# $p$-adische Galoisdarstellungen und $(\varphi, \Gamma)$-Moduln

**Torsten Schoeneberg**

Diplomarbeit

Betreuer: Prof. Dr. Peter Schneider

Fachbereich Mathematik
Westfälische Wilhelms-Universität
Münster

Wintersemester 2008/2009

*We all believe that mathematics is an art.*

Emil Artin[1]

*You have a quarrel on hand, I see,*
*with some of the algebraists of Paris; but proceed.*

Poe, *The Purloined Letter*

[1] Rezension von Bourbakis *Algebra*. In: *The Collected Papers of Emil Artin*. Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1965, S. 534–538.

# Einleitung

Was sind „$p$-adische Galoisdarstellungen“ und „$(\varphi, \Gamma)$-Moduln“? Zunächst einmal sind beide Bezeichnungen ungenau. Erstere sind, genauer gesagt, Darstellungen der absoluten Galoisgruppe eines vollständigen diskret bewerteten Körpers von Charakteristik 0 mit perfektem Restklassenkörper der Charakteristik $p$ auf endlichdimensionalen $\mathbb{Q}_p$-Vektorräumen (oder endlich erzeugten $\mathbb{Z}_p$-Moduln). Andererseits wäre zu den $(\varphi, \Gamma)$-Moduln etwa zu ergänzen, über welchen Ringen sie definiert sind. Nimmt man nun all diese Spezifizierungen korrekt vor, so ist die Aussage der Arbeit: Im wesentlichen ist beides dasselbe.

Beginnen wir von vorn und fixieren wir gleich ein für allemal die Primzahl $p$. Gegeben sei also ein Körper $K$, $char(K) = 0$, der bezüglich einer diskreten Bewertung vollständig ist und perfekten Restklassenkörper $k$ mit $char(k) = p$ hat. Das umfaßt alle endlichen Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$, mit dem Standardbeispiel $K = \mathbb{Q}_p, k = \mathbb{F}_p$. Fixieren wir einen algebraischen Abschluß $\bar{K}$, so ist die *absolute Galoisgruppe* $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K} \mid K)$ ein ebenso kompliziertes wie – namentlich für die Zahlentheorie – interessantes Objekt.

Eine Methode, diese (oder irgendeine) Gruppe zu untersuchen, ist die Klassifikation ihrer *Darstellungen*; also die Analyse, auf welche Weise die Gruppe auf bestimmten Moduln über lineare Automorphismen wirkt, wobei noch gewisse Stetigkeitsbedingungen zu erfüllen sind. Die klassische Darstellungstheorie betrachtet Darstellungen auf endlichdimensionalen $\mathbb{C}$- oder $\mathbb{R}$-Vektorräumen; auch zu den $\ell$-adischen Darstellungen, also solchen auf endlichdimensionalen $\mathbb{Q}_\ell$-Vektorräumen für die Primzahlen $\ell \neq p$, gibt es eine Theorie. In den letzten Jahrzehnten ist schließlich der verbleibende Fall, nämlich Darstellungen von $G_K$ auf endlichdimensionalen $\mathbb{Q}_p$-Vektorräumen (oder eben $p$-adische Galoisdarstellungen), genauer erforscht worden. In dieses Gebiet gehört die vorliegende Arbeit.

Ihr Gegenstand ist eine von Jean-Marc Fontaine bewiesene Kategorienäquivalenz, welche die $p$-adischen Galoisdarstellungen in enge Beziehung setzt zu scheinbar ganz anderen Objekten, eben jenen $(\varphi, \Gamma)$-Moduln. Das sind endlich erzeugte Moduln über Ringen $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$, auf denen ein Operator $\varphi$ und eine (im Vergleich zu $G_K$ einfache) Gruppe $\Gamma_K$ in geeigneter Weise operieren. Die $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ werden sich als gewisse Laurentreihenringe mit Koeffizienten (fast) in $K$ herausstellen. Ihre Konstruktion wird einen großen Teil der Arbeit in Anspruch nehmen.

Grob gesagt ist der Nutzen folgender: Statt die ziemlich unbekannte Gruppe $G_K$ auf recht elementaren Objekten ($\mathbb{Z}_p$-Moduln bzw. $\mathbb{Q}_p$-Vektorräumen) operieren zu lassen, betrachten wir mit $\varphi$ und $\Gamma_K$ zwei vergleichsweise einfache Operationen auf komplizierteren, aber eben noch beschreibbaren Moduln. Tatsächlich zeigt die Äquivalenz natürlich, daß beim Übersetzen zwischen diesen Bereichen keine Information verloren geht; das heißt, in gewisser Hinsicht kann keine der beiden Beschreibungen „einfacher“ sein als die andere. In diesem Sinne dürften etwa die genannten Laurentreihenringe (noch) komplizierter sein, als sie auf den ersten Blick aussehen. Aber gerade daß sie in gewisser Weise „anschaulich“ sind, kann durchaus ein Vorteil sein. Ähnliche Äquivalenzen in anderen Bereichen der Mathematik zeigen, daß sich auf manche Frage, wenn man sie in eine andere Sprache übersetzt, dort auch eine Antwort geben läßt, welche man nur noch zurückübersetzen muß.

Ziel der Arbeit ist es, Fontaines teilweise skizzenhaften Beweis ([Fon90, Abschnitte A1 und A3]) genau auszuführen, dabei einige Schritte zu motivieren und mögliche Verallgemeinerungen anzudeuten. Die Arbeit baut dabei auf einigen in der Vorlesung „Theorie des Anstiegs" ([Schn07]) bereitgestellten Grundlagen auf.

Für das **erste Kapitel** werden nur einfache Grundlagen aus der kommutativen Algebra benötigt, die in Abschnitt 1.1 rekapituliert werden. Eine Ausnahme bilden die gelegentlich vorkommenden Ringe von Wittvektoren, die man sich hier aber noch wegdenken kann (man überlese 1.1.13 und setze im ganzen Abschnitt 1.4 $r = 1 \Leftrightarrow q = p \Leftrightarrow \tau = \sigma \Leftrightarrow W = \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow L = \mathbb{Q}_p$). Ziel des Kapitels ist es, für einen Körper $E$ der Charakteristik $p$ die Äquivalenz von Kategorien $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_E)$ und $\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\sigma)}$ zu zeigen. Diese Kategorien werden in den Abschnitten 1.2 und 1.3 allgemeiner eingeführt. Im Abschnitt 1.4 wird dann die Äquivalenz gezeigt. Sie basiert letztlich darauf, daß man eine verallgemeinerte Version des als *Hilbert 90* bekannten Satzes aus der Gruppenkohomologie sowie das klassische Ergebnis [Schn07, Satz 2.1] geeignet liften kann.

Um dies auf die absolute Galoisgruppe unseres Körpers $K$ anzuwenden, wird diesem im **zweiten Kapitel** ein Körper $E(K)$ der Charakteristik $p$ zugeordnet, und zwar so, daß sich zumindest eine „große" Untergruppe $H \leq G_K$ mit der absoluten Galoisgruppe von $E(K)$ identifiziert. Dies geschieht mittels der von Fontaine und Wintenberger entwickelten Theorie der *Normenkörper*; dabei ist es unvermeidbar, oft auf die grundlegende Arbeit [Win83] und einmal auf die Theorie höherer Verzweigungsgruppen zu verweisen. Im übrigen setzt dieses Kapitel nur etwas Vertrautheit mit nicht-archimedischen Bewertungen / ultrametrischer Analysis und unendlicher Galoistheorie, etwa dem zyklotomischen Charakter, voraus. – Wenn man glaubt, daß ein (vollständiger, absolut unverzweigter) diskreter Bewertungsring $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ mit Restklassenkörper $E(K)$ (und einem Frobenius-Lift $\sigma$) existiert, erhält man mit dem ersten Kapitel jedenfalls eine Äquivalenz der $p$-adischen $G_{E(K)}(= H)$-Darstellungen zu den etalen $\varphi$-Moduln über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$:

$$Rep_{\mathbb{Z}_p}(H) \sim \Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\sigma)}$$

Wir möchten aber nicht nur die Darstellungen von $H$, sondern die von ganz $G_K$ beschreiben. Nun erlaubt es die Normenkörperkonstruktion, zusätzliche Information durch eine Wirkung des Quotienten $\Gamma := G_K/H$ auf $E(K)$ zu codieren. Im wesentlichen gibt es hier zwei Varianten: Wir können $H$ so wählen, daß $\Gamma$ eine offene Untergruppe von $\mathbb{Z}_p^\times$ ist (wie in [CC98] und [CC99]), oder spezieller so, daß $\Gamma$ gleich der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_p, +)$ ist (wie in [Fon90]). Wir stellen die erste Methode in Abschnitt 2.2 ausführlich und die zweite in Abschnitt 2.3 etwas knapper dar. Nebenbei werden die Körper $E(K)$ genauer bestimmt: sie sind isomorph zu Laurentreihenkörpern $k_F((T))$, wobei $k_F$ eine endliche Erweiterung des Restklassenkörpers $k$ von $K$ (in Spezialfällen gleich $k$) ist. Insbesondere sind auch sie lokale Körper.

Haben wir nun zusätzliche Information in einer Operation von $\Gamma$ auf $E(K)$ behalten, so sollten wir diese nicht durch die Wahl eines beliebigen Lifts $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ wie oben wieder verlieren, sondern speziellere vollständige diskrete Bewertungsringe $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ mit Restklassenkörper $E(K)$ konstruieren, nämlich so, daß sich die $\Gamma$-Operation zu einer Operation hierauf liftet. Außerdem sollte ein Frobenius-Lift auf $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ operieren. Die Konstruktion dieser $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ (mit Quotientenkörper

$\mathcal{E}(K)$) geschieht im **dritten Kapitel**. Die Idee ist, die gesuchten diskreten Bewertungsringe als Teilringe eines sehr großen Rings von Wittvektoren zu realisieren. Dafür muß auf diesen eine etwas schwächere als die $p$-adische Topologie definiert werden, was in allgemeiner Form in Abschnitt 3.1 geschieht. In 3.2 und 3.3 wird die eigentliche Konstruktion durchgeführt. – Für dieses Kapitel ist Übung im Umgang mit Wittvektoren unerläßlich. Die topologischen Resultate sind so elementar wie möglich gehalten.

Das **vierte Kapitel** stellt schließlich die angestrebte Kategorienäquivalenz dar. Nachdem wir die Zusatzinformation durch Operation von $\Gamma$ auf $E(K)$ und $\mathcal{E}(K)$ behalten haben, definieren wir in Abschnitt 4.1 als Spezifizierung der (etalen) $\varphi$-Moduln aus dem ersten Kapitel (etale) $\varphi$-$\Gamma$-Moduln. In Abschnitt 4.2 wird schließlich gezeigt, daß diese genau die richtige Kategorie liefern, d. h. wir erhalten die Äquivalenz

$$Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_K) \sim \Gamma(K)\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)},\sigma)}$$

## Danksagungen

Viele Menschen haben es mir erleichtert, diese Diplomarbeit zu erstellen.
Zuerst danke ich Herrn Prof. Dr. Peter Schneider für die Betreuung, für seine Geduld und sein Vertrauen. Zwischenzeitlich hat Dr. Jan Kohlhaase die Betreuung übernommen und mir weitergeholfen, wofür ich gleichfalls danke.
Dank sagen müßte ich vielen Kommilitonen für fachliche Gespräche, praktische Hilfe und, am meisten, für freundschaftliche Aufmunterung. Namentlich möchte ich meine Mit-Diplomanden Thomas Albers und Marten Bornmann sowie Daniel Wortmann hervorheben. Alle anderen wissen, daß auch sie gemeint sind. Unter den Korrekturlesern haben sich Henrik Rüping und das Ehepaar Schlegel lobenswert hervorgetan. Auch Dominik Menning danke ich noch einmal: Wäre er nicht mein erster Übungsleiter gewesen, wäre es vielleicht nie zu dieser Diplomarbeit gekommen. Allen übrigen, die mir das Leben verschönert, mich motiviert und sich mitunter dazu verstiegen haben, Interesse an höherer Algebra zu heucheln, sei versichert, daß ich ihren guten Willen bemerkt habe und auch ihnen dafür danke.
Schließlich danke ich meiner Familie, zuvörderst meinen Eltern und meinem Bruder, deren bedingungsloser Unterstützung und Liebe ich mir immer sicher sein kann.

## Eigenständigkeitserklärung

Gemäß §21 Absatz (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, daß ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfaßt, keine weiteren Hilfsmittel und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen benutzt habe.

Torsten Schoeneberg, Münster, im März 2009

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Die Kategorienäquivalenz $Rep_{W(\mathbb{F}_{p^r})}(G_E) \sim \Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\,\sigma^r)}$

## 1.1 Vorbereitungen

Wir halten uns in dieser Arbeit an die Konventionen der *kommutativen Algebra*: Alle betrachteten Ringe sind kommutativ und haben ein Einselement; alle Ringhomomorphismen respektieren die Eins. Für einen Ring $R$ ist $R^\times$ die Einheitengruppe, $(\mathrm{GL}_n(R) \subset)\, \mathrm{M}_{n\times n}(R)$ die Menge der (invertierbaren) $n \times n$-Matrizen. Definitionen und grundlegende Eigenschaften von Integritätsbereichen, Hauptidealringen, (maximalen, Prim-)Idealen, endlich erzeugten Moduln etc. werden als bekannt vorausgesetzt; ebenso elementare Begriffe abstrakter Algebra wie direkte Summe und Produkt, direkter und projektiver Limes, exakte Sequenzen, kommutative Diagramme etc. „Endlich frei“ bedeutet frei von endlichem Rang. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beginnen mit der 1; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Primzahl $p$ identifizieren wir in einem Ring $R$ mit dem Element $\underbrace{1_R + ... + 1_R}_{p\,\mathrm{mal}}$. $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_{p^r}$, $\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Q}_p$ haben die übliche Bedeutung.

Wir notieren den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen:

**Satz 1.1.1.** *Sei $R$ ein Hauptidealring und $P \subseteq R$ ein Vertretersystem der Primelemente von $R$. Sei $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul mit Torsionsuntermodul $\mathrm{Tor}(M) \subseteq M$. Dann gibt es einen endlich freien Untermodul $F \subseteq M$ mit eindeutig bestimmtem Rang $d$ und zu jedem $\pi \in P$ natürliche Zahlen $n(\pi,1) \leqslant ... \leqslant n(\pi, r_\pi)$ mit $r_\pi = 0$ für fast alle $\pi$ $(n(\pi,0) := 0)$ und*

$$M \simeq F \oplus \mathrm{Tor}(M)$$

$$\mathrm{Tor}(M) \simeq \bigoplus_{\pi\in P} \bigoplus_{j_\pi=1,\dots,r_\pi} R/\pi^{n(\pi,j_\pi)}R$$

*Insbesondere wird $\mathrm{Tor}(M)$ vom Element $\prod_{\pi\in P} \pi^{n(\pi,r_\pi)}$ annulliert.*

*Beweis.* Siehe etwa [Bos03, Satz 6.4.2 und 6.4.3]. □

Auch Definition und grundlegende Eigenschaften des *Tensorprodukts* inklusive Funktorialität, Vertauschen mit direkten Summen und Rechtsexaktheit setzen wir voraus. Ein Ringhomomorphismus $\sigma : A \to B$ macht $B$ per $a \cdot b := \sigma(a)b$ $(a \in A, b \in B)$ zu einem $A$-Modul, den wir mit $B_\sigma$ bezeichnen; $\sigma$ nennen wir eine *Skalarerweiterung*. Für einen $A$-Modul $M$ trägt dann bekanntlich $B_\sigma \underset{A}{\otimes} M$ eine $B$-(Links-)Modulstruktur per $b_1 \cdot (b_2 \otimes m) := b_1 b_2 \otimes m$.
Gelegentlich benutzen wir die folgenden Identifikationen:

**Definition und Bemerkung 1.1.2.** Seien $A$ ein Ring, $L$ und $M$ $A$-Moduln. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ setze
$\mathfrak{a}M :=$ von den Elementen $\alpha m$ $(\alpha \in \mathfrak{a}, m \in M)$ erzeugter Untermodul von M
Speziell ist für ein Hauptideal $\mathfrak{a} = (a)$ offenbar

$$aM := (a)M = \{m \in M \mid \text{ es ex. } m' \in M \text{ mit } m = am'\}$$

Wir haben kanonische Isomorphismen

$$L \underset{A}{\otimes} M/\mathfrak{a}M \xrightarrow{\sim} L/\mathfrak{a}L \underset{A/\mathfrak{a}}{\otimes} M/\mathfrak{a}M \xrightarrow{\sim} L/\mathfrak{a}L \underset{A}{\otimes} M$$

die durch

$$l \otimes (m + \mathfrak{a}M) \mapsto (l + \mathfrak{a}L) \otimes (m + \mathfrak{a}M) \mapsto (l + \mathfrak{a}L) \otimes m$$

beschrieben werden.

*Beweis.* Folgt aus [A, chap. II, §3, no. 6, corollaire 3], denn das Ideal $\mathfrak{a}$ annulliert $M/\mathfrak{a}M$. Der zweite Isomorphismus ist wegen $L \underset{A}{\otimes} M \cong M \underset{A}{\otimes} L$ nur eine Umformulierung des ersten. □

**Lemma 1.1.3.** *Sei $\sigma : A \to B$ eine Skalarerweiterung und $a \in A$ ein beliebiges Element.*

*i. Für jeden $A$-Modul $M$ haben wir einen Isomorphismus (von $B$-(Links-)Moduln)*

$$\begin{array}{ccc} B_\sigma \underset{A}{\otimes} (M/aM) & \xrightarrow{\sim} & (B_\sigma \underset{A}{\otimes} M)/[\sigma(a) \cdot (B_\sigma \underset{A}{\otimes} M)] \\ \sum_i b_i \otimes (m_i + aM) & \mapsto & \left(\sum_i b_i \otimes m_i\right) + \sigma(a) \cdot (B_\sigma \underset{A}{\otimes} M) \end{array}$$

*ii. Ist $V$ ein endlich freier $A$-Modul mit Basis $v_1, ..., v_d$, so ist $\{1 \otimes v_i\}_{1 \leqslant i \leqslant d}$ eine Basis von $B_\sigma \underset{A}{\otimes} V$ als $B$-Linksmodul.*

*iii. In der Situation von ii. ist außerdem $\{1 \otimes (v_i + aV)\}_{1 \leqslant i \leqslant d}$ ein Erzeugendensystem von $B_\sigma \underset{A}{\otimes} (V/aV)$ als $B$-(Links-)Modul, und es gilt*

$$\sum_{i=1}^{d} b_i \otimes (v_i + aV) = 0 \;\Leftrightarrow\; b_1 \equiv ... \equiv b_d \equiv 0 \;\; mod \;\; \sigma(a)B$$

*Beweis.*

i. [A, chap. II, §3, no. 6, cor. 1 zu prop. 6] mit $E = B_\sigma, E' = 0, F = M, F' = aM$ liefert den angegebenen Isomorphismus (zunächst additiver Gruppen), denn bezeichne $\iota : aM \hookrightarrow M$ die Inklusion, dann besteht das Bild von $B_\sigma \underset{A}{\otimes} aM$ unter $id \otimes \iota$ aus den endlichen Summen von Elementen der Form $b \otimes am = (\sigma(a)b) \otimes m = \sigma(a) \cdot (b \otimes m)$ mit $b \in B, m \in M$; dies ist aber genau der $B$-(Links-)Untermodul $\sigma(a)(B_\sigma \underset{A}{\otimes} M)$. Der Isomorphismus ist offenbar mit den $B$-(Links-)Modulstrukturen verträglich.

ii. gilt, weil das Tensorprodukt mit endlichen direkten Summen vertauscht, sowie $B_\sigma \underset{A}{\otimes} A \simeq B$ $(b \otimes 1 \mapsto b)$ als $B$-(Links-)Modul.

iii. Sei oBdA $a \notin A^\times$, dann ist $V/aV$ endlich freier $A/(a)$-Modul, und nach 1.1.2 ist

$$B_\sigma \underset{A}{\otimes} (V/aV) \simeq (B_\sigma/\sigma(a)B_\sigma) \underset{A/(a)}{\otimes} (V/aV)$$

Die Aussage folgt aus ii. für die von $\sigma$ induzierte Skalarerweiterung $A/(a) \to B_\sigma/\sigma(a)B_\sigma$ und mit der Identifikation aus i.

□

**Definition 1.1.4.** Sei $A$ ein Ring. Ein $A$-Modul $M$ heißt <u>flach</u>, wenn für jede exakte Sequenz von $A$-Moduln

$$0 \to N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2 \xrightarrow{\beta} N_3 \to 0$$

auch die Sequenz

$$0 \to M \underset{A}{\otimes} N_1 \xrightarrow{id\otimes\alpha} M \underset{A}{\otimes} N_2 \xrightarrow{id\otimes\beta} M \underset{A}{\otimes} N_3 \to 0$$

exakt ist. Er heißt <u>treu-flach</u>, wenn auch umgekehrt stets die Exaktheit der ersten Sequenz aus der Exaktheit der zweiten folgt.
Eine Skalarerweiterung $\sigma : A \to B$ heißt (treu-)flach, wenn der $A$-Modul $B_\sigma$ (treu-)flach ist.

**Lemma 1.1.5.** *Sei $B \supseteq A$ eine treu-flache Ringerweiterung und $M$ ein $A$-Modul. Läßt sich ein Element von $B \underset{A}{\otimes} M$ in der Form $1 \otimes m$ darstellen, so ist $m \in M$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Spezialfall von [AC, chap. I, §3, no. 5, prop. 9]. □

Wir benutzen elementare Objekte und Ergebnisse der Theorie *diskreter Bewertungsringe*, im folgenden als DBR abgekürzt – vgl. dazu [Schn07, Kapitel 3 und 4]. Falls nicht anders erwähnt, sei stets $A$ ein DBR mit Primelement $\pi$ und Restklassenkörper $k$.

