \in S$ setzen wir nun $\lambda_s = 1 - q_s$ und $\tilde{\lambda}_s = q_s^{-\frac{1}{2}} \lambda_s$. Für $w \in W$ definieren wir weiter $\tilde{T}_w = q_w^{-\frac{1}{2}} T_w$.

3.3.2 Lemma. *Sei $s \in S$ und $w \in W$. Dann gilt:*

(i) $\tilde{T}_s^{-1} = \tilde{T}_s + \tilde{\lambda}_s$

(ii) $\tilde{T}_w \tilde{T}_s^{-1} = \begin{cases} \tilde{T}_{ws}, & \textit{falls } \mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w) \\ \tilde{T}_{ws} + \tilde{\lambda}_s \tilde{T}_w, & \textit{falls } \mathrm{l}(ws) > \mathrm{l}(w) \end{cases}$

Beweis. (i): $\tilde{T}_s(\tilde{T}_s + \tilde{\lambda}_s) = q_s^{-1}(T_s^2 - (q_s - 1)T_s) = 1$
(ii):

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_w\tilde{T}_s^{-1} &= \tilde{T}_w(\tilde{T}_s + \tilde{\lambda}_s)\\
&= q_w^{-\frac{1}{2}}q_s^{-\frac{1}{2}}T_w(T_s + \lambda_s)\\
&= \begin{cases} q_w^{-\frac{1}{2}}q_s^{-\frac{1}{2}}(-\lambda_s T_w + q_s T_{ws} + \lambda_s T_w), & \text{falls } \mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w)\\ q_w^{-\frac{1}{2}}q_s^{-\frac{1}{2}}(T_{ws} + \lambda_s T_w), & \text{falls } \mathrm{l}(ws) > \mathrm{l}(w)\end{cases}\\
&= \begin{cases} q_w^{-\frac{1}{2}}q_s^{\frac{1}{2}}T_{ws} = \tilde{T}_{ws}, & \text{falls } \mathrm{l}(ws) < \mathrm{l}(w)\\ \tilde{T}_{ws} + \tilde{\lambda}_s\tilde{T}_w, & \text{falls } \mathrm{l}(ws) > \mathrm{l}(w)\end{cases}
\end{aligned}$$

□

Seien $v, w \in W$ und $v = s_1 \dots s_r u$ reduziert. Für eine Teilfolge $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ von $(s_1, \dots, s_r)$ setzen wir

$$\sigma_{i_k - 1} = ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_2} \dots \hat{s}_{i_{k-1}} \dots s_{i_k - 1} \text{ für alle } 1 \leq k \leq n.$$

Wir nennen eine solche Folge w-distinguiert, falls

$$\sigma_{i_k - 1} < \sigma_{i_k - 1}s_{i_k} \text{ für alle } 1 \leq k \leq n.$$

3.3.3 Lemma. *Seien $v, w \in W$. Dann gilt:*

(i) Es gibt ein Monom $c_{w,v}$ in q_*, das q_v teilt, mit

$$q_{wv}q_w^{-1}q_v = c_{w,v}^2.$$

(ii) Sei $v = s_1 \dots s_r u$ reduziert. Dann haben wir

$$c_{w,v}T_wT_{v^{-1}}^{-1} = T_{wv} + \sum T_{ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_r u}\lambda_{s_{i_1}} \dots \lambda_{s_{i_n}} \prod_{j \in \{1,\dots,r\} \setminus \{i_1,\dots,i_n\}} q_{s_j}^{k_j}$$

mit nicht negativen ganzen Zahlen k_j. Dabei werde über alle w-distinguierten Teilfolgen $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ mit $n \geq 1$ von $(s_1, \dots, s_r)$ summiert.

(iii) $ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_r u < wv$ für alle w-distinguierten Teilfolgen mit $n \geq 1$.

Beweis. (i): Sei zunächst $v = s_1 \dots s_r \in W_{aff}$ reduziert. Dann haben wir

$$q_{wv} = q_w q_{s_1}^{\epsilon_1} \dots q_{s_r}^{\epsilon_r}$$

mit $\epsilon_i = \mathrm{l}(ws_1 \dots s_i) - \mathrm{l}(ws_1 \dots s_{i-1})$. Außerdem haben wir $q_v = q_{s_1} \dots q_{s_r}$ und die Behauptung ist erfüllt mit

$$c_{w,v} = \prod_{\substack{i=1\\ \epsilon_i = 1}}^{n} q_{s_i}.$$

Im allgemeinen Fall können wir $v = v_{aff}u$ schreiben. Dann haben wir $q_{wv} = q_{wv_{aff}}$ und $q_v = q_{v_{aff}}$. Die Behauptung ist deshalb mit $c_{w,v} = c_{w,v_{aff}}$ erfüllt.
(ii): Wir zeigen zunächst die folgende Zwischenbehauptung: Ist $v = s_1 \dots s_r \in W_{aff}$ reduziert, so haben wir

$$\tilde{T}_w \tilde{T}_{v^{-1}}^{-1} = \tilde{T}_{wv} + \sum \tilde{T}_{ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_r} \tilde{\lambda}_{s_{i_1}} \dots \tilde{\lambda}_{s_{i_r}},$$

wobei über alle w distinguierten Teilfolgen summiert werde. Wir tun dies per Induktion nach r. Der Fall $r = 0$ ist klar und $r = 1$ ist gerade Lemma 3.3.2 (ii). Sei nun $v' = s_1 \dots s_{r-1}$. Dann folgt aus der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\tilde{T}_w \tilde{T}_{v^{-1}}^{-1} &= \tilde{T}_w (\tilde{T}_{s_r} \tilde{T}_{v'^{-1}})^{-1} = \tilde{T}_w \tilde{T}_{v'^{-1}}^{-1} \tilde{T}_{s_r}^{-1} \\ &= (\tilde{T}_{wv'} + \sum \tilde{T}_{ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_{r-1}} \tilde{\lambda}_{s_{i_1}} \dots \tilde{\lambda}_{s_{i_n}}) \tilde{T}_{s_r}^{-1}.\end{aligned}$$

Die w-distinguierten Teilfolgen von $(s_1, \dots, s_r)$ sind genau die folgenden:

- s_r, falls $wv' < wv$
- die w-distinguierten Teilfolgen von $(s_1, \dots, s_{r-1})$
- $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n}, s_r)$, falls $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ eine w-distinguierte Teilfolge von $(s_1, \dots, s_{r-1})$ ist und
$$ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_{r-1} < ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_r$$

Damit folgt die Zwischenbehauptung aus Lemma 3.3.2 (ii).
Um Teil (ii) für $v \in W_{aff}$ zu verifizieren bleibt noch zu zeigen, dass es zu jeder w-distinguierten Teilfolge $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ von $(s_1, \dots, s_r)$ nicht negative ganze Zahlen k_j mit

$$q_{wv} = q_{ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_r} q_{s_{i_1}} \cdots q_{s_{i_n}} \prod_{j \in \{1, \dots r\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}} q_{s_j}^{2k_j}$$

gibt, denn dann haben wir

$$\begin{aligned}c_{w,v} T_w T_{v^{-1}}^{-1} &= q_{wv}^{\frac{1}{2}} q_w^{-\frac{1}{2}} q_v^{\frac{1}{2}} T_w T_{v^{-1}}^{-1} = q_{wv}^{\frac{1}{2}} \tilde{T}_w \tilde{T}_{v^{-1}}^{-1} \\ &= T_{wv} + \sum T_{ws_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_r} \lambda_{s_{i_1}} \dots \lambda_{s_{i_n}} \prod_{j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}} q_{s_j}^{k_j}.\end{aligned}$$