**Lemma 1.1.6.** *Sei $B \supseteq A$ eine Ringerweiterung, so daß $\pi \notin B^\times$ und $B$ Integritätsbereich ist (z. B. wenn auch $B$ DBR mit Primelement $\pi$ ist). Dann ist $B$ über $A$ treu-flach.*

*Beweis.* Nach [AC, chap. I, §3, no. 1, prop. 1] ist $B$ über $A$ treu-flach genau dann, wenn $B$ flach ist und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von $A$ gilt: $B \neq B\mathfrak{m}$. Da $A$ Hauptidealring ist, ist „flach" äquivalent zu „torsionsfrei" [AC, chap. I, §2, no. 4, prop. 3(ii)]; dies erfüllt $B$ als $A$ enthaltender Integritätsbereich. – Das einzige maximale Ideal von $A$ wird von $\pi$ erzeugt, und wegen der Voraussetzung ist $B \neq B\pi$. □

**Lemma 1.1.7.** *Sei $M$ ein $A$-Modul.*

*i. Äquivalent sind:*
*a) $M$ ist von endlicher Länge.*
*b) $M$ ist endlich erzeugter Torsionsmodul.*
*c)*

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} A/(\pi^{n_i})$$

*mit $r, n_i \in \mathbb{N}$, wobei wir oBdA $n_1 \leqslant n_2 \leqslant ... \leqslant n_r$ annehmen können. Für $r = 0$ setzen wir konventionell $M = 0$.*
*Insbesondere wird $M$ dann von $\pi^{n_r}$ annulliert, und $l(M) = \sum_{i=1}^{r} n_i$. Ist umgekehrt $\pi^m$ die niedrigste $\pi$-Potenz, welche $M$ annulliert, so ist $M$ von obiger Gestalt mit einem $r \in \mathbb{N}_0$ und $m = n_r$.*

*ii.* *Im Spezialfall $n_1 = ... = n_r = 1$ (oder $r = 0$) ist $M$ ein $r$-dimensionaler $k$-Vektorraum.*

*iii.* *Hat $A$ endlichen Restklassenkörper $k$, so sind die Aussagen aus i. äquivalent dazu, daß $M$ als Menge endlich ist.*

*Beweis.*

i. a) $\Rightarrow$ b): Induktion nach der Länge. $l(M) = 0$ ist trivial, $l(M) = 1 \Leftrightarrow M \simeq A/(\pi) = k$ wird von $1_k$ erzeugt und von $\pi$ annulliert ($k$ ist der einzige einfache $A$-Modul).
Sei nun $l(M) = l \geqslant 2$ und die Behauptung bereits für alle Moduln mit Länge $\leqslant l-1$ gezeigt. Nach Definition gibt es einen maximalen Untermodul $N \subset M$ mit $l(N) = l-1$ sowie einen $A$-Modulisomorphismus $\alpha : M/N \simeq k = A/(\pi)$, weswegen $\pi M \subseteq N$ gilt. Nach Induktionsannahme ist $N$ Torsionsmodul; zu $m \in M$ existiert mithin $r \in A \setminus \{0\}$ mit $0 = r(\pi m) = (r\pi)m$, so daß auch $M$ Torsionsmodul ist. Nach Induktionsannahme ist $N$ endlich erzeugt, etwa von $m_1, ..., m_s$; dann bilden $\alpha^{-1}(1_k), m_1, ..., m_s$ ein Erzeugendensystem von $M$.
b) $\Rightarrow$ c): Satz 1.1.1.
c) $\Rightarrow$ a) und die Zusatzbehauptungen sind klar.

ii. Klar.

iii. Ist $M$ endlich, insbesondere endlich erzeugt, so kann er keinen freien Anteil enthalten, da die Elemente $\pi^n \in A$ paarweise verschieden sind. Ist umgekehrt $|k| = q \in \mathbb{N}$, so sieht man mit Induktion leicht, daß ein $A$-Modul der Länge $l$ aus $q^l$ Elementen besteht.

□

**Satz 1.1.8.** *Sei $M$ stets ein $A$-Modul derart, daß $M/\pi M$ ein $d$-dimensionaler ($d \in \mathbb{N}$) $k$-Vektorraum mit Basis $m_1 + \pi M, ..., m_d + \pi M$ ist. Fixiere die Repräsentanten $m_1, ..., m_d$.*

*i.* *Ist $M$ ein Torsionsmodul, der von $\pi^n$ ($n \in \mathbb{N}$) annulliert wird, so erzeugen $m_1, ..., m_d$ schon ganz $M$ als $A$-Modul.*

*– Sei nun $A$ zusätzlich vollständig. –*

*ii.* *Gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi^n M = \{0\}$, so erzeugen $m_1, ..., m_d$ den $A$-Modul $M$.*

*iii.* *Ist $M$ ein freier $A$-Modul, so bilden $m_1, ..., m_d$ sogar eine $A$-Basis von $M$, insbesondere gilt $\mathrm{rang}_A(M) = d = \dim_k(M/\pi M)$.*

*iv.* *Ist $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul, so ist in diesem Sinne jeder Lift einer jeden $k$-Basis von $M/\pi M$ ein Erzeugendensystem von $M$.*

*Beweis.*

i. Sei $m \in M$ beliebig. Dann gibt es nach Annahme $a_1^{(0)}, ..., a_d^{(0)}$ in $A$ mit

$$m \equiv \sum_{i=1}^{d} a_i^{(0)} m_i \bmod \pi M \Leftrightarrow m - \sum_{i=1}^{d} a_i^{(0)} m_i \in \pi M$$

Also existiert ein $m^{(1)} \in M$ mit $m - \sum_{i=1}^{d} a_i^{(0)} m_i = \pi\, m^{(1)}$.
Aber auch für $m^{(1)}$ gibt es nach Annahme $a_1^{(1)}, ..., a_d^{(1)}$ in $A$ mit

$$m^{(1)} \equiv \sum_{i=1}^{d} a_i^{(1)} m_i \bmod \pi M \Leftrightarrow m^{(1)} - \sum_{i=1}^{d} a_i^{(1)} m_i \in \pi M$$

und folglich

$$m - \sum_{i=1}^{d} (a_i^{(0)} + \pi a_i^{(1)}) m_i = \pi m^{(1)} - \sum_{i=1}^{d} \pi a_i^{(1)} m_i = \pi \cdot (m^{(1)} - \sum_{i=1}^{d} a_i^{(1)} m_i) \in \pi^2 M$$

Wir erhalten ein $m^{(2)} \in M$ mit

$$m - \sum_{i=1}^{d} (a_i^{(0)} + \pi a_i^{(1)}) m_i = \pi^2\, m^{(2)}$$

Iterativ so fortschreitend, haben wir schließlich Elemente $a_i^{(j)}$ $(1 \leqslant i \leqslant d, 0 \leqslant j \leqslant n-1)$ gefunden mit

$$m - \sum_{i=1}^{d} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \pi^j a_i^{(j)} \right) m_i \in \pi^n M = 0$$

also $m$ als Linearkombination der $m_i$ geschrieben.

ii. Genau wie im Beweis von i. konstruieren wir induktiv Elemente $a_i^{(j)} \in A$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$m - \sum_{i=1}^{d} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \pi^j a_i^{(j)} \right) m_i \in \pi^n M \tag{1.1}$$

Nun bilden für jedes $i \in \{1, ..., d\}$ die Partialsummen $\sum_{j=0}^{n-1} \pi^j a_i^{(j)}$ eine Cauchyfolge in $A$, so daß wir $a_i := \sum_{j=0}^{\infty} \pi^j a_i^{(j)} \in A$ definieren können. Damit gilt

$$\begin{aligned} a_i &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \pi^j a_i^{(j)} \bmod \pi^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \overset{(1.1)}{\Rightarrow} m &- \sum_{i=1}^{d} a_i m_i \in \pi^n M \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow m &- \sum_{i=1}^{d} a_i m_i \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi^n M = \{0\} \end{aligned}$$

also $m = \sum_{i=1}^{d} a_i m_i$.

iii. $A$ selbst erfüllt die Bedingung für ii. (jedes Element außer 0 hat eine endliche Bewertung), damit tun dies offenbar auch direkte Produkte $\prod_I A$ und direkte Summen $\bigoplus_I A$ für

beliebige Indexmengen $I$. Wir haben also mit ii. ein Erzeugendensystem $m_1,...,m_d$. Dieses System ist linear unabhängig: Sonst gälte $\sum_{i=1}^d b_i m_i = 0$ mit $b_1,...,b_d$ aus $A$, nicht alle $b_i = 0$. Nach Dividieren durch die größte gemeinsame $\pi$-Potenz könnten wir annehmen, daß mindestens ein $b_{i_0}$ in $A \setminus \pi A$ liegt. Dann wäre aber $\sum_{i=1}^d (b_i + \pi A)(m_i + \pi M) = 0$ in $M/\pi M$ mit $b_{i_0} + \pi A \in k^\times$, Widerspruch!
Also sind die $m_1,...,m_d$ eine Basis von $M$, und da der Rang wohldefiniert ist, folgt die zweite Aussage.

iv. Als DBR ist $A$ ein Hauptidealring, so daß die Aussage mit Satz 1.1.1 aus i. und iii. folgt.

□

Mit Hilfe von 1.1.1 können wir allerdings ein noch besseres Erzeugendensystem unseres endlich erzeugten Moduls wählen:

**Lemma 1.1.9.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul.*

*i. Gilt mit 1.1.1*
$M = A^s \oplus \bigoplus_{j=1,...,r} A/\pi^{n(j)}A$
*so sind die Elemente*
$m_1 := (1,0,...,0)$,
...
$m_s := (0,0,...,0,1,0,...,0)$ *(s-te Stelle)*
$m_{s+1} := (0,0,...,0,1+(\pi^{n_1}),0,...,0)$
...
$m_{s+r} := (0,0,...,0,1+(\pi^{n_r}))$
*ein Erzeugendensystem von $M$ mit der Eigenschaft:*

$$\sum_{i=1}^{s+r} a_i m_i = 0 \Leftrightarrow a_i \begin{cases} = 0 \text{ für } i \leqslant s \\ \in (\pi^{n_j}) \text{ für } i = s+j, 1 \leqslant j \leqslant r \end{cases}$$

*ii. Ist in der Situation von i. $\tau : A \to B$ eine Skalarerweiterung, so ist $\{1 \otimes m_i\}_{1 \leqslant i \leqslant s+r}$ ein Erzeugendensystem von $B_\tau \underset{A}{\otimes} M$, und es gilt*

$$0 = \sum_{i=1}^{s+r} b_i \otimes m_i \in B \underset{A}{\otimes} M \Leftrightarrow b_i \begin{cases} = 0 \text{ für } i \leqslant s \\ \in \tau(\pi)^{n_j} B \text{ für } i = s+j, 1 \leqslant j \leqslant r \end{cases}$$

*Beweis.* i. ist klar, und ii. folgt leicht nach Vertauschen des Tensorprodukts mit der direkten Summe und den Identifikationen in 1.1.2 und 1.1.3. □

Im Laufe der Arbeit werden oft *unverzweigte Erweiterungen* von DBR behandelt. Hierzu notieren wir folgende Tatsachen, die sich entweder leicht auf endliche Erweiterungen zurückführen lassen oder aus [Ser68, chap. III, §5, théorème 2, 3 und corollaire 1] ergeben.

**Definition und Bemerkung 1.1.10.** Sei $A$ ein vollständiger DBR mit Quotientenkörper $K$. Eine algebraische Erweiterung $L \mid K$ heißt unverzweigt, wenn alle ihre endlichen Teilerweiterungen unverzweigt sind. Es gibt dann genau eine Fortsetzung der Bewertung $v_K$ zu einer Bewertung $v_L$ mit $v_L\mid_K = v_K$. Insbesondere ist jedes Primelement $\pi \in A$ auch Primelement von $\mathcal{O}_L := \{x \in L : v_L(x) \geqslant 0\}$ (= ganzer Abschluß von $A$ in $L$). Der Restklassenkörper $l := \mathcal{O}_L/\pi\mathcal{O}_L$ ist eine separable Erweiterung von $k := A/\pi A$. Da $v_L \circ \tau = v_L$ für alle $\tau \in \mathrm{Aut}(L \mid K)$ gilt, hat man einen kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Aut}(L \mid K) \to \mathrm{Aut}(l \mid k)$$

$$\tau \mapsto \bar{\tau}$$

mit $\bar{\tau}(b + \pi\mathcal{O}_L) := \tau(b) + \pi\mathcal{O}_L$. $L \mid K$ ist normal genau dann, wenn $l \mid k$ normal ist. Ist $L \mid K$ galoissch, so ist obiger Homomorphismus ein Isomorphismus

$$\mathrm{Gal}(L \mid K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(l \mid k)$$

Ist $k^{sep}$ ein fixierter separabler Abschluß von $k$, so existiert bis auf Isomorphie genau eine unverzweigte Erweiterung $K^{nr} \mid K$, die $k^{sep}$ als Restklassenkörper hat; sie ist galoissch, und wie vorher identifiziert man $\mathrm{Gal}(K^{nr} \mid K) \cong \mathrm{Gal}(k^{sep} \mid k)$.

**Lemma 1.1.11.** *Mit Bezeichnungen wie oben (insbesondere sei $A$ weiterhin vollständig) gilt: Wird für eine endliche unverzweigte Erweiterung $L \mid K$ die (endlich separable) Restklassenkörpererweiterung $l \mid k$ vom primitiven Element $\bar{a}$ erzeugt, so ist $L = K(a)$ und $\mathcal{O}_L = A(a)$ für jeden Lift $a \in \mathcal{O}_L$ von $\bar{a}$, und die Reduktion modulo $\pi$ von*

$$f = \mathrm{Min}(a, K, X) \in A[X] \quad \text{([Schn07, Bemerkung 4.12])}$$

*ist das Minimalpolynom von $\bar{a}$ über $k$.*

*Beweis.* Sei $n = [L : K] = [l : k]$. $\bar{a}$ ist eine Nullstelle der Reduktion $\bar{f}$ von $f$ in $k[X]$, die also von $\mathrm{Min}(\bar{a}, k, X)$ geteilt wird. Daher ist

$$n \geqslant \deg(f) = \deg(\bar{f}) \geqslant \deg(\mathrm{Min}(\bar{a}, k, X)) = n$$

also überall Gleichheit und $[K(a) : K] = n \Rightarrow L = K(a)$. $A(a) \simeq A[X]/(f)$ ist nach [Ser68, chap. II, §6, prop. 15 und corollaire 1] der ganze Abschluß von $A$ in $L = K(a) \simeq K[X]/(f)$. □

Später wird folgende Situation auftreten: Gegeben ein vollständiger DBR $A$ mit Primelement $\pi$, Restklassenkörper $k$, $char(k) = p$, $K := \mathrm{Quot}(A)$, $char(K) = 0$. Gibt es einen Ringendomorphismus $\sigma : A \to A$ mit $\sigma(x) \equiv x^p \bmod \pi$, d. h. einen *Frobenius-Lift*? Im allgemeinen ist weder klar, ob ein solches $\sigma$ existiert, noch ist es im Falle der Existenz eindeutig.[1] Haben wir jedoch ein solches $\sigma$ bereits gegeben, dann können wir es auf *unverzweigte* Erweiterungen sogar eindeutig fortsetzen:

**Satz 1.1.12.** *Sei mit den obigen Bezeichnungen $M \mid K$ eine unverzweigte Erweiterung mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_M$. Dann existiert genau ein Ringendomorphismus $\tilde{\sigma} : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M$ mit $\tilde{\sigma}_{|A} = \sigma$ und $\tilde{\sigma}(x) \equiv x^p \bmod \pi$.*

*Beweis.* Sei zunächst $L \mid K$ eine *endliche* Teilerweiterung, $[L : K] = n$. Der Ganzheitsring $\mathcal{O}_L$ ist ein vollständiger DBR mit Restklassenkörper $l$, wobei nach Annahme $[l : k] = n$. Nach dem vorigen Lemma gibt es ein $\bar{x} \in l$ mit Lift $x \in B$ derart, daß $l = k(\bar{x})$, $L = K(x)$, $\mathcal{O}_L = A(x)$, und für $f := \mathrm{Min}(x, K, X) \in A[X]$ ist die Reduktion $\bar{f} = \mathrm{Min}(\bar{x}, k, X)$.

[1] Beispielsweise auf dem in [Schn07, Kapitel 10] betrachteten Ring $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{int}}$, der auch in dieser Arbeit eine Rolle spielen wird, definieren sowohl $T \mapsto T^p$ als auch $T \mapsto (1+T)^p - 1$ solche Abbildungen.

Wir wollen unsere Fortsetzung auf dem Element $x$ definieren. Da $l$ über $k$ separabel ist, ist in $l[X]$

$$\bar{f}(X) = (X - \bar{x}) \cdot g(X) \text{ mit } g(\bar{x}) \neq 0 \tag{1.2}$$

Sei etwa $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in A[X]$. $\tilde{\sigma}(x)$ muß, wenn unsere Fortsetzung ein Ringhomomorphismus sein soll, eine Nullstelle von

$$\sigma(f)(X) = X^n + \sigma(a_{n-1})X^{n-1} + ... + \sigma(a_1)X + \sigma(a_0) \in A[X]$$

sein. Das modulo $\pi$ reduzierte Polynom $\overline{\sigma(f)}$ hat die Gestalt

$$X^n + \overline{a_{n-1}}^p X^{n-1} + ... + \overline{a_1}^p X + \overline{a_0}^p \in k[X] \subseteq l[X]$$

Das legt folgendes Vorgehen nahe: Setzen wir auf $l[X]$ den absoluten Frobenius (auf $l$) per $X \mapsto X$ zu einem Ringendomorphismus $\bar{\sigma}$ fort, so gilt

$$\overline{\sigma(f)}(X) = \bar{\sigma}(\bar{f}(X)) \overset{(1.2)}{=} \bar{\sigma}(X - \bar{x}) \cdot \bar{\sigma}(g(X)) \in l[X]$$

Der erste Faktor ist $\bar{\sigma}(X - \bar{x}) = X - \bar{x}^p$. Da $\bar{\sigma}$ ein Endomorphismus des Hauptidealrings $l[X]$ ist, sind die beiden Faktoren teilerfremd[2], insbesondere ist $\bar{x}^p$ keine Nullstelle von $\bar{\sigma}(g(X))$. Das Henselsche Lemma liefert uns daher ein Element $\tilde{x} \in \mathcal{O}_L$ mit $\tilde{x} \equiv x^p \bmod \pi$ und eine Faktorisierung

$$\sigma(f)(X) = (X - \tilde{x}) \cdot h(X) \text{ in } \mathcal{O}_L[X]$$

wobei $h(X)$ ein Lift von $\bar{\sigma}(g(X))$ ist. Wir haben also eine Nullstelle $\tilde{x}$ von $\sigma(f)(X)$ in $\mathcal{O}_L$ mit $\tilde{x} \equiv x^p \bmod \pi$. Durch diese Bedingungen ist $\tilde{x}$ eindeutig bestimmt, denn jede weitere Nullstelle $y \in \mathcal{O}_L$ von $\sigma(f)(X)$ ist auch eine von $h$, ihre Reduktion also eine von $\bar{\sigma}(g(X))$, und diese sind nicht kongruent zu $x^p$ modulo $\pi$.
Die Bedingungen an $\tilde{\sigma}$ zwingen uns also, $\tilde{\sigma}(x) := \tilde{x}$ zu setzen. Dies definiert einen eindeutigen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}_L} : A(x) = \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_M$$

mit den gewünschten Eigenschaften, der wegen der Eindeutigkeit auch nicht von der Wahl von $x$ abhängt (und dessen Bild sogar in $\mathcal{O}_L$ liegt).
Nun ist $M \mid K$ das Kompositum seiner endlichen Teilerweiterungen, auf denen wir obige Fortsetzungen haben. Wegen der Eindeutigkeitsaussage sind sie alle miteinander verträglich (denn sind $L' \mid L \mid K$ endliche Erweiterungen, so erfüllt die Einschränkung von $\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}_{L'}}$ auf $\mathcal{O}_L$ die obigen Bedingung, ist also gleich $\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}_L}$). Das heißt, wir können alle diese Konstruktionen zu einem eindeutigen Endomorphismus

$$\tilde{\sigma} : \mathcal{O}_M = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_M} A(x) \to \mathcal{O}_M$$

mit den gewünschten Eigenschaften zusammensetzen. □

[2] Existieren zu Elementen eines Rings $a, b$ weitere Elemente $c, d$ mit $ac + bd = 1$, so ist für einen Ringendomorphismus $\tau$ auch $\tau(a)\tau(c) + \tau(b)\tau(d) = 1$.

**Bemerkung 1.1.13.** *Ist in der obigen Situation $k$ perfekt und $\mathfrak{m} = (p)$, so gibt es genau einen Frobenius-Lift auf $A$.*

*Beweis.* Gemäß [Schn07, Corollar 6.4.] identifizieren wir $A$ mit $W(k)$. Da $k$ perfekt ist, ist das Ziehen der $p$-ten Wurzel auf $k$ ein Isomorphismus, und wir können

$$\begin{aligned} \alpha : W(k) &\twoheadrightarrow k \xrightarrow{\sim} k \\ x &\mapsto \Phi_0(x) \mapsto (\Phi_0(x))^{p^{-1}} \end{aligned}$$

bilden. Ist nun $\sigma$ ein Frobenius-Lift, so gilt offenbar $\alpha \circ \sigma = \Phi_0$, und umgekehrt ist jeder Ringhomomorphismus, der dies erfüllt, ein Frobenius-Lift. Wir wenden [Schn07, Satz 6.3] an und erhalten Existenz und Eindeutigkeit von $\sigma$. Dies ist auf $W(k)$ gerade der Witt-Frobenius $F$, welcher nach [Schn07, Satz 5.11.i. und Satz 5.19.i.] die geforderten Eigenschaften erfüllt. □

Es folgt noch ein Lemma zu DBR, das später nützlich sein wird.

**Lemma 1.1.14.** *Sei $B$ ein DBR mit Bewertung $v$, maximalem Ideal $\mathfrak{m}_B$, Restklassenkörper $l$ und Quotientenkörper $L$. Sei $G = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ eine endliche Gruppe von isometrischen[3] Körperautomorphismen auf $L$. Offenbar ist die Fixpunktmenge $A := B^G$ ein Ring und $K := L^G$ ein Körper. In der Galoistheorie zeigt man: $L|K$ ist eine galoissche Erweiterung vom Grad $n$ und mit Galoisgruppe $G$. Zusätzlich gilt:*

*i. Mit der auf $A$ eingeschränkten (ggf. noch zu normierenden) Bewertung ist $A$ ein DBR mit Quotientenkörper $K$.*

*ii. Ist $B$ vollständig, so auch $A$.*

*iii. Sei $B$ vollständig und $S \subset B$ ein Repräsentantensystem von $l$ in $B$, auf dem $G$ trivial operiert. Dann ist die Erweiterung $L|K$ rein verzweigt.*

*Beweis.*

i. Die Einschränkung von $v$ auf $K$ hat die Eigenschaften einer (nicht unbedingt normierten) Bewertungsfunktion; man sieht leicht, daß $v(K^\times)$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist. Ist $\pi_B$ ein Erzeuger von $\mathfrak{m}_B$, so ist etwa $N_{L|K}(\pi_B) \in A$ und hat positive, endliche Bewertung. Daher ist die Bewertung nicht trivial und hat als Bild $d\mathbb{Z}$ für ein $d \in \mathbb{N}$. $K$ ist also ein diskret bewerteter Körper. Da für $x \in L$ gilt $x \in B \Leftrightarrow v(x) \geqslant 0$, ist $A = \{x \in K : v(x) \geqslant 0\}$ und dieser ist bekanntlich ein DBR.

ii. $A = \bigcap_{i=1}^n \ker(\sigma_i |_B - id_B)$ ist abgeschlossen in $B$.

iii. Sei $k$ der Restklassenkörper von $A$, den wir uns als Teilkörper von $l$ vorstellen. Nach Voraussetzung ist aber $S \subset A$, woraus $k = \{s + \mathfrak{m}_B \mid s \in S\} = l$ folgt.

□

[3] Diese Bedingung ließe sich a priori ein wenig abschwächen; dann würde sich aber a posteriori herausstellen, daß die Automorphismen schon isometrisch waren.