Dabei hängen die ganzen Zahlen k_j von den w-distinguierten Folgen ab. Um die Notationen nicht zu überfluten verzichten wir jedoch darauf, dies weiter kenntlich zu machen.
Wir müssen also noch die Existenz solcher ganzen Zahlen k_j nachweisen. Dies tun wir wieder per Induktion nach r. Für $r = 0$ und $r = 1$ ist dies klar. Sei nun also $r \geq 2$ und $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ eine w-distinguierte Teilfolge.
1. Fall: $i_1 > 1$. Dann ist die Teilfolge $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ von $(s_2, \dots, s_n)$ ws_1-distinguiert. Die Behauptung folgt aus der Induktionsannahme mit $k_1 = 0$.
2. Fall: $i_1 = 1$. Dann ist $(s_{i_2}, \dots, s_{i_n})$ eine w-distinguierte Teilfolge von $(s_2, \dots, s_r)$. Induktiv können wir annehmen, dass es nicht negative ganze Zahlen l_j mit

$$q_{ws_2 \dots s_r} = q_{ws_2 \dots \hat{s}_{i_2} \dots \hat{s}_{i_n} \dots s_r} q_{s_{i_2}} \cdots q_{s_{i_n}} \prod_{j \in \{2, \dots, r\} \setminus \{i_2, \dots, i_n\}} q_{s_j}^{2l_j}$$

gibt. Nach Lemma 3.3.1 gibt es ganze Zahlen $k_j \in \{0,1\}$ mit

$$q_{ws_1\dots s_r} = q_{w\hat{s}_{i_1}s_2\dots\hat{s}_{i_2}\dots\hat{s}_{i_n}\dots s_r} q_{s_{i_1}} \dots q_{s_{i_n}} \prod_{j\in\{1,\dots,r\}\setminus\{i_1,\dots,i_n\}} q_{s_j}^{2(l_j+k_j)}.$$

Damit haben wir (ii) für $v \in W_{aff}$ gezeigt. Für den allgemeinen Fall schreiben wir $v = v_{aff}u = s_1 \dots s_r u$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}
c_{w,v}T_wT_{v^{-1}}^{-1} &= q_{wv}^{\frac{1}{2}}q_w^{-\frac{1}{2}}q_v^{\frac{1}{2}}T_wT_{v_{aff}^{-1}}^{-1}T_{u^{-1}}^{-1}\\
&= q_{wv_{aff}}^{\frac{1}{2}}q_w^{-\frac{1}{2}}q_{v_{aff}}^{\frac{1}{2}}T_wT_{v_{aff}^{-1}}^{-1}T_u\\
&= c_{w,v_{aff}}T_wT_{v_{aff}^{-1}}^{-1}T_u\\
&= (T_{wv_{aff}} + \sum T_{ws_1\dots\hat{s}_{i_1}\dots\hat{s}_{i_n}\dots s_r}\lambda_{s_{i_1}}\dots\lambda_{s_{i_n}} \prod_{j\in\{1,\dots,r\}\setminus\{i_1,\dots,i_n\}} q_{s_j}^{k_j})T_u\\
&= T_{wv} + \sum T_{ws_1\dots\hat{s}_{i_1}\dots\hat{s}_{i_n}\dots s_r u}\lambda_{s_{i_1}}\dots\lambda_{s_{i_n}} \prod_{j\in\{1,\dots,r\}\setminus\{i_1,\dots,i_n\}} q_{s_j}^{k_j}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt (ii).
(iii): Der Beweis ist der von Proposition 5.5 in [3]. Nach Lemma 2.4.10 dürfen wir o.B.d.A. $v, w \in W_{aff}$ annehmen. Sei nun $v = s_1 \dots s_r$ reduziert. Wir zeigen dann die Behauptung per Induktion nach r. Für $r = 0$ ist nichts zu zeigen und der Fall $r = 1$ ist klar. Sei nun $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ eine w-distinguierte Teilfolge von $(s_1, \dots, s_r)$.
1. Fall: $i_1 > 1$. Dann ist $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ eine ws_1-distinguierte Teilfolge von $(s_2, \dots, s_r)$ und aus der Induktionsannahme folgt die Behauptung.
2. Fall: $i_1 = 1$. Dann ist $(s_{i_2}, \dots, s_{i_n})$ eine w-distinguierte Teilfolge von $(s_2, \dots, s_r)$ und induktiv folgt zusammen mit Lemma 3.3.1 (i)

$$w\hat{s}_{i_1}s_2\dots\hat{s}_{i_2}\dots\hat{s}_{i_n}\dots s_r < ws_2\dots s_r < ws_1\dots s_r.$$

□

Wir setzen nun die Bruhatordnung zu einer Totalordnung $\preceq$ auf W fort. Dies ist möglich nach Szpilrajns Theorem (Theorem 7.1.2 in [9]). Wir definieren für $w = w_0e^x \in W$

$$E_w = q_w^{\frac{1}{2}}\tilde{T}_{w_0}\Theta_x.$$

Wir schreiben auch E_x statt E_{e^x}.