Im Laufe der Arbeit werden wir in gewisser Hinsicht klassische Aussagen über $k$-Vektorräume auf $A$-Moduln und schließlich sogar $K$-Vektorräume „hochziehen". Technisches Hilfsmittel dafür ist das folgende Lemma:

**Lemma 1.1.15.** *Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung diskreter Bewertungsringe derart, daß ein (und damit jedes) Primelement $\pi \in A$ auch Primelement von $B$ ist. Sei zudem $B$ vollständig und $V$ ein endlich erzeugter $A$-Modul. Dann definiert*

$$\alpha : B \underset{A}{\otimes} V \to \varprojlim (B \underset{A}{\otimes} (V/\pi^n V))$$

$$b \otimes v \mapsto (b \otimes (v + \pi^n V))_{n \in \mathbb{N}}$$

*einen Isomorphismus von $B$-Moduln. Die rechte Seite wird dabei bezüglich der (offenbar surjektiven) Übergangsabbildungen*

$$id \otimes pr^n_m : B \underset{A}{\otimes} (V/\pi^n V) \to B \underset{A}{\otimes} (V/\pi^m V)$$

*definiert, wobei für $n \geqslant m$*

$$pr^n_m : V/\pi^n V \to V/\pi^m V$$

*die kanonische Projektion bezeichnet.*

Wir werden sofort die folgende, ebenfalls nützliche Verallgemeinerung beweisen:

**Lemma 1.1.16.** *Sei $\sigma : A \to B$ eine Skalarerweiterung von DBR, $B$ vollständig und $V$ ein endlich erzeugter $A$-Modul. Sei außerdem für ein und damit jedes Primelement $\pi \in A$ das Bild $\sigma(\pi)$ im maximalen Ideal von $B$ enthalten (d. h. $\sigma$ ist ein „lokaler Homomorphismus"). Dann definiert*

$$\alpha : B_\sigma \underset{A}{\otimes} V \to \varprojlim (B_\sigma \underset{A}{\otimes} (V/\pi^n V))$$

$$b \otimes v \mapsto (b \otimes (v + \pi^n V))_{n \in \mathbb{N}}$$

*einen Isomorphismus von $B$-(Links-)Moduln. Die rechte Seite wird dabei bezüglich der (offenbar surjektiven) Übergangsabbildungen*

$$id \otimes pr^n_m : B_\sigma \underset{A}{\otimes} (V/\pi^n V) \to B_\sigma \underset{A}{\otimes} (V/\pi^m V)$$

*definiert, wobei für $n \geqslant m$*

$$pr^n_m : V/\pi^n V \to V/\pi^m V$$

*wiederum die kanonische Projektion bezeichnet.*

*Beweis.* Existenz und ($A$-)Linearität der Abbildung folgen mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts daraus, daß die Abbildung

$$B_\sigma \times V \to \varprojlim (B_\sigma \underset{A}{\otimes} (V/\pi^n V))$$

$$(b, v) \mapsto (b \otimes (v + \pi^n V))_{n \in \mathbb{N}}$$

$A$-bilinear ist. Nach Konstruktion ist $\alpha$ dann auch $B$-linear („von links").
Da Tensorprodukt und projektiver Limes mit endlichen direkten Summen vertauschen, reicht

es nach 1.1.1, die Behauptung für die Fälle $V = A$ und $V = A/(\pi^n)$ zu zeigen.
Im ersten Fall reduziert sie sich auf die Aussage

$$B \simeq \varprojlim B/\sigma(\pi)^n B$$

welche nicht viel mehr als eine Umformulierung der Tatsache ist, daß $B$ vollständig ist. Genauer gesagt ist die Injektivität klar ($x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\pi)^n B \Leftrightarrow v_B(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$), und zur Surjektivität ist zu beachten, daß für ein Element des projektiven Limes

$$(b_n + \sigma(\pi)^n B)_{n\in\mathbb{N}}$$

und beliebige $m \leqslant n \in \mathbb{N}$ die Repräsentanten die Eigenschaft $b_n \equiv b_m \bmod \sigma(\pi)^m$ erfüllen. Dabei gilt für eine andere Wahl der Repräsentanten $b_n \equiv \tilde{b}_n \bmod \sigma(\pi)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\sigma$ als lokaler Homomorphismus vorausgesetzt wurde, erhalten wir also bei Fixierung von Repräsentanten $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, deren Limes $b \in B$ nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt. Da für diesen Limes wegen der strengen Dreiecksungleichung wiederum für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b \equiv b_n \bmod \sigma(\pi)^n$$

ist $b$ ein Urbild des obigen Elements.
Im Fall $V = A/(\pi^n)$ ist $V = V/\pi^i V$ für alle $i \geqslant n$, der projektive Limes also ab $n$ „konstant" gleich $B_\sigma \underset{A}{\otimes} V$ und damit die angegebene Abbildung offenbar bijektiv. □

Schließlich setzen wir Definitionen und elementare Eigenschaften von *(abelschen) Kategorien* und *Funktoren* als bekannt voraus und notieren folgende Definition zur Äquivalenz von Kategorien:

**Definition 1.1.17.** Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann heißen $F$ und $G$ quasi-invers zueinander und definieren eine Kategorienäquivalenz $\mathcal{C} \sim \mathcal{D}$, falls es natürliche Isomorphismen $t_*$ (und $u_*$) der Hintereinanderschaltung $G \circ F$ zu $id_\mathcal{C}$ (und $F \circ G$ zu $id_\mathcal{D}$) gibt. Das bedeutet: Zu jedem Objekt $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ haben wir einen Isomorphismus $t_X : G(F(X)) \to X$, so daß für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \arrow[r, "t_X", "\cong"'] \arrow[d, "G(F(f))"'] & X \arrow[d, "f"] \\
G(F(Y)) \arrow[r, "\cong", "t_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist (und analog für $u_*$).

## 1.2 Die abelsche Kategorie $Rep_A(G)$

Die erste betrachtete Kategorie ist die der $\mathbb{Z}_p$-Darstellungen einer absoluten Galoisgruppe $G_E$. Tatsächlich kann aber $\mathbb{Z}_p$ zunächst durch einen beliebigen (später zumindest durch einen *vollständigen*) DBR und $G_E$ durch irgendeine (später zumindest *kompakte*) topologische Gruppe ersetzt werden. Sei daher im folgenden $A$ stets ein DBR und $\pi \in A$ ein fixiertes Primelement, $v$ die Bewertung, $|x| := e^{-v(x)}$ der $\pi$-adische Betrag (der z. B. für endliche Erweiterungen von $\mathbb{Z}_p$ bekanntlich zum üblichen Betrag $p^{-v(x)}$ äquivalent ist).

Unser erstes Ziel ist, eine vernünftige Topologie auf $\mathrm{Aut}_A(V) \subseteq \mathrm{End}_A(V)$ für einen geeigneten $A$-Modul $V$ zu definieren. Die vom $\pi$-adischen Betrag induzierte Topologie macht den Ring $A$ zu einem topologischen Ring. Wir können sie auch dadurch beschreiben, daß wir die Menge der Ideale $\{(\pi^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ als Umgebungsbasis der 0 setzen (vgl. [TG, chap. III, §6, no. 3, exemple 3]. Diese Menge ist auch eine Filterbasis im Sinne von [TG, chap. I, §6, no. 3] (man beachte $(\pi^m) \cap (\pi^n) = (\pi^{\max\{m,n\}})$).

Wir versehen einen $A$-Modul $M$ mit der entsprechenden Struktur als topologischer Modul, d. h. $\{\pi^n M \mid n \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Umgebungsbasis der $0 \in M$ (vgl. [TG, chap. III, §6, no. 6, exemple 2]). Wegen $\pi^m M \cap \pi^n M = \pi^{\max\{m,n\}} M$ ist auch dies eine Filterbasis. Wir stellen uns $M$ stets mit der so definierten Topologie vor, die wir die *$\pi$-adische* nennen.

**Lemma 1.2.1.**

i. *Für endlich viele $A$-Moduln $M_1, ..., M_n$ stimmt die $\pi$-adische Topologie auf $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ mit der Produkttopologie der $\pi$-adischen auf allen $M_i$ überein.*

ii. *Die $\pi$-adische Topologie auf einem Faktormodul $M/M'$ stimmt mit der Quotiententopologie der $\pi$-adischen von $M$ überein.*

iii. *Ist $N$ ein weiterer $A$-Modul, so ist jede lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ stetig. Ist $f$ surjektiv, so ist sie auch offen.*

iv. *Wird $M$ von einer geeigneten $\pi$-Potenz annulliert – wie etwa ein endlich erzeugter Torsionsmodul – so ist die $\pi$-adische die diskrete Topologie.*

*Beweis.* Da auch die Produkt- und Quotiententopologie verträglich mit der Modulstruktur sind (vgl. [TG, chap. III, §6, no. 6]), genügt es zu zeigen, daß jeweils ein Element einer Nullumgebungsbasis in der einen Topologie in einem aus derjenigen der anderen enthalten ist.

i. Eine Umgebungsbasis der 0 in der Produkttopologie ist in diesem Fall durch die Mengen der Form
$$\pi^{i_1} M_1 \oplus ... \oplus \pi^{i_n} M_n$$
mit $\{i_1, ... i_n\} \subset \mathbb{N}$ gegeben. Offensichtlich ist darin $\pi^{max\{i_1,...i_n\}} \cdot (\bigoplus_{i=1}^n M_i)$ enthalten. Umgekehrt ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ $\pi^m \cdot (\bigoplus_{i=1}^n M_i)$ von der obigen Form mit $i_1 = ... = i_n = m$.

ii. Sei $\overline{U} = \{u + M' \mid u \in U\}$ eine beliebige Umgebung von $\bar{0} \in M/M'$ bezüglich der Quotiententopologie, wobei $U$ eine geeignete Teilmenge von $M$ ist. Dann folgt aus den Definitionen, daß $U + M' \subseteq M$ eine Menge der Form $\pi^n M$ enthält, a fortiori enthält $\overline{U}$ also $\pi^n(M/M')$. Umgekehrt ist jede Menge der Form $\pi^n(M/M')$ offene Umgebung von $\bar{0}$ in der Quotiententopologie, denn ihr Urbild unter der kanonischen Projektion $\pi^n M + M'$ enthält mit einem Punkt $x$ stets auch $x + \pi^n M$, ist also offen.

iii. Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen (und hätte auch bei i. und ii. benutzt werden können).

iv. Klar.

□

Für $A$ als Modul über sich selbst ist die Topologie die vom $\pi$-adischen Betrag induzierte. Die ersten beiden Aussagen des Lemmas zeigen, daß sie gewissermaßen natürlich für *endlich erzeugte* $M$ ist: Denn für einen endlich freien Modul ist sie gleich der Produkttopologie, und ist eine Surjektion $f : A^r \twoheadrightarrow M$ mit $r \in \mathbb{N}$ gegeben, so entspricht sie der Quotiententopologie auf $M \simeq A^r/\ker(f)$ – die, wie hieraus folgt, unabhängig von der Wahl von $f$ und $r$ ist.
Für nicht endlich erzeugte Moduln ist diese Topologie dagegen nicht immer sinnvoll: etwa auf $\mathbb{Q}_p$ als $\mathbb{Z}_p$-Modul würde sich mit der obigen Definition wegen $p^n\mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p$ für alle $n$ die triviale Topologie ergeben.

Sei also $M$ von nun an endlich erzeugt. Es ergeben sich weitere gute Eigenschaften:

**Lemma 1.2.2.**

*i. $M$ ist hausdorffsch.*

*ii. Jeder Untermodul $N \subseteq M$ ist abgeschlossen.*

*iii. Für jeden Untermodul $N \subseteq M$ stimmen die $\pi$-adische Topologie und die Teilraumtopologie auf $N$ als Teilmenge von $M$ überein.*

*Beweis.*

i. ist nach [TG, chap. III, §1, no. 3, corollaire und exemple] äquivalent zu

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi^n M = \{0\}$$

Dies ist für freie $A$-Moduln (nicht nur, aber insbesondere endlichen Rangs) erfüllt und ebenso für endlich erzeugte Torsionsmoduln, denn diese werden von einer geeigneten $\pi$-Potenz annulliert. Die Behauptung folgt mit Satz 1.1.1.

ii. $N = \ker(pr) = pr^{-1}\{\bar{0}\}$, wobei die Einpunktmenge $\{\bar{0}\} \subseteq M/M'$ nach i. abgeschlossen und die kanonische Projektion $pr : M \to M/N$ nach Lemma 1.2.1.iii stetig ist.

iii. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\pi^n N \subseteq \pi^n M \cap N$, also ist die Teilraumtopologie gröber als die $\pi$-adische (dies gilt allgemein und kann auch aus Lemma 1.2.1.iii gefolgert werden). Umgekehrt ist zu zeigen, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\pi^n N \supseteq \pi^m M \cap N$. Schreibe dazu mit Satz 1.1.1 und dem Elementarteilersatz

$$N \simeq \bigoplus_{i=1,\ldots,k} \pi^{s_i} A \oplus \mathrm{Tor}(N) \subseteq A^d \oplus \mathrm{Tor}(M) \simeq M$$

mit $k \leqslant d$ und $0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_d$. Werde $\mathrm{Tor}(M)$ und damit auch $\mathrm{Tor}(N)$ von $\pi^r$ annulliert, dann erfüllt $m := n + \max\{r, s_d\}$ die geforderte Bedingung.

□

**Satz 1.2.3.** *Sei $V$ ein endlich erzeugter $A$-Modul.*

*i. Die Menge der $A$-linearen Endomorphismen $\mathrm{End}_A(V)$ ist selbst ein endlich erzeugter $A$-Modul.*

*ii. Die Menge $\mathrm{Aut}_A(V) \subseteq \mathrm{End}_A(V)$ der bijektiven $A$-linearen Abbildungen von $V$ in sich selbst ist bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe mit der Identität $id_V$ als Einselement. Versehen mit der Teilraumtopologie der $\pi$-adischen auf $\mathrm{End}_A(V)$ ist sie eine topologische Gruppe.*

*Beweis.*

i. Allgemeiner gilt für einen noetherschen Ring $R$ und endlich erzeugte $R$-Moduln $M, N$, daß $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ endlich erzeugt ist. Sei nämlich $p : R^r \twoheadrightarrow M$ eine Surjektion, so ist

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(R^r,N)$$

$$f \mapsto f \circ p$$

injektiv, also $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ isomorph zu einem Untermodul der rechten Seite. Diese ist endlich erzeugt, denn (vgl. [A, chap. II, §1, no. 6, cor 1])

$$\mathrm{Hom}_R(R^r,N) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Hom}_R(R,N))^r$$

und bekanntlich gilt $\mathrm{Hom}_R(R,N) \simeq N$ ($f \mapsto f(1)$). Da $R$ noethersch ist, ist auch $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ endlich erzeugt.

ii. Nur die letzte Aussage ist nicht trivial. Bekanntlich ist $\mathrm{End}_A(V)$ mit der Verknüpfung von Abbildungen als Multiplikation und der punktweise definierten Addition ein Ring. Bezüglich dieser Ringstruktur besteht aber unsere als Umgebungsbasis der 0 gewählte Filterbasis $\{\pi^n \mathrm{End}_A(V)\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus beidseitigen Idealen, denn:
– Abgeschlossenheit unter Addition ist klar;
– sei $f \in \mathrm{End}_A(V)$ und $g \in \pi^n \mathrm{End}_A(V)$, etwa $g = \pi^n h$ mit $h \in \mathrm{End}_A(V)$, dann ist

$$f \circ g = f \circ \pi^n h = \pi^n (f \circ g) \in \pi^n \mathrm{End}_A(V)$$

und analog $g \circ f = \pi^n (h \circ f) \in \pi^n \mathrm{End}_A(V)$.
Nach [TG, chap. III, §6, no. 3, exemple 3] ist damit $\mathrm{End}_A(V)$ ein topologischer Ring, insbesondere ist die Multiplikation

$$\mathrm{End}_A(V) \times \mathrm{End}_A(V) \to \mathrm{End}_A(V)$$

$$(x,y) \mapsto xy$$

stetig, also nach Einschränkung auf die jeweiligen Teilraumtopologien auch

$$\mathrm{Aut}_A(V) \times \mathrm{Aut}_A(V) \to \mathrm{Aut}_A(V)$$

$$(x,y) \mapsto xy$$

Es bleibt zu zeigen, daß auch die Inversenbildung

$$\iota : \mathrm{Aut}_A(V) \to \mathrm{Aut}_A(V)$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

stetig ist. Nun gilt aber wegen der genannten Idealeigenschaft für $x, y \in \mathrm{Aut}_A(V)$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$x - y \in \pi^n \operatorname{End}_A(V) \Rightarrow y^{-1} - x^{-1} = x^{-1}(x-y)y^{-1} \in \pi^n \operatorname{End}_A(V)$$

also

$$x \in (x + \pi^n \operatorname{End}_A(V)) \cap \mathrm{Aut}_A(V) \subseteq \iota^{-1}[(x^{-1} + \pi^n \operatorname{End}_A(V)) \cap \mathrm{Aut}_A(V)]$$

(Analog gilt für jeden topologischen Ring $R$ in der Situation von [TG, chap. III, §6, no. 3, exemple 3], daß $R^\times$ eine topologische Gruppe bezüglich der Teilraumtopologie ist.)

□

Nachdem wir nun $\mathrm{Aut}_A(V)$ mit einer Topologie versehen haben, können wir „stetige“ Darstellungen topologischer Gruppen betrachten. Sei $G$ eine beliebige topologische Gruppe.

**Definition 1.2.4.** Eine $A$-Darstellung von $G$ (oder kurz $G$-Darstellung) ist ein Paar $(V, \rho)$ bestehend aus einem endlich erzeugten $A$-Modul $V$ und einem stetigen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_A(V)$$

Wenn im folgenden eine feste $G$-Darstellung betrachtet wird, lassen wir $\rho$ meist weg und schreiben $gv := \rho(g)(v)$ für $g \in G, v \in V$.
Ein Morphismus von zwei $G$-Darstellungen $(V, \rho)$, $(W, \sigma)$ ist eine $A$-lineare Abbildung

$$f : V \to W$$

die $G$-äquivariant ist, das heißt

$$f \circ \rho(g) = \sigma(g) \circ f \text{ für alle } g \in G$$

oder, formal unsauber aber anschaulich,

$$f(gv) = gf(v) \text{ für alle } g \in G, v \in V$$

Die Morphismen zwischen zwei $G$-Darstellungen $V$ und $W$ bilden bezüglich der punktweise definierten Addition eine abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_G(V, W)$, welche wir uns als Untergruppe der $A$-linearen Abbildungen $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ vorstellen können. Mit diesen Objekten und Morphismen erhalten wir die Kategorie $\mathit{Rep}_A(G)$. (Dabei wird „der“ Nullmodul mit der einzig möglichen, automatisch stetigen $G$-Wirkung versehen.)

Ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_A(V)$ definiert per

$$G \times V \to V$$

$$(g, v) \mapsto gv := \rho(g)(v)$$

offenbar eine $G$-Wirkung auf $V$, die außerdem $A$-linear ist, d.h. $g(av + w) = agv + gw$. $V$ wird so zu einem $G$-Modul im Sinne der Gruppenkohomologie. Umgekehrt definiert, wie man leicht nachrechnet, jede $A$-lineare $G$-Wirkung auf $V$ einen Gruppenhomomorphismus

$$G \to \mathrm{Aut}_A(V)$$

$$g \mapsto [v \mapsto gv]$$

Da wir auf $G$ und $V$ Topologien haben, kann man auch für eine $G$-Wirkung Stetigkeit definieren.

**Satz 1.2.5.** *Sei $V$ ein endlich erzeugter $A$-Modul.*

*i. Ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_A(V)$ ist genau dann stetig, wenn es für alle $g \in G, n \in \mathbb{N}$ eine offene Umgebung $g \in H_{g,n} \subseteq G$ gibt, so daß*

$$\rho(h)(v) \in \rho(g)(v) + \pi^n V \text{ für alle } v \in V, h \in H_{g,n}$$

*Ist $V$ ein Torsionsmodul, so ist dies äquivalent zu der (sonst stärkeren) Bedingung, daß $\ker(\rho) = \{g \in G : gv = v \text{ für alle } v \in V\}$ offen ist.*

*ii. Eine $A$-lineare $G$-Wirkung $G \times V \to V$ ist genau dann stetig, wenn es für alle $v \in V, g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $g \in H_{v,g,n} \subseteq G$ gibt, so daß*

$$hv \in gv + \pi^n V \text{ für alle } h \in H_{v,g,n}$$

*Ist $V$ ein Torsionsmodul, so ist dies äquivalent zu der (sonst stärkeren) Bedingung, daß für alle $v \in V$ die Fixgruppe $G_v := \{g \in G : gv = v\}$ offen ist.*

*iii. Ein Homomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_A(V)$ ist genau dann stetig, wenn die dadurch definierte $G$-Wirkung stetig ist.*

*iv. Ist $G$ proendlich, so wird ein Torsionsmodul $V$ durch die über eine Darstellung definierte $G$-Wirkung zu einem $G$-Modul im Sinne der Kohomologie proendlicher Gruppen (etwa nach [NSW00, chap. I, §2]).*

*Beweis.*

i. Ist $\rho$ stetig in $g$, so enthält das Urbild von

$$(\rho(g) + \pi^n \mathrm{End}_A(V)) \cap \mathrm{Aut}_A(V)$$

eine offene Umgebung $H$ von $g$. Diese erfüllt die genannte Bedingung, denn für $h \in H$ ist $\rho(h) = \rho(g) + \pi^n f$ mit geeignetem $f \in \mathrm{End}_A(V)$ und damit für alle $v \in V$

$$\rho(h)(v) - \rho(g)(v) = \pi^n f(v) \in \pi^n V$$

Seien nun $g \in G, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Schreibe $V = F \oplus Tor(V)$ gemäß Satz 1.1.1. Um zu zeigen, daß $\rho$ in $g$ stetig ist, reicht es, eine Umgebung von $g$ zu finden, deren Bild in $(\rho(g) + \pi^n \mathrm{End}_A(V))$ liegt; dabei sei oBdA $n$ so groß, daß $\pi^n \mathrm{Tor}(V)$ annulliert. Nun gilt für $h \in H_{g,n}$:

$$(\rho(g) - \rho(h))(v) \in \pi^n V \text{ für alle } v \in V$$

Nach Wahl von $n$ ist $\pi^n V = \pi^n F$. Setze

$$f := \pi^{-n}(\rho(g) - \rho(h)) \in \mathrm{Hom}_A(V, F) \subseteq \mathrm{End}_A(V)$$

Dann ist $\rho(h) = \rho(g) + \pi^n f$, d. h. $H_{g,n}$ ist eine Umgebung von $g$ wie gesucht.
Ist der Kern von $\rho$ offen, so erfüllt $g \cdot \ker(\rho)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung an $H_{g,n}$, auch wenn $V$ kein Torsionsmodul ist. Werde nun $V$ etwa von $\pi^m$ annulliert, dann ist für alle $n \geqslant m$ und $g' \in \ker(\rho)$ $g' \in g'g^{-1} \cdot H_{g,n} \subseteq \ker(\rho)$, also $\ker(\rho)$ offen.

ii. Sei die genannte Bedingung erfüllt, dann gilt

$$h(v + \pi^n V) = hv + \pi^n h(V) \subseteq gv + \pi^n V$$

für alle $h \in H_{v,g,n}$, d. h. das Urbild von $gv + \pi^n V$ enthält die offene Umgebung $H_{v,g,n} \times (v + \pi^n V)$ von $(g, v)$. Dies zeigt die Stetigkeit im beliebig vorgegebenen Punkt $(g, v)$.
Seien umgekehrt $g, v, n$ vorgegeben und die Wirkung stetig, insbesondere im Punkt $(g, v)$. Dann existiert jedenfalls eine Umgebung $(g, v) \in O \subseteq G \times V$, so daß $hw \in gv + \pi^n V$ für alle $(h, w) \in O$; nach Definition der Produkttopologie existiert dann eine offene Menge $g \in H_{v,g,n} \subseteq G$ und $m \in \mathbb{N}$ mit

$$H_{v,g,n} \times (v + \pi^m V) \subseteq O$$

d. h. insbesondere $(h, v) \in O$ und damit $hv - gv \in \pi^n V$ für alle $h \in H_{v,g,n}$.
Sind alle Fixgruppen offen, so erfüllt $g \cdot G_v$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung an $H_{v,g,n}$, auch wenn $V$ kein Torsionsmodul ist. Werde nun $V$ etwa von $\pi^m$ annulliert und sei $v \in V$, so ist für alle $n \geqslant m$ und $g' \in G_v$ $g' \in g' g^{-1} \cdot H_{v,g,n} \subseteq G_v$, also $G_v$ offen.

iii. Ein Vergleich von i. und ii. zeigt sofort die Implikation „$\rho$ stetig $\Rightarrow$ $G$-Wirkung stetig“. Zur Umkehrung: Werde $V$ von $v_1, ..., v_r$ erzeugt, so setze für $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$

$$H_{g,n} := \bigcap_{i=1}^{r} H_{v_i,g,n}$$

Diese Menge ist als endlicher Schnitt offener Mengen wieder offen und erfüllt, wie man leicht sieht, auch die übrigen Anforderungen aus i.

iv. Nach iii. ist die $G$-Wirkung stetig, und nach Lemma 1.2.1.iv trägt $V$ dabei die diskrete Topologie.