3.3.4 Satz. *(i) Für alle $w \in W$ gibt es Elemente $a_{w'} \in \mathbb{Z}[q_*]$, von denen alle bis auf endlich viele 0 sind, mit*

$$E_w = T_w + \sum_{w'<w} a_{w'}T_{w'}.$$

(ii) $(E_w)_{w\in W}$ ist eine $\mathbb{Z}[q_*]$-Basis von H und die Basiswechselmatrix zur Basis $(T_w)_{w\in W}$ ist bezüglich $\preceq$ eine Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonale.

Beweis. (i): Sei $w = w_0 e^x$ und $y, z \in X_{dom}$ mit $x = y - z$. Wir setzen dann $\tilde{w} = w_0 e^y$ und $v = e^{-z}$. Dann haben wir $\tilde{w}v = w$ und

$$c_{\tilde{w},v}^2 = q_{\tilde{w}v} q_{\tilde{w}}^{-1} q_v \overset{3.1.3}{=} q_w q_{\tilde{w}}^{-1} q_z$$

mit den Notationen aus Lemma 3.3.3. Aus Teil (ii) und (iii) dieses Lemmas folgt dann

$$\begin{aligned} E_w &= q_w^{\frac{1}{2}} \tilde{T}_{w_0} \Theta_x = q_w^{\frac{1}{2}} q_{w_0}^{-\frac{1}{2}} q_y^{-\frac{1}{2}} q_z^{\frac{1}{2}} T_{w_0} T_{e^y} T_{e^z}^{-1} \overset{2.3.10}{=} q_w^{\frac{1}{2}} q_{\tilde{w}}^{-\frac{1}{2}} q_z^{\frac{1}{2}} T_{\tilde{w}} T_{e^z}^{-1} \\ &= c_{\tilde{w},v} T_{\tilde{w}} T_{v^{-1}}^{-1} = T_w + \sum_{w' < w} a_{w'} T_{w'} \end{aligned}$$

mit geeigneten $a_{w'} \in \mathbb{Z}[q_*]$.
(ii): Nach Teil (i) haben wir $E_w \in H$ für $w \in W$. Für $w \in W$ sei M_w der von allen Elementen $E_{w'}$ mit $w' \leq w$ erzeugte und N_w der von den Elementen $T_{w'}$ mit $w' \leq w$ erzeugte Untermodul von H. Nach Satz 2.4.5 und Satz 2.4.11 gibt es nur endlich viele solche Elemente w'. Teil (i) impliziert, dass es eine Matrix $G \in M_n(\mathbb{Z}[q_*])$ gibt, die – bezüglich der Einschränkung von $\preceq$ auf die Menge aller Elemente $w' \leq w$ angeordnet – untere Dreiecksgestalt hat, deren Hauptdiagonalelemente nur Einsen sind und die

$$G(T_{w'})_{w' \leq w} = (E_{w'})_{w' \leq w}$$

erfüllt. Diese Matrix hat also Determinante 1 und ist deshalb ein Automorphismus von $M_w = N_w$. Insbesondere bilden die Elemente $E_{w'}$ mit $w' \leq w$ eine Basis von M_w. Wegen $T_w \in M_w$ ist $(E_w)_{w \in W}$ ein Erzeugendensystem von H. Ist hingegen

$$a_1 E_{w_1} + \ldots a_n E_{w_n} = 0,$$

dürfen wir $w_1 \prec \ldots \prec w_n$ annehmen. Wir finden dann $a_{w'} \in \mathbb{Z}[q_*]$, von denen alle bis auf endlich viele 0 sind mit

$$0 = a_1 E_{w_1} + \ldots + a_n E_{w_n} = a_n T_{w_n} + \sum_{w' \prec w_n} a_{w'} T_{w'}.$$

Da die Elemente T_w linear unabhängig sind, muss schon $a_n = 0$ gelten. Induktiv folgt dann, dass die E_w linear unabhängig sind. □

3.3.5 Corollar. *$A \cap H$ ist ein freier $\mathbb{Z}[q_*]$-Modul mit der Basis $(E_x)_{x \in X}$.*

Beweis. Jedes Element von $A \cap H$ schreibt sich eindeutig in der Form $\sum_{w \in W} a_w E_w$. Nach Satz 3.2.5 muss dann aber $a_w = 0$ gelten, falls $w \notin e^X$. □

3.3.6 Lemma. *Für $w_0 \in W_0$ und $x' \in X$ sei*

$$X(w_0, x') = \{x \in X : \mathrm{l}(w_0 e^x) = \mathrm{l}(w_0 e^{x'}) + \mathrm{l}(e^{x - x'})\}.$$

Dann gibt es eine endliche Teilmenge $M \subset X$ mit

$$X = \bigcup_{x' \in M} X(w_0, x') \text{ für alle } w_0 \in W_0.$$

Beweis. Sei M_0 ein endliches Erzeugendensystem von X_{dom} und

$$M_1 = \{\sum_{x \in M_0} a_x x : a_x \in \{0,1\} \text{ für alle } x \in M_0\}.$$

Dann ist auch

$$M = W_0 M_1$$

endlich. Sei nun $w_0 \in W_0$ und $x \in X$. Nach Lemma 2.3.11 genügt es ein $x' \in M$ zu finden, so dass

$$n(\alpha, w_0 e^{x'}) = \begin{cases} (x', \check{\alpha}) & \text{, falls } w_0(\alpha) \in R^+ \\ 1 + (x', \check{\alpha}) & \text{, falls } w_0(\alpha) \in R^- \end{cases}$$

und

$$n(\alpha, e^{x-x'}) = (x - x', \check{\alpha})$$

für alle $\alpha \in R^+$ das gleiche Vorzeichen haben. Dies bedeute wie immer, dass beide Zahlen ≥ 0 oder beide Zahlen ≤ 0 sind. Wir finden nach Satz 2.1.19 ein $w'_0 \in W_0$ mit

$$w'_0(x) \in X_{dom}$$

und deshalb paarweise verschiedene $x_1, \dots x_r \in w_0'^{-1}(M_0)$ und positive ganze Zahlen $a_1, \dots, a_r$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i.$$

Wir setzen nun

$$x' = \sum_{i=1}^{r} x_i \in w_0'^{-1}(M_1) \subset M.$$

Per Konstruktion liegen dann $x, x-x'$ und x' in $w_0'^{-1}(X_{dom})$ und damit im Abschluss der gleichen Weylkammer. Nach Lemma 2.1.17 (iii) haben die Zahlen $(x, \check{\alpha})$, $(x - x', \check{\alpha})$ und $(x', \check{\alpha})$ alle das gleiche Vorzeichen. Deshalb haben die Zahlen $n(\alpha, w_0 e^{x'})$ und $n(\alpha, e^{x-x'})$ das gleiche Vorzeichen, falls $w_0(\alpha) \in R^+$. Ist nun $w_0(\alpha) \in R^-$, so betrachten wir drei Fälle:
1. Fall: $(x, \check{\alpha}) > 0$. Dann haben wir

$$n(\alpha, w_0 e^{x'}) = 1 + (x', \check{\alpha}) \geq 1$$

und

$$n(\alpha, e^{x-x'}) = (x - x', \check{\alpha}) \geq 0.$$

2. Fall: $(x, \check{\alpha}) = 0$. Dann haben $(x', \check{\alpha})$ und $(x - x', \check{\alpha}) = -(x', \check{\alpha})$ das gleiche Vorzeichen, müssen also schon 0 sein. Das bedeutet

$$n(\alpha, w_0 e^{x'}) = 1 \text{ und } n(\alpha, e^{x-x'}) = 0.$$

3. Fall: $(x, \check{\alpha}) < 0$. Da x Summe der x_i ist, muss es ein i mit $(x_i, \check{\alpha}) < 0$ geben. Andererseits liegen alle x_i im Abschluss der gleichen Weylkammer wie x, das heißt wir haben

$$(x_i, \check{\alpha}) \leq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq r.$$