□

**Definition und Bemerkung 1.2.6.** Sind $V$ und $W$ zwei $G$-Darstellungen und ist $f : V \to W$ ein $G$-äquivarianter Isomorphismus der unterliegenden Moduln, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ $G$-äquivariant. Wir nennen $f$ dann einen Isomorphismus von $G$-Darstellungen und sagen, $V$ und $W$ seien isomorph als $G$-Darstellung.

*Beweis.* Seien $w \in W$ und $g \in G$ beliebig. Dann ist

$$f^{-1}(gw) = f^{-1}(g(f(f^{-1}(w)))) \overset{f\, G-\text{äqu.}}{=} f^{-1}(f(g(f^{-1}(w)))) = g(f^{-1}(w))$$

□

Ist $(V, \rho)$ eine $G$-Darstellung, so heißt ein Untermodul $U \subseteq V$ $G$-invariant, wenn für alle $g \in G$ gilt: $gU \subseteq U$. Mit mehr oder weniger Mühe läßt sich etwa unter Benutzung von 1.2.5 zeigen, daß in diesem Fall $U$ mit der eingeschränkten und $V/U$ mit der induzierten $G$-Wirkung ebenfalls Darstellungen sind. Für zwei Darstellungen $(V_1, \rho_1)$, $(V_2, \rho_2)$ ist mit

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(V_1 \oplus V_2)$$

$$g \mapsto [(v_1, v_2) \mapsto (\rho_1(g)(v_1), \rho_2(g)(v_2))]$$

auch die direkte Summe eine Darstellung. Da schließlich für einen Morphismus von Darstellungen $f : V \to W$ der Kern $U := \ker(f)$ wegen

$$u \in U \Rightarrow f(gu) = gf(u) = g(0) = 0 \Rightarrow gu \in U$$

$G$-invariant ist, haben wir:

**Satz 1.2.7.** *Die Kategorie $Rep_A(G)$ ist abelsch.*

Darüber hinaus gilt:

**Satz 1.2.8.** *Sind $V$ und $W$ zwei $G$-Darstellungen, so ist auch das Tensorprodukt $V \underset{A}{\otimes} W$ versehen mit der durch $g(\sum_i v_i \otimes w_i) := \sum_i gv_i \otimes gw_i$ definierten $G$-Wirkung eine $G$-Darstellung.*

*Beweis.* Bekanntlich ist mit $V$ und $W$ auch $V \underset{A}{\otimes} W$ endlich erzeugt. Die angegebene Abbildung ist wohldefiniert (sie wird von der $A$-bilinearen Abbildung $V \times W \to V \underset{A}{\otimes} W$, $(v,w) \mapsto gv \otimes gw$ induziert) und, wie man leicht nachrechnet, eine $A$-lineare $G$-Wirkung. Um die Stetigkeit zu zeigen, nutzen wir Satz 1.2.5.i. Seien dazu $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben; es existieren $g$ enthaltende offene Mengen $H^V_{g,n}$ und $H^W_{g,n}$ in $G$ mit $H^V_{g,n}(v) \subseteq gv + \pi^n V$ für alle $v \in V$ bzw. analog für $W$. Sei $H$ der Schnitt dieser Mengen: er enthält $g$ und ist offen. Ist nun $\sum_{i=1}^r v_i \otimes w_i \in V \underset{A}{\otimes} W$ ein beliebiges Element, so gilt für jedes $h \in H$ und alle $i$:

$$hv_i \otimes hw_i = (gv_i + \pi^n v_i') \otimes (gw_i + \pi^n w_i') \in gv_i \otimes gw_i + \pi^n (V \underset{A}{\otimes} W)$$

mit geeigneten $v_i' \in V, w_i' \in W$ und damit auch

$$\begin{aligned} & h\left(\sum_{i=1}^r v_i \otimes w_i\right) - g\left(\sum_{i=1}^r v_i \otimes w_i\right) \\ & \quad = \sum_{i=1}^r (hv_i \otimes hw_i - gv_i \otimes gw_i) \quad \in \quad \pi^n (V \underset{A}{\otimes} W) \end{aligned}$$

Mit $H =: H_{g,n}$ folgt also die Behauptung. □

Glücklicherweise lassen sich die meistgenutzten exakten Sequenzen innerhalb der Kategorie bilden:

**Satz 1.2.9.** *Sei $V$ eine $G$-Darstellung. Dann sind*

$$0 \to \pi V \to V \to V/\pi V \to 0$$

*und mit $V_\pi := \{v \in V : \pi v = 0\}$*

$$0 \to V_\pi \to V \to V/V_\pi \to 0$$

*exakte Sequenzen in $Rep_A(G)$, wobei die Pfeile links die Inklusion und rechts die kanonische Projektion bezeichnen.*

*Beweis.* Einzig zu zeigen ist, daß $\pi V$ und $V_\pi$ überhaupt Unterdarstellungen von $V$ sind. Aber auch dies ist klar, denn für alle $g \in G$ ist $g(\pi \cdot v) = \pi \cdot gv$, woraus schon die Invarianz beider Untermoduln folgt. □

### 1.2.1 Vergleich mit $Rep_K(G)$

In der klassischen Darstellungstheorie hat man einen Körper $K$ gegeben und betrachtet (stetige) Darstellungen einer (topologischen) Gruppe $G$ auf einem $K$-Vektorraum $V$, der selbst bzw. dessen Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_K(V)$ (im endlichdimensionalen Fall nach Basiswahl $\mathrm{GL}_n(K)$) gegebenenfalls mit einer Topologie versehen ist. Hier bieten sich endlichdimensionale Vektorräume über dem bewerteten Körper $K := \mathrm{Quot}(A)$ an. Diese tragen bekanntlich auch eine recht kanonische Topologie, *falls $A$ und damit $K$ vollständig sind*, nämlich die von einer beliebigen Norm induzierte. Das typische Beispiel ist $A = \mathbb{Z}_p$, $K = \mathbb{Q}_p$.
Analog zu 1.2.4 können wir für eine topologische Gruppe $G$ die Kategorie der $K$-Darstellungen

$$Rep_K(G)$$

definieren. Unterdarstellungen sind dann $G$-invariante Untervektorräume etc. Wir halten nur fest:

**Satz 1.2.10.** *Die Kategorie $Rep_K(G)$ ist abelsch und abgeschlossen unter Tensorprodukten.*

Ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum mag auf den ersten Blick als ein „schöneres“ Objekt als die zuvor betrachteten endlich erzeugten $A$-Moduln erscheinen. Das Studium der $A$-Darstellungen wird sich aber bezahlt machen: Denn einerseits erhalten wir damit, wie der folgende Satz zeigt, im uns interessierenden Fall bereits alle Information über $K$-Darstellungen; andererseits wird sich zeigen, daß Erkenntnisse aus dem Torsionsfall, sogar aus dem einfachsten Fall von $A/(\pi)$-Vektorräumen, sich auf alle $A$- und damit dann alle $K$-Darstellungen „hochziehen“ lassen.
Daß sich aus einer $A$-Darstellung $V$ durch Tensorieren eine $K$-Darstellung $K \underset{A}{\otimes} V$ ergeben wird, ist nicht überraschend. Erstaunlicherweise lassen sich so aber bis auf Isomorphie *alle* $K$-Darstellungen gewinnen, falls $G$ zusätzlich *kompakt* ist. Diese Voraussetzung wird in dieser Arbeit keine Einschränkung sein, da $G$ stets eine mit der Krull-Topologie versehene absolute Galoisgruppe (oder eine abgeschlossene Untergruppe davon) sein wird. Diese Gruppen sind proendlich, insbesondere kompakt.

**Satz 1.2.11.**

i. *Sei $V$ eine $A$-Darstellung von $G$. Dann ist $K \underset{A}{\otimes} V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum. Versehen mit der durch $g(a \otimes v) := a \otimes gv$ definierten linearen $G$-Wirkung ist er eine $K$-Darstellung von $G$.*

ii. *Sei $G$* kompakt *und $W$ eine $K$-Darstellung von $G$,* $\dim_K W = n$. *Dann existiert ein Gitter $V \subset W$ (d. i. ein freier $A$-Untermodul vom Rang $n$), welches $G$-invariant ist. Mit der eingeschränkten $G$-Wirkung ist $V$ eine $A$-Darstellung derart, daß $K \underset{A}{\otimes} V$ eine zu $W$ isomorphe $G$-Darstellung ist.*

*Beweis.*

i. Ist $v_1, ..., v_n$ eine $A$-Basis des freien Anteils von $V$, so ist $1 \otimes v_1, ..., 1 \otimes v_n$ eine $K$-Basis von $K \underset{A}{\otimes} V$. Die $G$-Wirkung ist nach Definition $K$-linear und liefert einen Gruppenhomomorphismus, den wir gleich als Kompositum

$$G \to \mathrm{Aut}_A(V) \to \mathrm{Aut}_K(K \underset{A}{\otimes} V)$$

schreiben, wobei der rechte Pfeil von der Abbildung

$$\mathrm{End}_A(V) \to \mathrm{End}_K(K \underset{A}{\otimes} V)$$

$$f \mapsto id \otimes f$$

induziert wird. Es reicht zu zeigen, daß diese stetig ist bezüglich der $\pi$-adischen Topologie links und der von einer beliebigen Norm induzierten rechts. Da die Abbildung $A$-linear ist, reicht es, Urbilder von Umgebungen des Nullpunktes zu betrachten. Mittels der obigen Basis identifizieren wir die rechte Seite homöomorph mit dem mit der Maximumsnorm versehenen Vektorraum $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann ist aber im Urbild von $B_{e^{-n}}(0)$ offenbar $\pi^n \cdot \mathrm{End}_A(V)$ enthalten.

ii. Wählen wir zunächst eine $K$-Basis $w_1, ..., w_n$ von $W$ und definieren das Gitter $V' = Aw_1 + ... + Aw_n$. Wir betrachten die Menge der $V'$ stabilisierenden Elemente

$$H := \{g \in G \mid gV' = V'\}$$

Man sieht sofort, daß $H$ eine Untergruppe von $G$ ist.

*Zwischenbehauptung*: $H$ ist offen.

Hierfür reicht es unter Benutzung der Stetigkeit der Darstellung und der homöomorphen Identifikation (nach der obigen Basiswahl)

$$\mathrm{Aut}_K(W) \simeq (\mathrm{GL}_n(K), \|\cdot\|_{max})$$

zu zeigen: Die Untergruppe

$$H' := \{C \in \mathrm{GL}_n(K) \mid C \cdot V' = V'\}$$

ist offen (denn $H = \rho^{-1}(H')$). Hierfür wiederum reicht es zu zeigen, daß eine offene Umgebung der Einheitsmatrix $E_n$ in $H'$ enthalten ist. Wir betrachten die definitionsgemäß offene Menge

$$\begin{aligned} U &:= \{C \in \mathrm{M}_{n\times n}(K) \mid \|C - E_n\|_{max} < e^{-1}\} \\ &= E_n + \pi \cdot \mathrm{M}_{n\times n}(A) \end{aligned}$$

Für $C \in U$ ist $|\det(C)|_K = 1$ ($\Rightarrow U \subset \mathrm{GL}_n(K)$) und offenbar $C \cdot V' \subseteq V'$. Mit $U$ ist auch $U^{-1} = \{C^{-1} \mid C \in U\}$ und somit $U \cap U^{-1}$ offen. Dies ist die gesuchte Umgebung, denn es gilt

$$C \in U \cap U^{-1} \Rightarrow V' = CC^{-1} \cdot V' \subseteq C \cdot V' \subseteq V'$$

also überall Gleichheit und $E_n \in U \cap U^{-1} \subset H'$. Die Zwischenbehauptung ist bewiesen.

Als offene Untergruppe der kompakten Gruppe $G$ hat $H$ endlichen Index. Es existieren also $1_G = g_1, g_2, ..., g_r \in G$ mit

$$G = \dot{\bigcup_{i=1,...,r}} g_i H \quad (*)$$

Wir definieren

$$V := \sum_{i=1}^{r} g_i V'$$

$V$ ist endlich erzeugter $A$-Modul (Erzeuger $\{g_i w_j \mid 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n\}$) und als Teilmenge von $W$ torsionsfrei, also frei, und wegen $V' \subseteq V$ vom Rang $n$, also ein Gitter. Dieses ist $G$-invariant, denn sei ein beliebiges $g \in G$ gegeben, dann existiert wegen $(*)$ für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ ein $j(i) \in \{1, ...r\}$ und ein $h_i \in H$ mit $gg_i = g_{j(i)} h_i$, also

$$gV = \sum_{i=1}^{r} gg_i V' = \sum_{i=1}^{r} g_{j(i)} h_i V' = \sum_{i=1}^{r} g_{j(i)} V' \subseteq V$$

Für die verbleibenden Aussagen sei $v_1, ..., v_n$ eine $A$-Basis von $V$ (und damit $K$-Basis von $W$). Wir erhalten mit dieser Basis hömöomorphe Identifikationen und eine Inklusion

$$\mathrm{End}_A(V) \simeq \mathrm{M}_{n\times n}(A) \subseteq \mathrm{M}_{n\times n}(K) \simeq \mathrm{End}_K(W)$$

bei der sich unsere übliche Topologie links als identisch mit der Teilraumtopologie von derjenigen rechts erweist. Deswegen ist der (wegen der $G$-Invarianz von $V$ wohldefinierte) Homomorphismus

$$G \to \mathrm{Aut}_A(V)$$
$$g \mapsto [v \mapsto gv]$$

stetig.
Schließlich ist der Isomorphismus von $K$-Vektorräumen

$$K \underset{A}{\otimes} V \to W$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes v_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

$G$-äquivariant.

□

## 1.3 Die abelsche Kategorie $\Phi M^{et}_{(A,\sigma)}$

In diesem Abschnitt werden wir die Kategorie der *etalen $\varphi$-Moduln* über einem geeigneten Ring kennenlernen. Sei zunächst $A$ ein Ring und $\sigma : A \to A$ ein fixierter Ringendomorphismus. Wir werden im Verlauf des Abschnitt immer weiter gehende Bedingungen an $A$ und $\sigma$ stellen, die aber in der Anwendung im nächsten Abschnitt alle problemlos erfüllt werden.

**Definition 1.3.1.** Ein $\varphi$-Modul über $(A,\sigma)$ ist ein Paar $(M,\varphi)$ bestehend aus einem $A$-Modul $M$ und einer Abbildung $\varphi : M \to M$, die $\sigma$-linear (oder semilinear) ist, d. h. $\varphi$ ist additiv und es gilt für alle $a \in A, m \in M$

$$\varphi(am) = \sigma(a) \cdot \varphi(m)$$

Ein Morphismus von zwei $\varphi$-Moduln $(M,\varphi_M)$ und $(N,\varphi_N)$ ist ein Homomorphismus von $A$-Moduln $f : M \to N$, so daß $f \circ \varphi_M = \varphi_N \circ f$ gilt.

Gegeben sei ein $\varphi$-Modul $(M,\varphi)$. Betrachte $\sigma : A \to A$ als Skalarerweiterung und setze

$$M_\sigma := A_\sigma \underset{A}{\otimes} M$$

Dies ist ein $A$-Linksmodul bezüglich $a \cdot (b \otimes m) := ab \otimes m$. Diese Konstruktion liefert uns eine alternative Beschreibung von $\varphi$-Moduln.

**Lemma 1.3.2.**

i. *Mit den obigen Notationen definiert*

$$\Phi_\varphi : M_\sigma \to M$$
$$\sum_i a_i \otimes m_i \mapsto \sum_i a_i \varphi(m_i)$$

*einen Homomorphismus von $A$-Linksmoduln.*

ii. *Ist umgekehrt ein $A$-Linksmodulhomomorphismus*

$$\Phi : M_\sigma \to M$$

*gegeben, so ist*

$$\varphi_\Phi : M \to M$$
$$m \mapsto \Phi(1 \otimes m)$$

*eine $\sigma$-lineare Abbildung.*

iii. *Diese Konstruktionen sind invers zueinander. Es ist also einerlei, ob wir uns zu einem $A$-Modul $M$ eine Abbildung $\varphi$ wie in 1.3.1 oder $\Phi$ wie hier vorgeben.*

*Beweis.*

i. Die Abbildung

$$\tilde{\Phi}_\varphi : A_\sigma \times M \to M$$
$$(a,m) \mapsto a\varphi(m)$$

ist balanciert, denn

$$\tilde{\Phi}_\varphi((a \underset{S}{\cdot} b, m)) = \tilde{\Phi}_\varphi((a\sigma(b), m)) = a\sigma(b)\varphi(m) = a\varphi(bm) = \tilde{\Phi}_\varphi((a, bm))$$

liefert also obige additive Abbildung, die offenbar $A$-linear ist.

ii. Es gilt

$$\varphi_\Phi(am+n) = \Phi(1 \otimes (am+n)) = \Phi((1 \otimes am) + (1 \otimes n)) = \Phi(1 \otimes am) + \Phi(1 \otimes n)$$
$$= \Phi(\sigma(a) \otimes m) + \varphi_\Phi(n) = \sigma(a)\Phi(1 \otimes m) + \varphi_\Phi(n) = \sigma(a)\varphi_\Phi(m) + \varphi_\Phi(n)$$

für alle $a \in A$ und $m, n \in M$.

iii. $\varphi_{\Phi_\varphi} = \varphi$ ist offensichtlich. Umgekehrt gilt

$$\Phi_{\varphi_\Phi}\left(\sum_i a_i \otimes m_i\right) = \sum_i a_i \varphi_\Phi(m_i) = \sum_i a_i \Phi(1 \otimes m_i) \overset{\Phi \text{ linear}}{=} \Phi\left(\sum_i a_i \otimes m_i\right)$$

für alle $a_i \in A, m_i \in M$.

□

**Satz 1.3.3.** *Die $\varphi$-Moduln zu einem gegebenen Paar $(A, \sigma)$ bilden eine abelsche Kategorie $\Phi M_{(A,\sigma)}$.*

*Beweis.* Siehe [Fon90, 1.1.2]. Der Trick ist, einen (ausnahmsweise nicht kommutativen) Ring $A_\sigma[\varphi]$ zu definieren, so daß sich die $\varphi$-Moduln über $A$ funktoriell mit den Linksmoduln über $A[\varphi]$ und Morphismen von $\varphi$-Moduln mit den Linksmodulhomomorphismen über $A_\sigma[\varphi]$ identifizieren. Damit identifizieren wir unsere Kategorie mit derjenigen der Linksmoduln über jenem Ring, wofür die Aussage bekannt ist. □

**Satz 1.3.4.** *$\Phi M_{(A,\sigma)}$ ist abgeschlossen unter Bildung des Tensorprodukts.*

*Beweis.* Zu zwei $\varphi$-Moduln $(M, \varphi_M)$, $(N, \varphi_N)$ ist die Abbildung

$$\varphi_M \otimes \varphi_N : M \underset{A}{\otimes} N \to M \underset{A}{\otimes} N$$
$$\sum_i m \otimes n \mapsto \sum_i \varphi_M(m) \otimes \varphi_N(n)$$

offenbar $\sigma$-linear, d. h. $(M \underset{A}{\otimes} N, \varphi_M \otimes \varphi_N)$ ist ein $\varphi$-Modul. □

Im folgenden sollen die betrachteten $\varphi$-Moduln *endlich erzeugt* sein. Um die Chance zu wahren, hier eine sinnvolle Kategorie zu erhalten, sei der Ring $A$ von nun an stets *noethersch.*

**Definition 1.3.5.** Ein etaler $\varphi$-Modul ist ein $\varphi$-Modul $(M, \varphi)$ derart, daß

i. $M$ endlich erzeugt über $A$ ist

ii. die zu $\varphi$ gehörige Abbildung $\Phi : M_\sigma \to M$ (vgl. 1.3.2) bijektiv, also ein Isomorphismus ist.

**Satz 1.3.6.** *Ist $\sigma$ flach, so bilden die etalen $\varphi$-Moduln über einem Paar $(A, \sigma)$ eine abelsche Kategorie $\Phi M^{et}_{(A,\sigma)}$.*

*Beweis.* Siehe [Fon90, 1.1.5]. □

**Satz 1.3.7.** $\Phi M^{et}_{(A,\sigma)}$ *ist abgeschlossen unter Bildung des Tensorprodukts.*

*Beweis.* Seien $M$, $N$ etale $\varphi$-Moduln; wir prüfen nach, daß das gemäß Satz 1.3.4 definierte Tensorprodukt etal ist. Mit $M$ und $N$ ist bekanntlich auch $M \underset{A}{\otimes} N$ endlich erzeugt. Zu zeigen bleibt, daß die durch folgende Vorschrift wohldefinierte, $A$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi_{M\otimes N} : (M \underset{A}{\otimes} N)_\sigma = A_\sigma \otimes (M \underset{A}{\otimes} N) &\to M \underset{A}{\otimes} N \\ a \otimes (m \otimes n) &\mapsto a\varphi(m) \otimes \varphi(n) \ (= \varphi(m) \otimes a\varphi(n))\end{aligned}$$

bijektiv ist. Betrachte nun den $A$-Modul $M_\sigma \underset{A}{\otimes} N_\sigma$, den wir suggestiver in der Form

$$(M \underset{A,\sigma}{\otimes} A) \underset{A}{\otimes} (A \underset{\sigma,A}{\otimes} N)$$

schreiben. Wie man leicht nachrechnet, haben wir dann durch die unten gegebenen Abbildungsvorschriften eindeutig definierte Isomorphismen von $A$-Moduln

$$A_\sigma \otimes (M \underset{A}{\otimes} N) \xrightarrow{\sim} (M \underset{A,\sigma}{\otimes} A) \underset{A}{\otimes} (A \underset{\sigma,A}{\otimes} N)$$

$$\begin{aligned} a \otimes (m \otimes n) &\mapsto (m \otimes a) \otimes (1 \otimes n) = (m \otimes 1) \otimes (a \otimes n) \\ aa' \otimes (m \otimes n) &\leftarrow\!\shortmid (m \otimes a) \otimes (a' \otimes n)\end{aligned}$$

Ebenso leicht rechnet man nach, daß mit diesem Isomorphismus in der oberen Zeile das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_\sigma \otimes (M \underset{A}{\otimes} N) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\Phi_{M\otimes N}"'] & & (M \underset{A,\sigma}{\otimes} A) \underset{A}{\otimes} (A \underset{\sigma,A}{\otimes} N) \arrow[dl, "\Phi_M \otimes \Phi_N"] \\ & M \underset{A}{\otimes} N & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei sind $\Phi_M : M_\sigma \to M$ und $\Phi_N : N_\sigma \to N$ nach Voraussetzung Isomorphismen, mithin auch der rechte Pfeil im Diagramm, also auch, wie zu zeigen war, der linke. □

Wir wollen den Begriff „etal“ für einige Sonderfälle genauer charakterisieren.

**Lemma 1.3.8.** *Sei $(M, \varphi)$ ein $\varphi$-Modul.*

*i.* *$\Phi$ ist surjektiv genau dann, wenn $M$ als $A$-Modul von $\mathrm{im}(\varphi)$ erzeugt wird.*

*ii.* *Ist $\sigma$ ein Automorphismus, so ist $\Phi$ genau dann bijektiv, wenn $\varphi$ es ist.*

*iii.* *Ist $A =: K$ ein Körper und $M$ endlich erzeugt, also endlichdimensionaler Vektorraum, so ist $(M, \varphi)$ etal genau dann, wenn $\varphi$ etal ist im Sinne von [Schn07, Definition 1.7.]. Insbesondere sind dann auch die Bedingungen aus i. äquivalent dazu, daß $(M, \varphi)$ etal ist.*

*Beweis.*

i. $\Phi$ surjektiv $\Leftrightarrow$ für alle $m \in M$ ex. $a_1, ..., a_n \in A$ und $m_1, ..., m_n \in M$ mit $\Phi(\sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi(m_i) = m \Leftrightarrow M$ wird von $\mathrm{im}(\varphi)$ erzeugt.

ii. Mit der Umkehrabbildung $\sigma^{-1}$ zu $\sigma$ haben wir offenbar Isomorphismen additiver Gruppen

$$\begin{array}{ccc} M_\sigma & \simeq & M \\ \sum_i a_i \otimes m_i & \mapsto & \sum_i \sigma^{-1}(a_i)m_i \\ 1 \otimes m & \leftarrow\!\shortmid & m \end{array}$$

Insbesondere ist also für $0 \neq m \in M$ auch $0 \neq 1 \otimes m \in M_\sigma$.
Sei nun $\Phi$ bijektiv. $\varphi$ ist injektiv, denn gäbe es $0 \neq m \in M$ mit $\varphi(m) = 0$, so wäre $1 \otimes m \in ker(\Phi) = \{0\}$ im Widerspruch zum eben gezeigten. $\varphi$ ist surjektiv, denn nach i. und der Voraussetzung gibt es zu beliebigem $m \in M$ Elemente $a_1, ..., a_n \in A$ und $m_1, ..., m_n \in M$ mit $m = \sum_{i=1}^n a_i\varphi(m_i) = \varphi(\sum_{i=1}^n \sigma^{-1}(a_i)m_i)$.
Sei umgekehrt $\varphi$ bijektiv und $\varphi^{-1}$ die Umkehrabbildung, welche $\sigma^{-1}$-linear ist[4]; setze

$$\Phi^{-1} : m \mapsto 1 \otimes \varphi^{-1}(m)$$

Dann gilt offensichtlich $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_M$ und für $\sum_i a_i \otimes m_i \in M_\sigma$:

$$\Phi^{-1}(\Phi(\sum_i a_i \otimes m_i)) = 1 \otimes \sum_i \varphi^{-1}(a_i\varphi(m_i)) = 1 \otimes \sum_i \sigma^{-1}(a_i)m_i = \sum_i a_i \otimes m_i$$

iii. In diesem Fall ist $\Phi$ ein Homomorphismus von $K$-(Links-)Vektorräumen gleicher endlicher Dimension. $\Phi$ ist also genau dann surjektiv, wenn es bijektiv ist. Die Behauptung folgt mit i. und [Schn07, Lemma 1.6.i.].

□

Lemma 1.3.8 zeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen an das Paar $(A, \sigma)$ die etalen $\varphi$-Moduln leichter zu handhaben sind. Der folgende Satz gibt hierzu ein weiteres nützliches Beispiel.

**Satz 1.3.9.** *Im Paar $(A, \sigma)$ sei $A$ ein noetherscher Integritätsbereich von Dimension $\leqslant 1$, $\sigma$ flach, und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ sei auch das von seinem Bild $\sigma(\mathfrak{m})$ erzeugte Ideal maximal. Dann gilt:*

*i. Ein endlich erzeugter $\varphi$-Modul $N$ über $(A, \sigma)$ ist genau dann etal, wenn die zugehörige Abbildung $\Phi$ surjektiv ist.*

*ii. Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von $\varphi$-Moduln über $(A, \sigma)$. Dann ist $M$ genau dann etal, wenn $M'$ und $M''$ etal sind.*

*Beweis.* Siehe [Fon90, 1.1.6.]. □

[4]Wende $\varphi^{-1}$ an auf $\varphi(\sigma^{-1}(a)\varphi^{-1}(m)) = am = \varphi(\varphi^{-1}(am))$ mit beliebigen $a \in A, m \in M$.

Damit können wir auch hier die wichtigsten exakten Sequenzen in der Kategorie bilden:

**Bemerkung 1.3.10.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.3.9 sei $M$ ein etaler $\varphi$-Modul über $(A, \sigma)$, und sei $a \in A$ mit $\sigma(a) = a$.*

$$0 \to aM \to M \to M/aM \to 0$$

*und (mit $M_a := \{m \in M : am = 0\}$)*

$$0 \to M_a \to M \to M/M_a \to 0$$

*sind exakte Sequenzen in $\Phi M^{et}_{(A,\sigma)}$, wobei die Pfeile links die Inklusion und rechts die kanonische Projektion bezeichnen.*

*Beweis.* $\sigma(a) = a$ garantiert, daß $aM$ und $M_a$ mit der Einschränkung von $\varphi_M$ $\varphi$-Moduln sind; damit sind dies auch die Quotienten (mit der von $\varphi_M$ induzierten Abbildung), die Pfeile sind dann Morphismen von $\varphi$-Moduln und mit Satz 1.3.9.ii sind auch die Objekte links und rechts etal. □

Wir werden im folgenden Abschnitt für einen $\varphi$-Modul $M$ die Fixmenge

$$M^{\varphi=id} := \{m \in M : \varphi(m) = m\}$$

betrachten. Hierzu wird folgender Satz nützlich sein.

**Satz 1.3.11.** *Sei*

$$0 \to M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{j} M_3 \to 0$$

*eine exakte Sequenz von $\varphi$-Moduln. Dann erhalten wir eine exakte Sequenz additiver Gruppen*

$$0 \to M_1^{\varphi=id} \xrightarrow{\tilde{i}} M_2^{\varphi=id} \xrightarrow{\tilde{j}} M_3^{\varphi=id} \xrightarrow{\delta} M_1/(\varphi - id)M_1$$

*Beweis.* Die Abbildungen $\tilde{i}$ und $\tilde{j}$ entstehen durch Einschränkung. Wir müssen die Abbildung $\delta$ definieren. Zur Abkürzung identifizieren wir $M_1$ mit seinem Bild in $M_2$.
Zu $z \in M_3^{\varphi=id} \subseteq M_3$ wähle ein Urbild $y$ unter $j$. Es gilt $0 = z - \varphi(z) = j(y - \varphi(y))$, also $x := y - \varphi(y) \in ker(j) = M_1$. Setze $\delta(z) := x + (\varphi - id)M_1$.
Dies ist wohldefiniert, denn ein anderes Urbild $y'$ von $z$ ist von der Gestalt $y+m$ mit $m \in M_1$, also $y' - \varphi(y') = x + (\varphi - id)(-m)$.
Man sieht leicht, daß $\delta$ additiv ist, und ebenso leicht die Exaktheit an allen Stellen außer der letzten. Dort ist jedenfalls für $y \in M_2^{\varphi=id}$

$$\delta(\tilde{j}(y)) = y - \varphi(y) + (\varphi - id)M_1 = 0 + (\varphi - id)M_1$$

d. h. $im(\tilde{j}) \subseteq ker(\delta)$. Ist umgekehrt $\delta(z) = 0$ für ein $z \in M_3^{\varphi=id}$ und $y$ ein Urbild von $z$ unter $j$, dann ist $y - \varphi(y) = m - \varphi(m)$ für ein $m \in M_1$. Also gilt für $y' := y - m$ sowohl $y' \in M_2^{\varphi=id}$ als auch $j(y') = j(y) = z$, also $z \in im(\tilde{j})$. □

## 1.4 Beweis der Kategorienäquivalenz

Wir zeigen nun die Äquivalenz der Kategorien $Rep_{W(\mathbb{F}_{p^r})}(G_E)$ und $\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\sigma^r)}$. Dabei ist
– $r \in \mathbb{N}$; setze zur Abkürzung $q := p^r$, $W := W(\mathbb{F}_q)$
– $E$ ein *Körper der Charakteristik* $p$, welcher $\mathbb{F}_q$ enthält; $E^{sep}$ ein fixierter separabler Abschluß
– $G := G_E := \mathrm{Gal}(E^{sep}|E)$ dessen *absolute Galoisgruppe*
– $\mathcal{E}$ ein *vollständiger diskret bewerteter Körper der Charakteristik 0* mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, der also ein *vollständiger DBR* ist; dabei ist $p$ Primelement und $E$ Restklassenkörper von $\mathcal{O}_\mathcal{E}$
– $\sigma : \mathcal{O}_\mathcal{E} \to \mathcal{O}_\mathcal{E}$ ein *Frobenius-Lift*, d. h. ein Ringendomorphismus mit

$$\sigma(x) \equiv x^p \, mod \, p \ \ (*)$$

– $\mathcal{E}_{nr}$ eine unverzweigte, algebraische Erweiterung von $\mathcal{E}$, deren Restklassenkörper separabel abgeschlossen und damit (über einen im folgenden fixierten und in der Notation unterschlagenen Isomorphismus, der auf $E$ die Identität ist) isomorph zu $E^{sep}$ ist; $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$ dessen Ganzheitsring; die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathcal{E}_{nr}|\mathcal{E})$ identifizieren wir gemäß 1.1.10 mit $G$
– $\widehat{\mathcal{E}_{nr}}$ die Komplettierung von $\mathcal{E}_{nr}$ und $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ deren Ganzheitsring; bekanntlich ist damit $p$ auch Primelement und $E^{sep}$ Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$.

### 1.4.1 Rückführung auf zwei Propositionen

Weil die Bewertung $v_\mathcal{E}$ von $\mathcal{E}$ sich eindeutig zu derjenigen $v_{\mathcal{E}_{nr}}$ von $\mathcal{E}_{nr}$ fortsetzt, gilt $v_{\mathcal{E}_{nr}} \circ g = v_{\mathcal{E}_{nr}}$ für alle $g \in \mathrm{Gal}(\mathcal{E}_{nr}|\mathcal{E})$, d. h. alle $g$ sind isometrisch, insbesondere stetig. Sie lassen sich daher mit den üblichen Grenzwertsätzen eindeutig zu Körperautomorphismen von $\widehat{\mathcal{E}_{nr}}$ fortsetzen.
Nach Satz 1.1.12 gibt es eine eindeutige $(*)$ erfüllende Fortsetzung von $\sigma$ zu einem Ringendomorphismus auf $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$, welche wir ebenfalls mit $\sigma$ bezeichnen. Die Abbildung $\sigma$ fixiert als Ringendomorphismus die 0 und alle $p^n$ und bildet Einheiten auf Einheiten ab. Da sich jedes $0 \neq x \in \mathcal{O}_\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$ eindeutig in der Form $p^n u$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und einer Einheit $u$ schreibt, ist also auch $\sigma$ (auf jedem der betrachteten Ringe) *isometrisch*, insbesondere *stetig und injektiv.* Weil sie stetig ist, setzt sie sich eindeutig zu einem Ringendomorphismus auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ fort; die wiederum mit $\sigma$ bezeichnete Fortsetzung ist aus demselben Grund wie vorher isometrisch. Setze zur Abkürzung $\tau := \sigma^r$; auch $\tau$ erfüllt die genannten Eigenschaften.
Wegen $\mathbb{F}_q \subseteq E$ enthält $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ die $(q-1)$-ten Einheitswurzeln $\mu_{q-1}$. Wir identifizieren $W \cong \mathbb{Z}_p(\mu_{q-1}) \subset \mathcal{O}_\mathcal{E}$, $\Phi_0 = pr$.

**Lemma 1.4.1.** *$\sigma$ schränkt sich zu einem Endomorphismus von $W$ ein, nämlich dem Witt-Frobenius $F$. Insbesondere fixiert $\tau$ jedes Element von $W$.*

*Beweis.* Sei $\zeta \in \mu_{q-1}$. Auch $\sigma(\zeta)$ muß, da $\sigma$ Ringhomomorphismus ist, eine $(q-1)$-te Einheitswurzel sein. Als stetiger Ringhomomorphismus fixiert $\sigma$ alle Elemente von $\mathbb{Z}_p$. Folglich gilt $\sigma(\mathbb{Z}_p(\mu_{q-1})) \subseteq \mathbb{Z}_p(\mu_{q-1})$. Wegen Bemerkung 1.1.13 ist $\sigma_{|W} = F$. Da die Elemente von $\mathbb{F}_q$ gleich ihrer $q$-ten Potenz sind, ist $F^r = id_W$. (Alternativ: Es gilt $\sigma(\zeta) \equiv \zeta^p \bmod (p)$. Die einzige $(q-1)$-te Einheitswurzel, die modulo $p$ kongruent zu $\zeta^p$ ist, ist $\zeta^p$ selbst. Also ist $\sigma$ auf $\mu_{q-1}$ einfach das Potenzieren mit $p$, folglich $\tau(\xi) = \xi^q = \xi$ für alle $\xi \in \mu_{q-1}$ und ohnehin $\tau_{|\mathbb{Z}_p} = id_{\mathbb{Z}_p}$.) $\square$

**Lemma 1.4.2.**

*i.* *In der Kette von Ringerweiterungen $W \subseteq \mathcal{O}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}} \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ ist jeder der Ringe über allen jeweils kleineren treu-flach.*

*ii.* *Ist $A$ einer der Ringe $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$, $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$, so ist $\tau : A \to A$ flach.*

*iii.* *Für alle $n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \tau(x) \equiv x \textit{ mod } (p^n) &\quad\Leftrightarrow\quad x \in W + p^n\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}\ ; \\ gx \equiv x \textit{ mod } (p^n) \textit{ für alle } g \in G &\quad\Leftrightarrow\quad x \in \mathcal{O}_\mathcal{E} + p^n\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \end{aligned}$$

*sowie („Fall $n = \infty$“)*

$$\begin{aligned} \tau(x) = x &\quad\Leftrightarrow\quad x \in W\ ; \\ gx = x \textit{ für alle } g \in G &\quad\Leftrightarrow\quad x \in \mathcal{O}_\mathcal{E} \end{aligned}$$

*Beweis.*

i. Lemma 1.1.6.

ii. Alle betrachteten Ringe sind Hauptidealringe, so daß „flach“ gleichbedeutend ist mit „torsionsfrei“ ([AC, chap. I, §2, no. 4, prop. 3(ii)]). Dies ist $A_\tau$, denn $A$ ist Integritätsbereich und $\tau$ injektiv.

iii. Die Rückrichtung im Fall $n = \infty$ folgt aus Lemma 1.4.1 bzw. ist klar. Da alle $g$ und $\tau$ isometrisch wirken, folgen auch die Rückrichtungen im ersten Fall. Für die umgekehrte Richtung führen wir zunächst eine Induktion nach $n$:

*Induktionsanfang*: $n = 1$

Bezeichnet $\bar{x}$ die Nebenklasse von $x$ in $E^{sep} = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}/(p)$, so folgt

$\bar{x} = \bar{x}^{p^r}$, also $\bar{x} \in \mathbb{F}_q = W/(p)$, d. h. $\bar{x}$ enthält ein Element von $W$; bzw.
$g\bar{x} = \bar{x}$ für alle $g \in G$, also $\bar{x} \in E = \mathcal{O}_\mathcal{E}/(p)$, d. h. $\bar{x}$ enthält ein Element von $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

*Induktionsschritt*: $n \geqslant 2$, die Behauptung sei für $n-1$ bewiesen.

Nach Induktionsannahme gilt $x = a + p^{n-1}y$ mit $a \in W$ (bzw. $\mathcal{O}_\mathcal{E}$) und $y \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$. Da die Elemente von $W$ bzw. $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ wie gesehen ohnehin fixiert werden, gilt also auch

$p^{n-1}\tau(y) = \tau(p^{n-1}y) = \tau(x-a) \equiv x - a = p^{n-1}y \bmod (p^n)$ bzw.
$p^{n-1}g(y) = g(p^{n-1}y) = g(x-a) \equiv x - a = p^{n-1}y \bmod (p^n)$ für alle $g \in G$

Nach Division durch $p^{n-1}$ sind wir in der Situation des Induktionsanfangs und erhalten $y = b + pz$ mit $b \in W$ (bzw. $\mathcal{O}_\mathcal{E}$) und $z \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$, insgesamt also $x = a + p^{n-1}b + p^n z \in W + p^n\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ (bzw. $\mathcal{O}_\mathcal{E} + p^n\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$).
Damit sind die ersten Äquivalenzen gezeigt. Für die noch fehlende Richtung „$\Rightarrow$“ im Fall $n = \infty$ genügt es daher (für $B \in \{W, \mathcal{O}_\mathcal{E}\}$) die Gleichheit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B + p^n\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}) = B$$

bzw. die nicht-triviale Inklusion $\subseteq$ zu zeigen. Sei also $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(B + p^n\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}})$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreibe $x = b_n + p^n y_n$ mit $b_n \in B, y_n \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$. Dann gilt

$$b_{n+1} - b_n = p^n(y_n - py_{n+1}) \in p^n\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge im vollständigen Ring $B$, zu der also ein Grenzwert $b \in B$ existiert. Dieser ist gleich $x$, denn

$$x - b = \lim_{n\to\infty}(x - b_n) = \lim_{n\to\infty} p^n y_n = 0$$

$\square$

**Definition 1.4.3.** Wir betrachten zu einer $G$-Darstellung $V$ das Tensorprodukt $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V$ und definieren hierauf eine $G$-Wirkung durch

$$g\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right) := \sum_i ga_i \otimes gv_i$$

Setze

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) := (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^G$$

Zu einem Morphismus $f : V \to V'$ von $G$-Darstellungen setze

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f) := (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)} : \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V'$$

Zu einem (etalen) $\varphi$-Modul $M$ über $(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \tau)$ betrachten wir das Tensorprodukt $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M$ mit der $\tau$-linearen Abbildung

$$\varphi : \sum_i a_i \otimes m_i \mapsto \sum_i \tau(a_i) \otimes \varphi(m_i)$$

Setze

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) := (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M)^{\varphi=id}$$

Zu einem Morphismus $f : M \to N$ von (etalen) $\varphi$-Moduln setze

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(f) := (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)_{|\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)} : \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} N$$

**Bemerkung 1.4.4.** *Ist $V$ bzw. $M$ ein Modul endlicher Länge über $W$ bzw. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, so ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}} \underset{W}{\otimes} V$ bzw. $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M$.*
*Diese Identifikation verträgt sich mit analog zu 1.4.3 definierten Operationen von $G$ bzw. $\varphi$ auf den Tensorprodukten mit $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$. In diesem Fall kann also in 1.4.3 überall $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ durch $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$ ersetzt werden.*

*Beweis.* Werde $V$ gemäß 1.1.7 etwa von $p^m$ annulliert. Da $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$ dicht in $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ liegt, gibt es zu jedem $a \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ ein $a' \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$ mit $a - a' \in p^m \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$. Damit erhalten wir z. B. zueinander inverse Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V & \cong & \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}} \underset{W}{\otimes} V \\ \sum_i a_i \otimes v_i & \mapsto & \sum_i a_i' \otimes v_i \\ \sum_i a_i' \otimes v_i & \leftarrow\!\shortmid & \sum_i a_i' \otimes v_i \end{array}$$

(Die erste Abbildung hängt wegen der strengen Dreiecksungleichung natürlich nicht von der Wahl der $a_i'$ ab.) Die zweite Aussage ergibt sich daraus, daß alle $g \in G$ bzw. $\tau$ Isometrien sind. □

**Lemma 1.4.5.**

*i. $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ ist ein additiver Funktor von der Kategorie $Rep_W(G)$ in die Kategorie der $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Moduln $Mod(\mathcal{O}_\mathcal{E})$.*

*ii. $\mathcal{V}_\mathcal{E}$ ist ein additiver Funktor von der Kategorie $\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\tau)}$ in die Kategorie der $W$-Moduln $Mod(W)$.*

*Beweis.*

i. $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ ist ein Funktor:

– Für $V$ aus $Rep_W(G)$ ist das Objekt

$$\mathcal{D}_\mathcal{E}(V) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^G$$

ein $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Modul, da die Wirkung von $G$ auf dem Tensorprodukt $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-linear ist.

– Für einen Morphismus von $G$-Darstellungen $f : V \to V'$ ist klar, daß

$$\mathcal{D}_\mathcal{E}(f) : \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V'$$

$\mathcal{O}_\mathcal{E}$-linear ist. Zu prüfen bleibt:

$$(id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) = \mathcal{D}_\mathcal{E}(f)(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \subseteq \mathcal{D}_\mathcal{E}(V') \tag{1.3}$$

Aber für beliebige $\sum_i a_i \otimes v_i \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)$ und $g \in G$ gilt

$$\begin{aligned}
g\left((\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f))\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right)\right) &= g\left(\sum_i a_i \otimes f(v_i)\right) \\
&= \sum_i g a_i \otimes g f(v_i) \\
&\overset{f\text{ G-äquiv.}}{=} \sum_i g a_i \otimes f(g v_i) \\
&= (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)\left(\sum_i g a_i \otimes g v_i\right) \\
&= (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)\left(g\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right)\right) \\
&\overset{\sum_i a_i \otimes v_i \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)}{=} (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right) \\
&= \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f)\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right)
\end{aligned}$$

also $(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f))(\sum_i a_i \otimes v_i) \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V')$ wie behauptet.

– Für jede $G$-Darstellung $V$ ist offenbar $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(id_V) = (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes id_V)_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)} = id_{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)}$.

– Sei $U \xrightarrow{f'} V \xrightarrow{f} V'$ eine Sequenz in $Rep_W(G)$. Es gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f \circ f') &= (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes (f \circ f'))_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(U)} = [(id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f) \circ (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f')]_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(U)} \\
&= (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f) \circ (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f')_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(U)} \\
&\overset{!}{=} (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)} \circ (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f')_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(U)} = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f) \circ \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f')
\end{aligned}$$

Mit Ausnahme der hervorgehobenen sind die Gleichheiten trivial; diese gilt wegen (1.3).