Deshalb ist $(x', \check{\alpha}) < 0$ und damit $(x', \check{\alpha}) \leq -1$. Das bedeutet

$$n(\alpha, w_0 e^{x'}) = 1 + (x', \check{\alpha}) \leq 0 \text{ und } n(\alpha, e^{x-x'}) = (x - x', \check{\alpha}) \leq 0.$$

$\square$

Für alle $w_0 \in W_0$ sei nun $H(w_0)$ der von den Elementen $(E_{w_0 e^x})_{x \in X}$ erzeugte Untermodul von H.

3.3.7 Satz. *(i)* $H = \bigoplus_{w_0 \in W_0} H(w_0)$ *als* $\mathbb{Z}[q_*]$*-Modul*

(ii) Für $w_0 \in W_0$ *ist* $H(w_0) = T_{w_0} J(w_0)$ *für ein endlich erzeugtes gebrochenes Ideal* $J(w_0)$ *von* $A \cap H$.

(iii) H *ist als* $A \cap H$*-Rechtsmodul endlich erzeugt.*

Beweis. (i) ist klar.
(ii): Für $w \in W_0$ und $x, x' \in X$ setzen wir

$$q(w_0 e^x, e^{x'}) = q_{w_0 e^x}^{\frac{1}{2}} q_{x'}^{\frac{1}{2}} q_{w_0 e^{x+x'}}^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich haben wir dann

$$E_{w_0 e^x} E_{x'} = q_{w_0 e^x}^{\frac{1}{2}} q_{x'}^{\frac{1}{2}} \tilde{T}_{w_0} \Theta_x \Theta_{x'} = q_{w_0 e^{x+x'}}^{\frac{1}{2}} q(w_0 e^x, e^{x'}) \tilde{T}_{w_0} \Theta_{x+x'} = q(w_0 e^x, e^{x'}) E_{w_0 e^{x+x'}}.$$

Wir wählen nun eine Menge $M = \{x_1, \ldots, x_r\}$ wie in Lemma 3.3.6. Zu $x \in X$ fixieren wir ein i mit $x \in X(w_0, x_i)$. Aus

$$q(w_0, e^{x_i}) E_{w_0 e^{x_i}} = E_{w_0} E_{x_i} = T_{w_0} E_{x_i}$$

folgt dann mit Lemma 3.1.2 (iv)

$$E_{w_0 e^x} = E_{w_0 e^{x_i}} E_{x - x_i} = E_{w_0} q(w_0, e^{x_i})^{-1} E_{x_i} E_{x - x_i} = T_{w_0} q(w_0, e^{x_i})^{-1} E_{x_i} E_{x - x_i}.$$

Sei nun $J(w_0)$ der von den Elementen $(q(w_0, e^{x_i})^{-1} E_{x_i})_{1 \leq i \leq r}$ erzeugte $A \cap H$-Rechtsuntermodul von $A \cap H[q_*^{-1}]$. Dann haben wir nach obigen Rechnungen

$$H(w_0) = T_{w_0} J(w_0).$$

(iii) folgt aus (i) und (ii). $\square$

3.3.8 Proposition. *$A \cap H$ ist als $\mathbb{Z}[q_*]$-Algebra endlich erzeugt.*

Beweis. Nach Proposition 2.3.9 finden wir ein endliches Erzeugendensystem M des Monoids X_{dom}. Dann ist $M_X = W_0(M)$ auch endlich. Sei nun $x \in X$ beliebig. nach Satz 2.1.19 finden wir ein $w_0 \in W_0$ mit $w_0(x) \in X_{dom}$. Wir finden dann $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit

$$w_0(x) = x_1 + \ldots + x_n$$

und deshalb

$$x = w_0^{-1}(x_1) + \ldots + w_0^{-1}(x_n).$$

Aus Corollar 2.3.12 (ii) folgt dann

$$E_x = E_{w_0^{-1}(x_1)} \ldots E_{w_0^{-1}(x_n)}.$$

Nach Corollar 3.3.5 wird $A \cap H$ als Algebra von $(E_x)_{x \in M_X}$ erzeugt. □