<u>$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ ist additiv:</u>

Seien $V, V'$ zwei $G$-Darstellungen und $f, f' \in Hom_G(V, V')$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f + f') &= (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes (f + f'))_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)} \\
&= [(id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f) + (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f')]_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)} = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f) + \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(f')
\end{aligned}$$

ii. Der Beweis verläuft analog zu demjenigen für den Funktor $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$, insbesondere ist wieder

$$(id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)(\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)) = \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(f)(\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)) \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(N)$$

denn für beliebige $\sum_i a_i \otimes m_i \in \mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi\left((\mathcal{V}_\mathcal{E}(f))\left(\sum_i a_i \otimes m_i\right)\right) &= \varphi\left(\sum_i a_i \otimes f(m_i)\right) \\
&= \sum_i \varphi(a_i) \otimes \varphi(f(m_i)) \\
&\overset{f \text{ und } \varphi \text{ vertauschen}}{=} \sum_i \varphi(a_i) \otimes f(\varphi(m_i)) \\
&= (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)\left(\sum_i \varphi(a_i) \otimes \varphi(m_i)\right) \\
&\overset{\sum_i a_i \otimes m_i \in \mathcal{V}_\mathcal{E}(M)}{=} (id_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}} \otimes f)\left(\sum_i a_i \otimes m_i\right) \\
&= \mathcal{V}_\mathcal{E}(f)\left(\sum_i a_i \otimes m_i\right)
\end{aligned}$$

□

**Lemma 1.4.6.**

i. *Die Wirkungen von $G$ und $\sigma$ (und damit auch $\tau$) auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ vertauschen miteinander, das heißt: Für alle $a \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ und $g \in G$ gilt*

$$\sigma(ga) = g(\sigma(a))$$

ii. *Für eine $G$-Darstellung $V$ definiere auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V$ die $\tau$-lineare Abbildung*

$$\varphi\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right) := \sum_i \tau(a_i) \otimes v_i$$

*Dann ist $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ mit der Einschränkung davon ein $\varphi$-Modul über $(\mathcal{O}_\mathcal{E}, \tau)$.*

iii. *Für einen Morphismus von $G$-Darstellungen $f : V \to V'$ ist $\mathcal{D}_\mathcal{E}(f)$ ein Morphismus von $\varphi$-Moduln.*

iv. *Für einen $\varphi$-Modul $M$ definiert $\sum_i a_i \otimes m_i \mapsto \sum_i ga_i \otimes m_i$ eine $W$-lineare $G$-Wirkung auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M$, die sich zu einer ebensolchen auf $\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ einschränkt.*

v. *Für einen Morphismus von $\varphi$-Moduln $f : M \to N$ ist $\mathcal{V}_\mathcal{E}(f)$ ein Morphismus von $G$-Moduln.*

*Beweis.*

i. Sei $g \in G$ beliebig. Definiere

$$\sigma_g := g \circ \sigma \circ g^{-1} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$$

Dies ist ein Ringendomorphismus, der auf $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ mit dem ursprünglichen $\sigma$ übereinstimmt. Wegen

$$(g^{-1}x)^p \equiv \sigma(g^{-1}x) \bmod p$$

ist

$$x^p = gg^{-1}(x^p) = g[(g^{-1}x)^p] \overset{g\text{ linear}}{\equiv} g[\sigma(g^{-1}x)] = \sigma_g(x) \bmod p$$

Aufgrund der Eindeutigkeit in Satz 1.1.12 ist also $\sigma_g = \sigma$ (zunächst auf $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$, aber damit auch auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$), und für alle $a \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$

$$\sigma(ga) = \sigma_g(ga) = g[\sigma((g^{-1}g)a)] = g(\sigma(a))$$

ii. Für alle $\sum_i a_i \otimes v_i \in \mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ ist

$$g\left(\varphi\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right)\right) = g\sum_i \tau(a_i)\otimes v_i = \sum_i g(\tau(a_i))\otimes gv_i$$

$$\overset{\text{i.}}{=} \sum_i \tau(ga_i)\otimes gv_i = \varphi\left(g\left(\sum_i a_i\otimes v_i\right)\right) = \varphi\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right)$$

also $\varphi(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \subseteq \mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$.

iii. Nach 1.4.3 ist nur noch zu zeigen, daß $\mathcal{D}_\mathcal{E}(f) = (id\otimes f)_{|\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)}$ mit $\varphi$ vertauscht. Aber nach der Definition von $\varphi$ in ii. ist offenkundig schon $\varphi_{V'}\circ(id\otimes f) = (id\otimes f)\circ\varphi_V$.

iv. Die Axiome einer $G$-Wirkung und die $W$-Linearität sind sofort nachzurechnen. Zudem gilt für $\sum_i a_i\otimes m_i \in \mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$

$$\varphi\left(g\left(\sum_i a_i\otimes m_i\right)\right) = \varphi\left(\sum_i ga_i\otimes m_i\right) = \sum_i \tau(ga_i)\otimes m_i$$

$$\overset{\text{i.}}{=} \sum_i g(\tau(a_i))\otimes m_i = g\left(\varphi\left(\sum_i a_i\otimes m_i\right)\right) = g\left(\sum_i a_i\otimes m_i\right)$$

also $gv \in \mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ für alle $v\in\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$.

v. Analog zu iii. gilt bereits (kurz geschrieben) $g\circ(id\otimes f) = (id\otimes f)\circ g$ für alle $g\in G$.

□

**Lemma 1.4.7.**

*i. Mit den im vorigen Lemma, Teil ii. bzw. iv., definierten Operationen von $\varphi$ bzw. $G$ gilt*

$$(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^{\varphi=id} = \{x\in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \mid x = 1\otimes v \text{ für ein } v\in V\}$$

$$(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M)^G = \{x\in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M \mid x = 1\otimes m \text{ für ein } m\in M\}$$

*Dabei sind $v$ und $m$ in obigen Darstellungen zudem* eindeutig.

*ii. Die nach i. wohldefinierten Abbildungen*

$$\xi_V : (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^{\varphi=id} \to V$$

$$1 \otimes v \mapsto v$$

*und*

$$\zeta_M : (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M)^G \to M$$

$$1 \otimes m \mapsto m$$

*sind Isomorphismen von W- bzw.* $\mathcal{O}_\mathcal{E}$*-Moduln. Für alle Morphismen von Darstellungen* $f : V \to V'$ *kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^{\varphi=id} \arrow[r, "id\otimes f"] \arrow[d, "\xi_V"'] & (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V')^{\varphi=id} \arrow[d, "\xi_{V'}"] \\
V \arrow[r, "f"] & V'
\end{tikzcd}$$

*bzw. für alle Morphismen (etaler)* $\varphi$*-Moduln* $h : M \to N$ *das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M)^G \arrow[r, "id\otimes h"] \arrow[d, "\zeta_M"'] & (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} N)^G \arrow[d, "\zeta_N"] \\
M \arrow[r, "h"] & N
\end{tikzcd}$$

*(Dabei müßte jeweils in der oberen Zeile formal korrekt die Einschränkung der Abbildung auf das Objekt oben links stehen; das Bild liegt, wie man leicht nachrechnet, tatsächlich im Objekt rechts.)*

*iii. Versehen wir* $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V$ *mit der G-Wirkung wie in der Definition von* $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ *bzw.* $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M$ *mit einem* $\tau$*-linearen* $\varphi$ *wie in der Definition von* $\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$*, so schränken sich diese Operationen auf die in i. betrachteten Mengen ein.* $\xi_V$ *ist G-äquivariant und* $\zeta_M$ *vertauscht mit* $\varphi$*; die Abbildungen sind also natürliche Isomorphismen von G-Darstellungen bzw. etalen* $\varphi$*-Moduln.*

*Beweis.*

i. Zur *Existenz* der Darstellungen wählen wir ein Erzeugendensystem $v_1, ..., v_{s+r}$ von $V$ (bzw. $m_1, ..., m_{s+r}$ von $M$) wie in 1.1.9. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s+r} a_i \otimes v_i \in (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^{\varphi=id} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{s+r}(a_i - \tau(a_i)) \otimes v_i = 0 \\ &\overset{1.1.9}{\Leftrightarrow} \quad a_i \begin{cases} = \tau(a_i) \text{ für } i \leqslant s \\ \equiv \tau(a_i) \bmod p^{n_j} \text{ für } i = s+j, 1 \leqslant j \leqslant r \end{cases} \\ &\overset{1.4.2.iii}{\Leftrightarrow} \quad a_i \in \begin{cases} W \text{ für } i \leqslant s \\ W + p^{n_j}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \text{ für } i = s+j, 1 \leqslant j \leqslant r \end{cases}\end{aligned}$$

bzw. analog

$$\sum_{i=1}^{s+r} b_i \otimes m_i \in (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M)^G \Leftrightarrow b_i \in \begin{cases} \mathcal{O}_\mathcal{E} \text{ für } i \leqslant s \\ \mathcal{O}_\mathcal{E} + \pi^{n_j}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \text{ für } i = s+j, 1 \leqslant j \leqslant r \end{cases}$$

Indem wir die Koeffizienten der Torsionsteile durch solche in $W$ ersetzen – die Differenz wird annulliert –, schreibt sich z. B. ein Element $\sum_{i=1}^r a_i \otimes v_i \in (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^{\varphi=id}$ auch als $1 \otimes (\sum_{i=1}^r a_i v_i)$. Die *Eindeutigkeit* folgt aus Lemma 1.1.5.

ii. Die Isomorphie folgt sofort aus i., insbesondere die Injektivität aus der Eindeutigkeitsaussage. Für die Kommutativität der Diagramme sei etwa ein Element aus $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^{\varphi=id}$ gegeben; nach i. können wir es in der Form $1 \otimes v$ mit eindeutigem $v \in V$ schreiben. Dann ist $(id \otimes f)(1 \otimes v) = 1 \otimes f(v)$, wiederum wegen der Eindeutigkeit muß also $f(v) = \xi_{V'}[(id \otimes f)(1 \otimes v)]$ sein. Andererseits ist $f(\xi_V(1 \otimes v)) = f(v)$. Für das zweite Diagramm schließt man analog.

iii. Mit i. und $\varphi(1) = 1 = g(1)$ für alle $g \in G$ sieht man sofort, daß sich die Operationen auf die hier betrachteten Mengen einschränken. Dann ist z. B. $\varphi(\zeta(1 \otimes m)) = \varphi(m) = \zeta(1 \otimes \varphi(m))$.

□

**Satz 1.4.8.** *Für eine G-Darstellung V betrachte die Abbildung*

$$T_V : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \otimes (\sum_{j=1}^m b_j \otimes v_j) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \otimes v_j$$

*Für einen $\varphi$-Modul M über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ betrachte die Abbildung*

$$U_M : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_\mathcal{E}(M) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \otimes (\sum_{j=1}^m b_j \otimes m_j) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \otimes m_j$$

*Dann sind $T$ und $U$ natürliche Abbildungen in dem Sinne, daß für jeden Morphismus von $G$-Darstellungen $f : V \to V'$ das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \arrow[r, "id\otimes\mathcal{D}_\mathcal{E}(f)"] \arrow[d, "T_V"'] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V') \arrow[d, "T_{V'}"] \\
\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \arrow[r, "id\otimes f"] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V'
\end{tikzcd}$$

*bzw. für jeden Morphismus $f : M \to N$ von $\varphi$-Moduln kommutiert*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_\mathcal{E}(M) \arrow[r, "id\otimes\mathcal{V}_\mathcal{E}(f)"] \arrow[d, "U_M"'] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_\mathcal{E}(N) \arrow[d, "U_N"] \\
\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M \arrow[r, "id\otimes f"] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} N
\end{tikzcd}$$

*Beweis.* Etwa für $\sum_{i=1}^n a_i \otimes (\sum_{j=1}^m b_j \otimes v_j) := x \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ ist

$$\begin{aligned}
(T_{V'} \circ (id \otimes \mathcal{D}_\mathcal{E}(f)))(x) &= T_{V'}\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes (\sum_{j=1}^m b_j \otimes f(v_j))\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \otimes f(v_j) \\
&= (id \otimes f)\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \otimes v_j\right) \\
&= (id \otimes f)\left(T_V(\sum_{i=1}^n a_i \otimes (\sum_{j=1}^m b_j \otimes f(v_j))\right) \\
&= ((id \otimes f) \circ T_V)(x)
\end{aligned}$$

Ähnlich simpel ist die Kommutativität des zweiten Diagramms nachzurechnen. □

Wir nähern uns damit der Kategorienäquivalenz. Uns fehlt etwa noch, daß $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ als $\varphi$-Modul *etal* ist und die $G$-Wirkung auf $\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ tatsächlich eine Darstellung definiert, d. h. stetig ist. Von entscheidender Bedeutung sind die beiden folgenden Propositionen:

**Proposition 1.4.9.** *Sei $V$ ein Objekt aus $Rep_W(G_E)$.*

*i. Die in 1.4.8 definierte Abbildung*

$$T_V : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V$$

*ist ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln.*

*ii. Der Funktor $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ ist treu und exakt. $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ ist endlich erzeugter $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Modul.*

*iii. Als $\varphi$-Modul gemäß 1.4.6.ii ist $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ etal.*

**Proposition 1.4.10.** *Sei $M$ ein Objekt aus $\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\tau)}$.*

*i. Die in 1.4.8 definierte Abbildung*

$$U_M : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_\mathcal{E}(M) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M$$

*ist ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln.*

*ii. Mit der in 1.4.6.iv definierten $G$-Wirkung ist $\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ eine $W$-Darstellung von $G$.*

Wir zeigen nun zunächst, wie aus diesen beiden Propositionen unser gewünschtes Theorem folgt. Der Rest des Abschnitts wird dann dem Beweis der Propositionen gewidmet sein.

**Theorem 1.4.11.** *Die Funktoren*

$$\mathcal{D}_\mathcal{E} : Rep_W(G_E) \to \Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\tau)}$$

$$\mathcal{V}_\mathcal{E} : \Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\tau)} \to Rep_W(G_E)$$

*sind quasi-invers zueinander, liefern also eine Äquivalenz der betrachteten Kategorien.*

*Beweis.* Nach 1.4.6 und 1.4.9.iii ist $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \in \mathrm{ob}(\Phi M^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}})$ für $V \in \mathrm{ob}(Rep_W(G_E))$; nach 1.4.10.ii. ist $\mathcal{V}_\mathcal{E}(M) \in \mathrm{ob}(Rep_W(G_E))$ für $M \in \mathrm{ob}(\Phi M^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}})$.
Sei nun $V \in \mathrm{ob}(Rep_W(G_E))$. Wir suchen eine natürliche Transformation $t_*$, so daß für jeden Morphismus von Darstellungen $f : V \to V'$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \arrow[r, "t_V", "\cong"'] \arrow[d, "\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(f))"'] & V \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V')) \arrow[r, "\cong", "t_{V'}"'] & V'
\end{tikzcd}$$

Nach Proposition 1.4.9 haben wir

$$T_V : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \otimes (\sum_{j=1}^m b_j \otimes v_j) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \otimes v_j$$

Auf der linken Seite lassen wir mit Lemma 1.4.6.ii und iv die $\tau$-lineare Abbildung

$$\varphi : \sum_{i=1}^n a_i \otimes (\sum_{j=1}^m b_j \otimes v_j) \mapsto \sum_{i=1}^n \tau(a_i) \otimes (\sum_{j=1}^m \tau(b_j) \otimes v_j)$$

operieren, auf der rechten Seite wie in Lemma 1.4.7.iii

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes v_i \mapsto \sum_{i=1}^{r} \tau(a_i) \otimes v_i$$

Dann ist $T_V \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ T_V$, folglich haben wir für unseren Morphismus $f : V \to V'$ schon ein kommutatives Diagramm von $W$-Moduln

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \arrow[r, "T_{V\,|\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V))}", "\cong"'] \arrow[d, "\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(f))"'] & (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^{\tilde{\varphi}=id} \arrow[d, "id\otimes f"] \\
\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V')) \arrow[r, "\cong", "T_{V'\,|\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V'))}"'] & (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V')^{\tilde{\varphi}=id}
\end{tikzcd}$$

Prüfen wir noch die Struktur als $G$-Darstellung auf beiden Seiten nach, so haben wir für jedes $g \in G$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes (\sum_{j=1}^{m} b_j \otimes v_j) \in \mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V))$:

$$\begin{aligned}
T_V\left(g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes (\sum_{j=1}^{m} b_j \otimes v_j)\right)\right) &= T_V\left(\sum_{i=1}^{n} g(a_i) \otimes (\sum_{j=1}^{m} b_j \otimes v_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(a_i) \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes v_j \\
&\overset{\sum_{j=1}^{m} b_j \otimes v_j \in \mathcal{D}_\mathcal{E}(V)}{=} \sum_{i=1}^{n} g(a_i) \sum_{j=1}^{m} g(b_j) \otimes gv_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(a_i b_j) \otimes gv_j \\
&= g\left(T_V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes (\sum_{j=1}^{m} b_j \otimes v_j)\right)\right)
\end{aligned}$$

Also sind die waagerechten Pfeile im obigen Diagramm $G$-äquivariant; die senkrechten sind dies ohnehin. Mit Lemma 1.4.7.ii. und iii. hängen wir rechts noch ein Diagramm an und erhalten in $Rep_W(G)$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \arrow[r, "T_{V\,|\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V))}", "\cong"'] \arrow[d, "\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(f))"'] & (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V)^{\tilde{\varphi}=id} \arrow[r, "\xi_V", "\cong"'] \arrow[d, "id\otimes f"] & V \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V')) \arrow[r, "\cong", "T_{V'\,|\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V'))}"'] & (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V')^{\tilde{\varphi}=id} \arrow[r, "\cong", "\xi_{V'}"'] & V'
\end{tikzcd}$$

Also ist

$$t_V := \xi_V \circ T_{V\,|\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V))} : \mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \to V$$

der gesuchte natürliche Isomorphismus von $G$-Darstellungen.
Der Beweis für die umgekehrte natürliche Isomorphie $\mathcal{D}_\mathcal{E}(\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)) \cong M$ verläuft ganz analog unter Ausnutzung der vorherigen Analogien. □

Mit Hilfe des Theorems können wir schließlich auch zeigen, daß die Funktoren mit dem Tensorprodukt vertauschen. Alle im folgenden betrachteten Tensorprodukte von Darstellungen bzw. etalen Moduln seien gemäß den Sätzen 1.2.8 und 1.3.7 wieder mit der jeweiligen Struktur in den Kategorien versehen. – Man beachte, daß zwar das folgende Lemma unabhängig vom bisher Bewiesenen ist, der Beweis des Satzes danach aber sehr stark auf der schon etablierten Äquivalenz beruht. Ohne diese zu benutzen, scheint ein Beweis nicht möglich.

**Lemma 1.4.12.** *Für je zwei $G$-Darstellungen $V$, $V'$ bzw. etale $\varphi$-Moduln $M$, $M'$ haben wir natürliche Abbildungen*

$$\delta(V,V') : \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V') \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V \underset{W}{\otimes} V')$$

$$\nu(M,M') : \mathcal{V}_\mathcal{E}(M) \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_\mathcal{E}(M') \to \mathcal{V}_\mathcal{E}(M \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M')$$

*Beweis.* (Nur für $\mathcal{D}_\mathcal{E}$.) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} : \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \times \mathcal{D}_\mathcal{E}(V') &\to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{W}{\otimes} (V \underset{W}{\otimes} V') \\ \Big(\sum_i a_i \otimes v_i, \sum_j b_j \otimes v'_j\Big) &\mapsto \sum_{i,j} a_i b_j \otimes (v_i \otimes v'_j) \end{aligned}$$

ist offenbar $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-bilinear. Indem man nutzt, daß die $g \in G$ auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ als Ringendomorphismen wirken, sieht man auch, daß sie $G$-äquivariant ist. Da aber $G$ auf die linke Seite schon trivial wirkt, liegt ihr Bild in $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V \underset{W}{\otimes} V')$. Dies liefert die Abbildung $\delta(V,V')$.
Diese Abbildungen sind natürlich in dem Sinne, daß für weitere Darstellungen $U$, $U'$ und Morphismen $f : U \to V$, $f' : U' \to V'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_\mathcal{E}(U) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(U') \arrow[r, "\delta(U,U')"] \arrow[d, "\mathcal{D}_\mathcal{E}(f)\otimes\mathcal{D}_\mathcal{E}(f')"'] & \mathcal{D}_\mathcal{E}(U \underset{W}{\otimes} U') \arrow[d, "\mathcal{D}_\mathcal{E}(f\otimes f')"] \\ \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V') \arrow[r, "\delta(V,V')"] & \mathcal{D}_\mathcal{E}(V \underset{W}{\otimes} V') \end{tikzcd}$$

kommutiert, was nicht schwierig zu sehen ist. □

**Satz 1.4.13.** *Die im vorigen Lemma betrachteten natürlichen Abbildungen $\delta$ und $\nu$ sind für alle Paare von Objekten Isomorphismen.*

*Beweis.* Für beliebige $G$-Darstellungen $V$, $V'$ haben wir mit den natürlichen Isomorphismen $t_*$ aus Theorem 1.4.11 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V')) \arrow[r, "\nu(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V),\mathcal{D}_\mathcal{E}(V'))"] \arrow[d, "t_V\otimes t_{V'}"', "\cong"] & \mathcal{V}_\mathcal{E}\left(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V')\right) \arrow[d, "\mathcal{V}_\mathcal{E}(\delta(V,W))"] \\
V \underset{W}{\otimes} V' & \mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V \underset{W}{\otimes} V')) \arrow[l, "\cong", "t_{V\otimes V'}"']
\end{tikzcd}$$

Folglich ist der obere Pfeil injektiv, der rechte surjektiv. Daher ist $\nu(*,*)$ stets injektiv (setze für beliebige Objekte $M$, $N \in \mathrm{ob}(\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_\mathcal{E},\tau)})$: $V = \mathcal{V}_\mathcal{E}(M), V' = \mathcal{V}_\mathcal{E}(N)$); und da $\mathcal{V}_\mathcal{E}$ exakt ist, haben wir auch stets die Surjektivität von $\delta(*,*)$. Mit vertauschten Rollen erhalten wir die Surjektivität von $\nu(*,*)$ und die Injektivität von $\delta(*,*)$. □

Übrigens sieht man auch leicht, daß die Funktoren die „Einsobjekte“ ineinander überführen; d. h. ist beispielsweise $V = W$, oder gleich allgemeiner $W^n$ mit trivialer $G$-Wirkung, so ist $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \cong (\mathcal{O}_\mathcal{E})^n$ mit $\varphi = \bigoplus_1^n \tau$.

### 1.4.2 Beweis der Propositionen

Kommen wir nun zum Beweis der Propositionen 1.4.9 und 1.4.10, die wir in mehreren Schritten durchführen.

**Satz 1.4.14.** *Proposition 1.4.9 gilt, falls die betrachteten Darstellungen von p-Torsion, also endlichdimensionale $\mathbb{F}_q$-Vektorräume sind.*

*Beweis.* In diesem Fall ist

$$\mathcal{D}_\mathcal{E}(V) = (E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V)^G$$

und wir können $T_V$ folgendermaßen schreiben:

$$E^{sep} \underset{E}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \to E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$$

i. OBdA sei $V \neq 0$. Sei $d := \dim_{\mathbb{F}_q} V \in \mathbb{N}$ und $v_1, ..., v_d$ eine Basis von $V$. Dann ist $1 \otimes v_1, ..., 1 \otimes v_d$ eine Basis des $E^{sep}$-Vektorraums $E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$. Bezüglich dieser Basen identifizieren wir $\mathrm{Aut}_W(V) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(V)$ mit $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ und $\mathrm{Aut}_{E^{sep}}(E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V)$ mit $\mathrm{GL}_d(E^{sep})$.
Wir werden nun eine weitere Basis $w_1, ..., w_d$ dieses Vektorraums konstruieren, die aus *von G fixierten Vektoren* besteht, wozu wir eine Verallgemeinerung des als *Hilbert 90* bekannten Satzes in nicht-abelscher Kohomologie benötigen. Wir folgen Definition und Darstellung in [Ser68, Annexe de chap. VII] und [NSW00, chap. I, §2, S. 16f.].
Auf der Menge $\mathrm{GL}_d(E^{sep})$ wird komponentenweise eine $G$-Wirkung definiert, d. h. für $C = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in \mathrm{GL}_d(E^{sep})$ setze

$$g(C) := (gc_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$$

Auf die Komponenten wirkt $G$ dabei als Galoisgruppe, die Axiome einer Wirkung sind einfach nachzurechnen; die Wirkung ist überhaupt wohldefiniert, da die Determinante ein polynomialer Ausdruck in den Einträgen der Matrix und $g$ ein Körperautomorphismus ist, so daß $\det(g(C)) = g\ \det(C) \neq 0$. Die Wirkung ist stetig (im Sinne der Kohomologie proendlicher Gruppen), denn die Fixgruppe einer Matrix ist gleich dem endlichen Schnitt aller Fixgruppen ihrer Einträge, und diese sind offen nach Galoistheorie.
Andererseits liefert uns die $G$-Darstellung einen Gruppenhomomorphismus

$$G \to \mathrm{Aut}_W(V) \simeq \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q) \subset \mathrm{GL}_d(E^{sep})$$

$$g \mapsto A_g$$

wobei $A_g = (a_{ki}(g))_{1 \leqslant k,i \leqslant d}$ durch die Beziehungen

$$gv_i = \sum_{k=1}^{d} a_{ki}(g) \cdot v_k \tag{1.4}$$

gegeben ist.
Diese Abbildung $g \mapsto A_g$ ist ein *stetiger Kozykel* (vgl. etwa [NSW00, chap. I, §2, S. 16f.]), denn:
– Die oben definierte $G$-Wirkung ist auf allen Matrizen mit Einträgen in $E \supseteq \mathbb{F}_q$ trivial. Da die Matrizen $A_g$ definitionsgemäß von dieser Form sind, können wir die Homomorphie durch künstliches Einfügen der Wirkung als $A_{gh} = A_g \cdot g(A_h)$ schreiben, haben also einen Kozykel.
– Da die $G$-Darstellung stetig ist und $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ definitionsgemäß (als Teilmenge eines Torsionsmoduls, vgl. 1.2.1.iv) die diskrete Topologie trägt, ist die Abbildung auch stetig.
Nach [Ser68, chap. X, §1, prop. 3] oder [NSW00, chap. VI, §2, theorem 6.2.3] ist

$$H^1(\mathrm{Gal}(E^{sep} \mid E), \mathrm{GL}_d(E^{sep})) = \{1\}$$

Die Abbildung $[g \mapsto A_g]$ ist also kohomolog zum ausgezeichneten Kozykel $[g \mapsto Id]$, d. h. es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_d(E^{sep})$ mit

$$A_g = B^{-1} \cdot g(B) \text{ für alle } g \in G$$

Sei etwa $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ und $B^{-1} = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$. Wir haben also unter anderem die Gleichungen

$$a_{ki}(g) = \sum_{l=1}^{d} c_{kl} \cdot gb_{li} \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{d} b_{li} \cdot c_{ij} = \delta_{lj} \text{ (Kronecker-Delta)} \tag{1.6}$$

Setze nun $w_j := \sum_{i=1}^{d} c_{ij} \otimes v_i$. Wir behaupten: $w_1, ..., w_d$ ist die gesuchte Basis aus von

$G$ fixierten Vektoren. Sei nämlich $g \in G$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned}
gw_j &= \sum_{i=1}^{d} gc_{ij} \otimes gv_i \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{i=1}^{d} gc_{ij} \otimes \sum_{k=1}^{d} a_{ki}(g)v_k \\
&\overset{a_{ki}(g)\in\mathbb{F}_q}{=} \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} (gc_{ij}) \cdot a_{ki}(g) \otimes v_k \\
&\overset{(1.5)}{=} \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} (gc_{ij}) \cdot c_{kl} \cdot (gb_{li}) \otimes v_k \\
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} \delta_{lj} \cdot c_{kl} \otimes v_k \\
&= \sum_{k=1}^{d} c_{kj} \otimes v_k = w_j
\end{aligned}$$

für alle $1 \leqslant j \leqslant d$. Als Bilder der Basis $1 \otimes v_1, ..., 1 \otimes v_d$ unter $B^{-1} \in \mathrm{GL}_d(E^{sep})$ sind sie auch eine Basis von $E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$.
Nun ist

$$\mathcal{D}_\mathcal{E}(V) = \langle w_1, ..., w_d \rangle_E \subset E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$$

also $d$-dimensional als $E$-Vektorraum, mithin $E^{sep} \underset{E}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ $d$-dimensional als $E^{sep}$-Vektorraum, und für $w_j = \sum_{i=1}^{d} c_{ij} \otimes v_i$ ist

$$T(1 \otimes w_j) = \sum_{i=1}^{d} 1 \cdot c_{ij} \otimes v_i = w_j$$

$T$ ist also surjektiv und damit ein Isomorphismus der $d$-dimensionalen $E^{sep}$-Vektorräume $E^{sep} \underset{E}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ und $E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$.

ii. Dies sind formale Folgerungen aus i.

– $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ ist treu: Sei $f : V \to V'$ ein Morphismus von $G$-Darstellungen; für $V, V'$ gelte i. Da $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ additiv ist, reicht zu zeigen: $\mathcal{D}_\mathcal{E}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) & \xrightarrow[\sim]{T_V} & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \\
{\scriptstyle id\otimes\mathcal{D}_\mathcal{E}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes f} \\
\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V') & \xrightarrow[T_{V'}]{\sim} & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V'
\end{array}$$

mit der Treu-Flachheit von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ über $W$.

– $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ ist exakt: Sei

$$0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$$

eine exakte Sequenz von $G$-Darstellungen, für die i. gilt. Dann ist wegen der Flachheit von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ über $W$ auch

$$0 \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V_1 \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V_2 \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V_3 \to 0$$

exakt, mithin wegen i. und 1.4.8 auch

$$0 \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_1) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_2) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_3) \to 0$$

also, da $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ treu-flach ist, auch

$$0 \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_1) \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_2) \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_3) \to 0$$

– $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ ist endlich erzeugt:[5] Mit [AC, chap. I, §3, no. 6, proposition 11] und 1.4.2.i gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \text{ endl. erz. } \mathcal{O}_\mathcal{E}\text{-Modul} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \text{ endl. erz. } \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}\text{-Modul} \\ &\overset{\text{i.}}{\Leftrightarrow} \quad \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \text{ endl. erz. } \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}\text{-Modul} \\ &\Leftrightarrow \quad V \text{ endl. erz. } W\text{-Modul} \end{aligned}$$

iii. Sei $V$ von $p$-Torsion und wieder oBdA der triviale Fall $V = 0$ ausgeschlossen, also $V$ ein $d$-dimensionaler $\mathbb{F}_q$-Vektorraum mit $d \in \mathbb{N}$. $\varphi$ ist per

$$\varphi\left(\sum_i a_i \otimes v_i\right) := \sum_i \tau(a_i) \otimes v_i$$

auf ganz $E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$ als $\tau$-lineare Abbildung definiert. Sei $v_1, ..., v_d$ eine $\mathbb{F}_q$-Basis von $V$, dann ist $1 \otimes v_1, ..., 1 \otimes v_d$ eine Basis von $E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$ als $E^{sep}$-Vektorraum, bezüglich welcher $\varphi$ von der Einheitsmatrix dargestellt wird.
Sei nun $w_1, ..., w_d$ die im Beweis von i. konstruierte, von $G$ fixierte $E^{sep}$-Basis von $E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$ (die gleichzeitig $E$-Basis von $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ ist); dann erzeugen auch die Bilder $\varphi(w_1), ..., \varphi(w_d)$ den $E^{sep}$-Vektorraum $E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V$, sind insbesondere linear unabhängig über $E^{sep}$, erst recht über $E$. Wegen Lemma 1.4.6.ii liegen sie in $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$, müssen also auch diesen $d$-dimensionalen $E$-Vektorraum erzeugen. Anders gesagt, erzeugt $\mathrm{im}(\varphi)$ $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ als $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Modul. Mit Lemma 1.3.8.i ist also die zugehörige Abbildung $\Phi$ in der gegebenen Situation surjektiv, was nach Satz 1.3.9 bereits die Behauptung zeigt. Die Voraussetzungen für Satz 1.3.9 sind hier für $A = \mathcal{O}_\mathcal{E}$ offensichtlich erfüllt; man beachte $\tau(p) = p$.

[5] Dies wurde hier schon im Beweis von i. gezeigt. Das folgende Argument benutzt aber nur die Gültigkeit von i., worauf wir uns in späteren Beweisen beziehen werden.

$\square$

**Satz 1.4.15.** *Proposition 1.4.9 gilt, falls die betrachteten Darstellungen von endlicher Länge sind.*

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 1.4.16.** *Sei $V$ eine $G$-Darstellung endlicher Länge, und sei $V_p := \{v \in V : pv = 0\}$. Dann ist die Sequenz von $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Moduln*

$$0 \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_p) \xrightarrow{\mathcal{D}_\mathcal{E}(\iota)} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \xrightarrow{\mathcal{D}_\mathcal{E}(pr)} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/V_p) \to 0$$

*exakt, wobei $\iota : V_p \hookrightarrow V$ und $pr : V \twoheadrightarrow V/V_p$ die kanonische Inklusion bzw. Projektion bezeichnen (welche gemäß Satz 1.2.9 tatsächlich Morphismen von Darstellungen sind).*

*Beweis.* Da $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ über $W$ (treu-)flach ist, erhalten wir zunächst die exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln (insbesondere von deren additiven Gruppen)

$$0 \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V_p \xrightarrow{id\otimes\iota} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \xrightarrow{id\otimes pr} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V/V_p \to 0$$

Nach Definition der $G$-Wirkung auf diesen Objekten $(g(\sum_i a_i \otimes v_i) := \sum_i ga_i \otimes gv_i)$ sind die Pfeile $G$-äquivariant. Man beachte, daß die $G$-Wirkungen auf den mit der diskreten Topologie versehenen Objekten stetig im Sinne der Kohomologie proendlicher Gruppen sind: Betrachte ein Element $\sum_{i=1}^r a_i \otimes v_i$ und wähle gemäß Bemerkung 1.4.4 die $a_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$. Die Fixgruppe dieses Elements ist offen, denn sie enthält den endlichen Schnitt der Fixgruppen

$$\bigcap_{i=1}^r G_{a_i} \cap \bigcap_{i=1}^r G_{v_i}$$

als offene Untergruppe. Dabei sind die $G_{a_i} = \mathrm{Gal}(\mathcal{E}_{nr} \mid \mathcal{E}(a_i))$ nach Galoistheorie offen, die $G_{v_i}$ nach Satz 1.2.5 wegen der Stetigkeit der $G$-Wirkung auf dem Torsionsmodul $V$ (bzw. $V_p$ oder $V/V_p$). Kohomologie proendlicher Gruppen liefert die exakte Sequenz (von additiven Gruppen)

$$0 \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_p) \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/V_p) \to H^1(G, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{Zp}{\otimes} V_p)$$

wobei die ersten drei Pfeile offenbar auch $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-linear sind. Wir müssen also nur noch zeigen, daß das letzte Objekt trivial ist.
Man beachte hierzu, daß $V_p$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_q$-Vektorraum und somit

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V_p = E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V_p$$

ist. Wie wir aus dem Beweis von 1.4.14 wissen, ist dies ein *endlichdimensionaler $E^{sep}$-Vektorraum mit einer Basis $w_1, ..., w_d$ aus von $G$ fixierten Vektoren.* Das bedeutet

$$E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} V_p \simeq (E^{sep}, +)^d$$

als $G$-Modul, und die erste Kohomologiegruppe dieses Objekts ist bekanntlich trivial. Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

*Beweis von 1.4.15.*

i. Sei $p^n$ die kleinste $p$-Potenz, die $V$ annulliert. Wir führen eine Induktion nach $n$.

   *Induktionsanfang*: $n = 1$

   Dies war Satz 1.4.14.

   *Induktionsschritt*: Sei $n \geqslant 2$ und die Behauptung bereits für alle $1 \leqslant k \leqslant n-1$ bewiesen. Betrachte wieder die exakte Sequenz von $G$-Darstellungen

$$0 \to V_p \to V \to V/V_p \to 0$$

   wobei $V_p := \{v \in V : pv = 0\}$ offenbar von $p$, $V/V_p$ von $p^{n-1}$ annulliert wird. Da $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ (treu-)flach über $W$ ist, haben wir die Exaktheit der Sequenz von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln

$$0 \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V_p \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} (V/V_p) \to 0$$

   Mit den natürlichen Abbildungen als senkrechten Pfeilen erhalten wir so ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/V_p) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V_p \arrow[r] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V \arrow[r] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} (V/V_p) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   Dabei ist die obere Zeile exakt wegen Lemma 1.4.16 und der Flachheit von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Der linke und der rechte senkrechte Pfeil sind nach Induktionsannahme Isomorphismen, also auch der mittlere.

ii. Die formale Folgerung aus i. funktioniert genauso wie in 1.4.14.

iii. Wir schließen induktiv nach der kleinsten $p$-Potenz, die $V$ annulliert. Der Induktionsanfang ist dann mit 1.4.14.iii erledigt, und im Induktionsschritt betrachten wir noch einmal die exakte Sequenz (und zwar nach 1.4.6.ii und iii. von $\varphi$-Moduln)

$$0 \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V_p) \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \to \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/V_p) \to 0$$

   Die Objekte links und rechts sind nach Induktionsannahme etal. Die Behauptung folgt mit Satz 1.3.9.ii.

□

Kommen wir zum allgemeinen Fall eines endlich erzeugten Moduls. Der Beweis wird die Situation mit Hilfe des folgenden Lemmas auf den schon bewiesenen Torsionsfall zurückführen.

**Lemma 1.4.17.**

i. *Sei $V$ eine $G$-Darstellung.*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V &\to \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V/p^nV) \\ b \otimes v &\mapsto (b \otimes (v + p^nV))_n \end{aligned}$$

*definiert einen G-äquivarianten Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln. Die rechte Seite wird dabei bezüglich der (offenbar surjektiven) Übergangsabbildungen*

$$id \otimes pr^n_m : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V/p^nV \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V/p^mV$$

*definiert und trägt die komponentenweise definierte G-Wirkung. Insbesondere schränkt sich $\alpha$ zu einem Isomorphismus*

$$\alpha_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)} : \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \varprojlim \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV)$$

*ein, wobei die Übergangsabbildungen rechts durch die $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)$ gegeben und ebenfalls surjektiv sind.*

ii. *Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ haben wir Isomorphismen von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-Moduln*

$$\begin{aligned} \gamma_m : \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/(p^m\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)) &\overset{\sim}{\to} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^mV) \\ \sum_i (a_i \otimes v_i) + p^m\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) &\mapsto \sum_i a_i \otimes (v_i + p^mV) \end{aligned}$$

*Bezeichnen wir für $n \geqslant m$ mit*

$$\bar{pr}^n_m : \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/(p^n\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)) \to \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/(p^m\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V))$$

*die Projektion, so gilt außerdem*

$$\gamma_m \circ \bar{pr}^n_m = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m) \circ \gamma_n \tag{1.7}$$

*Anders gesagt: Wir haben kommutative Diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/(p^n\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)) \arrow[r, "\bar{pr}^n_m"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/(p^m\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)) \arrow[d, "\gamma_m"] \\ \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \arrow[r, "\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)"'] & \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^mV) \end{tikzcd}$$

iii.

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) &\to \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV)) \\ a \otimes (\sum_i b_i \otimes v_i) &\mapsto \left(a \otimes \left(\sum_i b_i \otimes (v_i + p^nV)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

*definiert einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln, wobei die Übergangsabbildungen im projektiven Limes durch $id \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)$ gegeben sind.*

*Beweis.*

i. Satz 1.1.15 mit $B = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$, $A = W$ und $M = V$; definitionsgemäß ist die Abbildung $G$-äquivariant. Die von $G$ fixierten Elemente im projektiven Limes sind offenbar genau diejenigen, die komponentenweise fixiert werden.

ii. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Betrachte für alle $n \geqslant m$ die Sequenz

$$0 \to \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(p^m \cdot V/p^nV) = p^m \cdot \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \overset{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(\iota_n)}{\longrightarrow} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \overset{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)}{\longrightarrow} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^mV) \to 0$$

wobei $\iota_n$ und $pr^n_m$ die kanonische Inklusion bzw. Projektion bezeichnen. Wegen der Exaktheit von $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ im Torsionsfall ist sie exakt.
Wir wollen zum projektiven Limes übergehen. Die Pfeile sind offenbar mit den Übergangsabbildungen $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_l)$ verträglich. Da für das projektive System $(p^m \cdot \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV))_{n\in\mathbb{N}}$ das Mittag-Leffler-Kriterium erfüllt ist (vgl. etwa [Lan02, Theorem 10.3]; hierzu reicht, daß alle Übergangsabbildungen surjektiv sind, aber dies ist wiederum wegen der Exaktheit im Torsionsfall gegeben), erhalten wir auch im Limes eine exakte Sequenz, die wir mit der Abbildung $\alpha$ aus i. in das folgende kommutative Diagramm bringen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim_{n\geqslant m} p^m \cdot \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \arrow[r, "\eta"] & \varprojlim_{n\geqslant m} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \arrow[r, "\theta"] & \varprojlim_{n\geqslant m} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^mV) \arrow[r] \arrow[d, dash] & 0 \\
0 \arrow[r] & p^m \cdot \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[u, "\alpha_{|p^m\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)}", "\simeq"'] & \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \arrow[u, "\alpha_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)}", "\simeq"'] & \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^mV) &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\eta := \varprojlim \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(\iota_n)$, $\theta := \varprojlim \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)$, der rechte senkrechte Pfeil ist in allen Komponenten die Identität. Wie man nachrechnet, läßt unten rechts der Pfeil $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr_m)$ (mit $pr_m : V \to V/p^mV$) das Diagramm weiter kommutieren, so daß auch die untere Zeile exakt ist.[6] $\gamma_m$ ist also gerade der nach dem Homomorphiesatz von $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr_m)$ induzierte Isomorphismus. (1.7) ist sofort nachzurechnen.

iii. <u>1. Schritt</u>: $\varprojlim \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \overset{\alpha^{-1}}{\simeq} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)$ ist endlich erzeugt.

Wir wollen Satz 1.1.8.ii auf $A = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $k = E$ und $M = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)$ anwenden. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ist vollständig. Nach Teil ii. gilt insbesondere $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/(p\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)) \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/pV)$. Da $V/pV$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_q$-Vektorraum ist, wissen wir aus dem $p$-Torsionsfall bereits, daß $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/pV)$ ein endlichdimensionaler $E$-Vektorraum ist. Schließlich gilt auch

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} V) = \{0\}$$

<u>2. Schritt</u>:
Nach dem ersten Schritt können wir Lemma 1.1.15 auf $A = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $B = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ und $M = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)$ anwenden und erhalten den Isomorphismus

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \quad &\to \quad \varprojlim (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} (\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/p^n\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V))) \\
a \otimes (\sum_i b_i \otimes v_i) \quad &\mapsto \quad \left(a \otimes \left(\left(\sum_i b_i \otimes v_i\right) + p^n\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

[6] Damit haben wir die Surjektivität von $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr_m)$ explizit nachgerechnet, während wir die allgemeine Exaktheit von $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ noch beweisen wollen.

mit Übergangsabbildungen $id \otimes \bar{pr}^n_m$ wie in Teil ii.
In der $n$-ten Komponenten haben wir vermöge ii. den Isomorphismus

$$id \otimes \gamma_n : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} (\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)/p^n\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/p^nV)$$

$$a \otimes \left(\left(\sum_i b_i \otimes v_i\right) + p^n\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)\right) \mapsto a \otimes \left(\sum_i b_i \otimes (v_i + p^nV)\right)$$

der wegen (1.7) einen Isomorphismus

$$\varprojlim (id \otimes \gamma_n) : \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} (\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)/p^n\mathcal{D}_\mathcal{E}(V))) \to \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/p^nV))$$

$$\left(a \otimes \left(\left(\sum_i b_i \otimes v_i\right) + p^n\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(a \otimes \left(\sum_i b_i \otimes (v_i + p^nV)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

liefert, wobei die Übergangsabbildungen rechts $id \otimes \mathcal{D}_\mathcal{E}(pr^n_m)$ sind. Nun ist $\beta = (\varprojlim (id \otimes \gamma_n)) \circ \tilde{\beta}$ und die Behauptung bewiesen.

□

**Satz 1.4.18.** *Proposition 1.4.9 gilt allgemein.*

*Beweis.*

i. Aus Satz 1.4.15 wissen wir, daß

$$\begin{aligned} T_n : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/p^nV) \quad &\to \quad \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{W}{\otimes} V/p^nV \\ a \otimes \left(\sum_i b_i \otimes w_i + p^nV\right) \quad &\mapsto \quad a \cdot \sum_i b_i \otimes (w_i + p^nV) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ Isomorphismen von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$-Moduln sind. Damit ist aber – da die $T_n$ natürliche Abbildungen sind und wegen der Funktorialität des projektiven Limes – auch

$$\varprojlim T_n : \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/p^nV)) \to \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{W}{\otimes} V/p^nV)$$

ein $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$-Modulisomorphismus. Wir schreiben nun $T$ als Kompositum

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \xrightarrow{\beta} \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V/p^nV))$$

$$\xrightarrow{\varprojlim T_n} \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{W}{\otimes} V/p^nV) \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{W}{\otimes} V$$

Dabei sind $\alpha$ und $\beta$ die Isomorphismen aus Lemma 1.4.17.

ii. Formale Folgerung aus i. wie zuvor.

iii. Nach dem bereits bewiesenen Torsionsfall wissen wir, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\Phi_n := \Phi_{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV)} : (\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \to \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV)$$

$$a \otimes \left( \sum_i b_i \otimes (v_i + p^nV) \right) \mapsto \sum_i a\, \tau(b_i) \otimes (v_i + p^nV)$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-(Links-)Moduln ist. Mit den Übergangsabbildungen

$$id \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m) : (\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \to (\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^mV)$$

haben wir ein projektives System von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-Moduln, und für $n \geqslant m$ sind die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \arrow[r, "id\otimes\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)"] \arrow[d, "\Phi_n"'] & (\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^mV) \arrow[d, "\Phi_m"] \\
\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \arrow[r, "\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)"] & \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^mV)
\end{tikzcd}$$

kommutativ, so daß wir einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-Moduln

$$\lim \Phi_n : \varprojlim_{id\otimes\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)} [(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV)] \to \varprojlim_{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV)$$

erhalten. Bezeichne $\bar{pr}^n_m : \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/p^n\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/p^m\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)$ die Projektion, $\gamma_n$ die Isomorphismen aus 1.4.17.ii und $\alpha_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)}$ den Isomorphismus aus 1.4.17.i, dann können wir folgende Kette von Isomorphismen von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-Moduln aufstellen:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \quad & \overset{1.1.16}{\simeq} \quad \varprojlim_{id\otimes\bar{pr}^n_m} [(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} (\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)/p^n\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V))] \\
& \overset{\lim(id\otimes\gamma_n)}{\simeq} \quad \varprojlim_{id\otimes\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)} [(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})_\tau \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV)] \\
& \overset{\lim \Phi_n}{\simeq} \quad \varprojlim_{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V/p^nV) \\
& \overset{\alpha^{-1}_{|\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)}}{\simeq} \quad \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)
\end{aligned}$$

wobei wir rechts zur Verdeutlichung die Übergangsabbildungen der projektiven Limiten notiert haben. Nun rechnet man sofort nach, daß die obige Hintereinanderschaltung ein Element $a \otimes (\sum_i b_i \otimes v_i)$ auf $a\,(\sum_i \tau(b_i) \otimes v_i) = a \cdot \varphi_{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)}(\sum_i b_i \otimes v_i)$ abbildet, also nichts anderes als $\Phi_{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)}$ ist, dessen Bijektivität zu zeigen war.