Sei $Z(H)$ das Zentrum von H. Wir wollen nun die Aussagen über das Zentrum von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$ auf $Z(H)$ übertragen. Dazu bemerken wir zunächst, dass sich die W_0-Operation auf A zu einer Operation auf $A \cap H$ einschränkt. Denn für $w_0 \in W_0$ und $x \in X$ haben wir nach Lemma 3.1.2 (iii)

$$w_0 E_x = q_x^{\frac{1}{2}} \Theta_{w_0(x)} = q_{w_0(x)}^{\frac{1}{2}} \Theta_{w_0(x)} = E_{w_0(x)}.$$

Sei nun $M = W_0 x$ eine Bahn der W_0-Operation auf X. Dann setzen wir

$$Z_M = q_x^{\frac{1}{2}} z_M = q_x^{\frac{1}{2}} \sum_{x' \in M} \Theta_{x'} = \sum_{x'} q_{x'}^{\frac{1}{2}} \Theta_{x'} = \sum_{x' \in M} E_{x'}.$$

3.3.9 Satz. *(i)* $Z(H) = A^{W_0} \cap H = (A \cap H)^{W_0}$

(ii) *$Z(H)$ ist ein freier $\mathbb{Z}[q_*]$-Modul mit Basis Z_M, wobei M die Bahnen der W_0 Operation auf X durchläuft.*

(iii) *$A \cap H$ ist ein endlich erzeugter $Z(H)$-Modul.*

(iv) *$Z(H)$ ist als $\mathbb{Z}[q_*]$-Algebra endlich erzeugt.*

Beweis. (i): Sei Z das Zentrum von $H[q_*^{-\frac{1}{2}}]$. Dann haben wir offenbar $Z(H) = Z \cap H$. Die Behauptung folgt aus Satz 3.2.11.
(ii): Nach Satz 3.2.11 liegen die Elemente Z_M in $Z(H)$. Sei andererseits $z = \sum_{x \in X} a_x E_x \in Z(H)$. Dann haben wir

$$\sum_{x \in X} a_x E_{w_0(x)} = w_0 z = z = \sum_{x \in X} a_x E_x \text{ für alle } w_0 \in W_0$$

und daher $a_x = a_{x'}$, falls es ein $w_0 \in W_0$ mit $x = w_0(x')$ gibt. Folglich wird $Z(H)$ von den Z_M erzeugt. Die lineare Unabhängigkeit folgt aus der linearen Unabhängigkeit der E_x und der Tatsache, dass die Bahnen disjunkt sind.
(iii) und (iv): Nach dem Hilbertschen Basissatz ist $\mathbb{Z}[q_*]$ noethersch. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 3.3.8 und [1] Chap. V, §1.9, Theorem 2 und (i). □

Literaturverzeichnis

[1] N. Bourbaki. *Algèbre Commutative. Chapitres 5 à 7, Éléments de mathématique*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[2] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie Chapitres 4, 5 et 6, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1337*, Hermann, Paris, 1968.

[3] T. J. Haines. *The combinatorics of Bernstein functions*, Trans. AMS 353, 1251–1278, 2001.

[4] J. E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[5] R. Kane. *Reflection Groups and Invariant Theory, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 5*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] G. Lusztig. *Affine Hecke Algebras and Their Graded Version*, Journal of the American Mathematical Society, Vol. 2, No. 3, Jul. 1989.

[7] I. G. Macdonald. *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials, Cambridge Tracts in Mathematics, 157*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[8] P. Schneider. *Wurzelsysteme*, Seminar an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, Wintersemester 2006/07.

[9] B.S.W. Schröder. *Ordered Sets: An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 2005.

[10] SGA III. *Schémas en groupes (séminaire dirigé par A. Grothendieck), Lecture Notes in Math., vol. 153*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[11] M.-F. Vigneras. *Algèbres de Hecke affines génériques*, arXiv:math/0301058v3, 2004.

Eigenständigkeitserklärung

Gemäß § 21 (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälschen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, den 24. April 2009

Marten Bornmann