$\square$

**Satz 1.4.19.** *Proposition 1.4.10 gilt, falls $M$ von $p$-Torsion, also ein endlichdimensionaler $E$-Vektorraum ist.*

*Beweis.*

In diesem Fall ist

$$\mathcal{V}_\mathcal{E}(M) = (E^{sep} \underset{E}{\otimes} M)^{\varphi=id}$$

und wir können $U_M$ folgendermaßen schreiben:

$$E^{sep} \underset{\mathbb{F}_q}{\otimes} \mathcal{V}_\mathcal{E}(M) \to E^{sep} \underset{E}{\otimes} M$$

Elementarer als der in [Fon90, 1.2.6] skizzierte Beweis ist derjenige von [Schn07, Satz 2.1.], den wir auf die vorliegende Situation mit $K = E^{sep}, V = E^{sep} \underset{E}{\otimes} M$ (also $d := \dim_K V = \dim_E M < \infty$) und $f = \tau \otimes \varphi$ (also $V_1 = \mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$) anwenden. Zu überprüfen bleibt, ob $f$ etal ist im Sinne von [Schn07]. Nach Lemma 1.3.8 ist dies äquivalent dazu, daß $\mathrm{im}(f)$ $V$ als $K$-Vektorraum erzeugt. Da $\varphi$ etal ist, erzeugt nach 1.3.8.i jedenfalls das Bild von $\varphi$ ganz $M$ als $E$-Vektorraum, d. h. es gibt $m_1, ..., m_d \in M$ derart, daß $\varphi(m_1), ..., \varphi(m_d)$ eine $E$-Basis von $M$ sind. Dann sind aber $f(1 \otimes m_1) = 1 \otimes \varphi(m_1), ..., f(1 \otimes m_d) = 1 \otimes \varphi(m_d)$ eine $K$-Basis von $V$ und die Behauptung folgt. Auch hierfür verwenden wir nur i. Analog zum Beweis von 1.4.14.ii sieht man mit [AC, chap. I, §3, no. 6, proposition 11], daß $\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ als $W$-Modul endlich erzeugt ist. Die in 1.4.6.iv definierte $G$-Wirkung ergibt einen Homomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_W(\mathcal{V}_\mathcal{E}(M))$$

$$g \mapsto \rho(g) := [\sum_i a_i \otimes m_i \mapsto \sum_i g a_i \otimes m_i]$$

Da nun $\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ endlich erzeugt ist, können wir für die noch zu zeigende Stetigkeit von $\rho$ Satz 1.2.5 (Teil ii. und iii.) nutzen.
Seien beliebige $n \in \mathbb{N}$ , $g \in G$ und $v := \sum_{i=1}^r a_i \otimes m_i \in \mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ gegeben. Gemäß Bemerkung 1.4.4 ist sind oBdA alle $a_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$. Nach Galoistheorie ist

$$H := \mathrm{Gal}(\mathcal{E}_{nr} \mid \mathcal{E}(a_1, ..., a_r))$$

eine offene Untergruppe von $G$; nach Konstruktion fixiert sie $v$, ist also in der Fixgruppe $G_v$ enthalten, die folglich offen ist. Mit Satz 1.2.5.ii und iii folgt die Behauptung.

□

**Satz 1.4.20.** *Proposition 1.4.10 gilt, falls $M$ von endlicher Länge ist.*

Zum Beweis benötigen wir erneut ein Lemma:

**Lemma 1.4.21.** *Sei $M$ ein etaler $\varphi$-Modul über $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ von endlicher Länge und $M_p := \{m \in M : pm = 0\}$. Dann ist die Sequenz von $W$-Moduln*

$$0 \to \mathcal{V}_\mathcal{E}(M_p) \xrightarrow{\mathcal{V}_\mathcal{E}(\iota)} \mathcal{V}_\mathcal{E}(M) \xrightarrow{\mathcal{V}_\mathcal{E}(pr)} \mathcal{V}_\mathcal{E}(M/M_p) \to 0$$

*exakt, wobei $\iota : M_p \hookrightarrow M$ und $pr : M \twoheadrightarrow M/M_p$ die kanonische Inklusion bzw. Projektion bezeichnen (welche gemäß 1.3.10 tatsächlich Morphismen etaler $\varphi$-Moduln sind).*

ii. *Beweis.* Da $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ flach über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ist, haben wir zunächst die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_p \xrightarrow{id \otimes \iota} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M \xrightarrow{id \otimes pr} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M/M_p \to 0$$

von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln, auf denen die $\tau$-lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \sum_i a_i \otimes m_i \mapsto \tau(a_i) \otimes \varphi(m_i)$$

operiert; offenbar vertauscht $\tilde{\varphi}$ mit den Abbildungen, dies ist also eine exakte Sequenz von $\tilde{\varphi}$-Moduln über $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$.
Wir wenden Satz 1.3.11 an, erhalten die exakte Sequenz additiver Gruppen

$$0 \to \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M_p) \xrightarrow{\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(\iota)} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) \xrightarrow{\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(pr)} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M/M_p) \to (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_p)/(\tilde{\varphi} - id)(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_p)$$

und bemerken, daß die ersten beiden Pfeile offenbar $W$-linear (statt nur additiv) sind. Zu zeigen ist $(\tilde{\varphi} - id)(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_p) = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_p$.
Über $M_p$ wissen wir aus dem Beweis von 1.4.19: $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_p = E^{sep} \underset{E}{\otimes} M_p$ ist ein endlichdimensionaler $E^{sep}$-Vektorraum, der eine Basis $w_1, ..., w_d$ besitzt, welche von $\tilde{\varphi}$ fixiert wird. Es reicht nun zu zeigen, daß für $1 \leqslant i \leqslant d$ und beliebiges $a \in E^{sep}$ der Vektor $aw_i$ in

$$(\tilde{\varphi} - id)(E^{sep} \underset{E}{\otimes} M_p)$$

liegt. Sei dazu $c \in E^{sep}$ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^q - X - a \in E^{sep}[X]$$

welches als formale Ableitung $-1$ hat, folglich separabel ist und eine solche Nullstelle in $E^{sep}$ besitzt. Dann ist

$$(\tilde{\varphi} - id)(cw_i) = c^q w_i - cw_i = aw_i$$

wie gewünscht. □

*Beweis von 1.4.20.*

i. Sei oBdA der triviale Fall $M = 0$ ausgeschlossen und $p^n$ die kleinste $p$-Potenz, die $M$ annulliert. Wir führen den Beweis mit Induktion nach $n$.

   *Induktionsanfang*: $n = 1$

   Dies war Satz 1.4.19.

   *Induktionsschritt*: Sei $n \geqslant 2$ und die Behauptung bereits für alle $1 \leqslant k \leqslant n-1$ bewiesen.

   Betrachte wie im vorigen Lemma die exakte Sequenz von etalen $\varphi$-Moduln

   $$0 \to M_p \to M \to M/M_p \to 0$$

   Da $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ (treu-)flach über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ist, haben wir damit auch eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln

   $$0 \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_p \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} (M/M_p) \to 0$$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M_p) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M/M_p) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M_p & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} (M/M_p) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Dabei ist die obere Zeile exakt wegen Lemma 1.4.21 und der Flachheit von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ über $W$. Der linke und der rechte senkrechte Pfeil sind nach Induktionsannahme Isomorphismen, denn $M_p$ ist von $p$-Torsion und $M/M_p$ von $p^{n-1}$-Torsion. Also ist auch der mittlere ein Isomorphismus.

ii. Formale Folgerung aus i. wie zuvor.

□

Der Beweis für den allgemeinen Fall verläuft nun ganz analog zu dem von 1.4.17 und 1.4.18.

**Lemma 1.4.22.**

*i. Sei $M$ ein etaler $\varphi$-Modul über $(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \tau)$.*

$$\begin{array}{rcl}
\alpha : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M & \rightarrow & \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M/p^n M) \\
b \otimes m & \mapsto & (b \otimes (m + p^n M))_n
\end{array}$$

*definiert einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln. Die rechte Seite wird dabei bezüglich der (offenbar surjektiven) Übergangsabbildungen*

$$id \otimes pr^n_k : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M/p^n M \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M/p^k M$$

*definiert. Es gilt $\alpha \circ (\tau \otimes \varphi) = \varprojlim(id \otimes \varphi_n)$, wobei natürlich $\varphi_n : M/p^n M \to M/p^n M$ durch $\varphi(m + p^n M) = \varphi(m) + p^n M$ gegeben ist und sich mit den Übergangsabbildungen verträgt. (Man mag dazu neigen, die Abbildungen $\tau \otimes \varphi$ und $\varprojlim(id \otimes \varphi_n)$ formal unsauber einfach auch $\varphi$ zu nennen.) Insbesondere schränkt sich $\alpha$ zu einem Isomorphismus*

$$\alpha_{|\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)} : \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) \to \varprojlim \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M/p^n M)$$

*ein, wobei die Übergangsabbildungen rechts durch die $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(pr^n_m)$ gegeben und ebenfalls surjektiv sind.*

*ii. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ haben wir Isomorphismen von $W$-Moduln*

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_k : \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)/(p^k \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M/p^m M) \\
\sum_i (a_i \otimes m_i) + p^m \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) & \mapsto & \sum_i a_i \otimes (m_i + p^m M)
\end{array}$$

*Bezeichnen wir für $k \leqslant n$ mit*

$$\bar{pr}^n_k : \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)/(p^n \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)) \to \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)/(p^k \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M))$$

*und der bereits benutzen*

$$pr_k^n : M/p^nM \to M/p^kM$$

*die kanonischen Projektionen, so gilt außerdem*

$$\gamma_k \circ \bar{pr}_k^n = \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(pr_k^n) \circ \gamma_n$$

*iii.*

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) & \to & \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M/p^nM)) \\ a \otimes \left(\sum_i b_i \otimes m_i\right) & \mapsto & \left(a \otimes \left(\sum_i b_i \otimes (m_i + p^nM)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

*definiert einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln, wobei die Übergangsabbildungen im projektiven Limes durch $id \otimes \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(pr_k^n)$ gegeben sind.*

*Beweis.* Völlig analog zu 1.4.17. □

**Satz 1.4.23.** *Proposition 1.4.10 gilt allgemein.*

*Beweis.*

i. Gemäß 1.4.20 sind

$$\begin{array}{rcl} U_n : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M/p^nM) & \to & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M/p^nM \\ a \otimes (\sum_i b_i \otimes m_i + p^nM) & \mapsto & a \sum_i b_i \otimes (m_i + p^nM) \end{array}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ Isomorphismen von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Moduln. Da die $U_n$ natürliche Abbildungen sind, läßt sich

$$\varprojlim U_n : \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M/p^nM)) \to \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M/p^nM)$$

bilden und ist ein $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Modulisomorphismus. $U$ ist nichts anderes als das Kompositum

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) \xrightarrow{\beta} \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M/p^nM))$$

$$\xrightarrow{\varprojlim U_n} \varprojlim(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M/p^nM) \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}{\otimes} M$$

wobei $\alpha$ und $\beta$ die Isomorphismen aus 1.4.22 sind.

ii. Formale Folgerung aus i. wie zuvor.

□

Zum Abschluß bemerken wir, daß sich aus Theorem 1.4.11 leicht ein analoges Theorem für $L$-Darstellungen von $G$ ergibt, wobei $L := \mathrm{Quot}(W)$ die unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ vom Grad $r$ ist. Sei nämlich $V \in \mathrm{ob}(Rep_L(G))$ gegeben, $d = \dim_L V$. Nach Satz 1.2.11.ii gibt es ein $G$-invariantes Gitter $U \subset V$, so daß $V \cong L \underset{W}{\otimes} U$ als Darstellung. $U$ ist freier $W$-Modul vom Rang $d$. Setzen wir analog zu 1.4.3

$$\mathcal{D}_\mathcal{E}(V) := (\widehat{\mathcal{E}_{nr}} \underset{L}{\otimes} V)^G$$

so schließen wir

$$\mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \cong (\widehat{\mathcal{E}_{nr}} \underset{L}{\otimes} (L \underset{W}{\otimes} U))^G = ((\widehat{\mathcal{E}_{nr}} \underset{L}{\otimes} L) \underset{W}{\otimes} U)^G \cong (\widehat{\mathcal{E}_{nr}} \underset{W}{\otimes} U)^G$$

Nun gibt es zu jedem $\sum_i e_i \otimes v_i \in \widehat{\mathcal{E}_{nr}} \underset{W}{\otimes} U$ ein minimales $n \in \mathbb{N}_0$ , so daß

$$\sum_i e_i \otimes v_i = p^{-n} \sum_i a_i \otimes v_i$$

mit $\sum_i a_i \otimes v_i \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{W}{\otimes} U$, und da $p^{-n}$ von allen $g \in G$ fixiert wird, gilt

$$\sum_i e_i \otimes v_i \in \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) \Leftrightarrow \sum_i a_i \otimes v_i \in \mathcal{D}_\mathcal{E}(U)$$

$\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ ist also nichts anderes als $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} p^{-n}\mathcal{D}_\mathcal{E}(U) \subset \widehat{\mathcal{E}_{nr}} \underset{W}{\otimes} V$, was wir auch durch die Isomorphie

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_\mathcal{E}(V) & \cong & \mathcal{E} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{D}_\mathcal{E}(U) \\ p^{-n}\sum_i a_i \otimes v_i & \mapsto & p^{-n} \otimes \left(\sum_i a_i \otimes v_i\right) \end{array}$$

ausdrücken können. Eine analog zu 1.4.6.ii auf $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ definierte $\tau$-lineare Abbildung $\varphi_{\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)}$ operiert auf dem letzten Objekt per

$$\sum_i e_i \otimes d_i \mapsto \sum_i \tau(e_i) \otimes \varphi_{\mathcal{D}_\mathcal{E}(U)}(d_i)$$

$\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ ist also ein $d$-dimensionaler $\mathcal{E}$-Vektorraum und enthält mit $\mathcal{D}_\mathcal{E}(U)$ ein Gitter, welches unter $\varphi_{\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)}$ stabil und, wie wir gezeigt haben, ein etaler $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Modul ist. Wie man sich mittels Lemma 1.3.8.i und Satz 1.3.9.i überlegt, ist damit auch $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ als $\mathcal{E}$-Modul etal.

Diese Objekte – etale $(\mathcal{E},\tau)$-Moduln mit unter $\varphi$ stabilem und als $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Modul etalem Gitter – bilden eine abelsche Kategorie $\Phi M^0_{(\mathcal{E},\tau)}$.

Umgekehrt können wir jedem etalen $\mathcal{E}$-Modul $N$, der ein unter $\varphi$ stabiles und als $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-Modul etales Gitter $M$ enthält – woraus $N \cong \mathcal{E} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M$ folgt – das Objekt

$$\mathcal{V}_\mathcal{E}(N) := (\widehat{\mathcal{E}_{nr}} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} N)^{\varphi=id} \cong (\widehat{\mathcal{E}_{nr}} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} (\mathcal{E} \underset{\mathcal{O}_\mathcal{E}}{\otimes} M))^{\varphi=id}$$

zuordnen. Wie oben erhält man $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(N) \cong L \underset{W}{\otimes} \mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)$. $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(N)$ ist mit der schon üblichen $G$-Wirkung tatsächlich eine Darstellung von $G$ auf einem endlichdimensionalen $L$-Vektorraum. Man kann nun weiterrechnen, daß die Zuordnungen funktoriell und quasi-invers zueinander sind, und erhält eine Äquivalenz

$$Rep_L(G_E) \sim \Phi M^0_{(\mathcal{E},\tau)}$$

bzw. im Spezialfall $r = 1$

$$Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_E) \sim \Phi M^0_{(\mathcal{E},\sigma)}$$

# 2 Konstruktion von $E(K)$

Wir haben einen lokalen Körper $K$ der Charakteristik 0 gegeben und möchten die Ergebnisse des ersten Kapitels benutzen, um Darstellungen von dessen absoluter Galoisgruppe $G$ zu klassifizieren. Mittels der von Fontaine und Wintenberger entwickelten Theorie der *Normenkörper* konstruieren wir hierzu einen lokalen Körper $E$ der Charakteristik $p$ mit separablem Abschluß $E^{sep}$, auf dem $G$ operiert. Diese Operation ist so gemacht, daß sich $\mathrm{Gal}(E^{sep}|E)$ wenigstens mit einer sehr großen Untergruppe $H$ von $G$ identifiziert. Zusätzliche Information wird gewissermaßen in der Wirkung von $G/H$ auf $E$ aufbewahrt. Dabei ist $H$ ein abgeschlossener Normalteiler, entspricht also einer Galoiserweiterung von $K$, und die Faktorgruppe $\Gamma = G/H$ identifiziert sich algebraisch und topologisch mit einer Untergruppe von $\mathbb{Z}_p^\times$ (Konstruktion nach Cherbonnier und Colmez, siehe [CC98] und [CC99]) oder sogar (für $p \neq 2$) mit $(\mathbb{Z}_p, +)$ (Konstruktion nach Fontaine, siehe [Fon90]). Schließlich läßt sich zumindest in Spezialfällen die Wirkung von $\Gamma$ auf $E$ sehr explizit beschreiben.

Es sei gleich bemerkt, daß die Konstruktion so weit allein über die Normenkörper möglich wäre. Tatsächlich läßt sich alles eben Gesagte mit einem Verweis auf die wenigen Zeilen von [Win83, 3.2.3 und 3.2.4] „beweisen“. Es ist aber zweckmäßig, nicht die abstrakten Normenkörper zu betrachten, sondern sich alles in einen großen Körper $FrR$ eingebettet vorzustellen. Dieser trägt eine sehr einfach definierte $G$-Wirkung, welche auf den kleineren Körpern die „richtige“ induziert. Allerdings lassen sich diese nicht leicht explizit als Teilkörper beschreiben; klarer „sieht“ man dagegen die Vervollständigungen von deren perfekten Hüllen in $FrR$. Fontaine hatte zunächst (siehe etwa [Fon83]) mit den größeren Körpern gearbeitet. Alle wesentliche Information ist aber, wie gesagt, bereits in den kleineren Normenkörpern enthalten. Diese sind zwar nicht mehr perfekt, dafür aber lokale Körper, welche sich nach Bestimmung eines uniformisierenden Elements mit einem Laurentreihenkörper $k((T))$ identifizieren und gewissermaßen analytische Methoden erlauben. (Ein schwerwiegendes Problem beim Verzicht auf $FrR$ tritt allerdings erst später auf, vgl. Bemerkung 3.2.16.)

## 2.1 Vorbereitungen

Sei $(K, |\cdot|_K)$ ein vollständiger, nichtarchimedisch bewerteter Körper,
$A = \{x \in K : |x|_K \leqslant 1\}$ sein Ganzheitsring,
$\mathfrak{m} = \{x \in K : |x|_K < 1\}$ dessen maximales Ideal.

Die Menge $1 + \mathfrak{m}$ ist eine topologisch abgeschlossene Untergruppe von $A^\times$.
Sei nun das Element $p \in A$ im maximalen Ideal. Es treten zwei Fälle auf:
$char(K) = p$. Dann ist $\mathbb{F}_p \subset K$, und auf $\mathbb{F}_p$ ist der Betrag trivial; oder
$char(K) = 0$. Dann ist $\mathbb{Z}_p \subset K$ und ohne Einschränkung der Betrag so normiert, daß er den $p$-adischen fortsetzt. Wir definieren für $x \in \mathbb{Z}_p$, $i \in \mathbb{N}_0$ den Binomialkoeffizienten

$$\binom{x}{i} := \frac{x(x-1)...(x-i+1)}{i!}$$

Dies ist ein Element von $\mathbb{Z}_p$ und somit in Charakteristik 0 auch von $K$. Hat $K$ Charakteristik $p$, so identifizieren wir es mit seiner Restklasse in $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p \subseteq K$. In beiden Fällen haben wir:

**Satz 2.1.1.** *Sei in obiger Situation $y \in 1 + \mathfrak{m}$ gegeben, $y = 1 + m$ mit $m \in \mathfrak{m}$, und $a \in \mathbb{Z}_p$.*

*i. Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{a}{i} m^i$ konvergiert; ihr Grenzwert liegt wieder in $1 + \mathfrak{m}$ und werde mit $y^a$ bezeichnet.*

*ii. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{Z}$, die $p$-adisch gegen $a$ konvergiert. (Die Folge kann stets in $\mathbb{N}$ gewählt werden.) Dann konvergiert die Folge $y^{a_n}$ in $K$ gegen den oben definierten Ausdruck $y^a$.*

*iii. Es gelten die üblichen Potenzgesetze $(xy)^a = x^a y^a$, $x^{a+b} = x^a x^b$, $x^{ab} = (x^a)^b$. Ist $char(K) = p$ und $1 \neq x \in 1 + \mathfrak{m}$, so gilt $x^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$.*

*Beweis.*

i. ist ein Standardergebnis ultrametrischer Analysis, da in beiden Fällen die Binomialkoeffizienten Betrag $\leqslant 1$ haben und $m^i \to 0$ gilt.

ii. Man beachte zunächst, daß in $\mathbb{Z}_p$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{a_n}{i} = \binom{a}{i}$$

gilt, denn die Binomialkoeffizienten sind polynomiale Ausdrücke. Sei $\epsilon > 0$ gegeben; wähle $i_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\left|m^{i_0}\right|_K < \epsilon$ ($\Rightarrow \left|m^i\right|_K < \epsilon$ für alle $i \geqslant i_0$), und weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $i < i_0$ bezüglich des $p$-adischen Betrags gilt:

$$\text{für alle } n \geqslant n_0 : \left|\binom{a}{i} - \binom{a_n}{i}\right| < \begin{cases} \epsilon \text{ falls } char(K) = 0 \\ p^{-1} \text{ falls } char(K) = p \end{cases}$$

(Im zweiten Fall ist also bereits $\left|\binom{a_n}{i} - \binom{a}{i}\right|_K = 0 < \epsilon$.)
Dann ist für $n \geqslant n_0$

$$\max_{i<i_0} \left( \underbrace{\left|\binom{a}{i} - \binom{a_n}{i}\right|_K}_{<\epsilon} \underbrace{\left|m^i\right|_K}_{\leqslant 1} \right) < \epsilon$$

und

$$\sup_{i\geqslant i_0} \left( \underbrace{\left|\binom{a}{i} - \binom{a_n}{i}\right|_K}_{\leqslant 1} \underbrace{\left|m^i\right|_K}_{<\epsilon} \right) < \epsilon$$

Auch der zweite Ausdruck ist wegen der strengen Dreiecksungleichung und $m^i \to 0$ ein Maximum, und eine weitere Anwendung der strengen Dreiecksungleichung liefert

$$|y^a - y^{a_n}|_K < \epsilon$$

iii. Die Potenzgesetze folgen aus deren Gültigkeit für natürliche Potenzen und den Grenzwertsätzen. Für $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ gibt es $n \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{Z}_p$ mit $ab = p^n$, also

$$x^a = 1 \Rightarrow x^{ab} = 1^b = 1 \Rightarrow x^{p^n} = 1$$

In Charakteristik $p$ ist aber 1 die einzige $p^n$-te Einheitswurzel.

□

In den nächsten Abschnitten betrachten wir zudem Spezialfälle folgender Situation:
Sei $E$ ein Körper der Charakteristik 0, $\bar{E}$ ein algebraischer Abschluß und

$$E = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_n \subseteq ...$$

eine Folge von jeweils endlichen Körpererweiterungen in $\bar{E}$. $E_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ ist der kleinste Körper, der alle $E_n$ enthält. Sei $F|E$ eine weitere endliche Körpererweiterung in $\bar{E}$. Wir setzen $F_n := F.E_n$ für $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Klar ist:

$F_{n+1} = F_n.E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$;
$F_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Darüber hinaus haben wir:

**Satz 2.1.2.**

*i.* *Es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}_0$, so daß $[F_n : E_n] = [F_{N_1} : E_{N_1}]$ für alle $N_1 \leqslant n \leqslant \infty$ gilt.*

*ii.* *Ist $F_\infty|E_\infty$ galoissch, dann gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}_0$, so daß $F_n|E_n$ für alle $n \geqslant N_2$ galoissch ist.*

*iii.* *Es existiere ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $F \cap E_\infty = E_m$; zudem sei $E_n|E_m$ galoissch für ein $n \geqslant N_1$ (aus Teil i). Dann gilt $[F_\infty : E_\infty] = [F : F \cap E_\infty]$.*

*Beweis.*

i. Nach dem Satz vom primitiven Element existiert ein $a \in \bar{E}$ mit $F = E(a)$. Es folgt $F_n = E_n(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Sei $f = \mathrm{Min}(a, E_\infty, X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0 \in E_\infty[X]$ mit $d \geqslant 1$. Wegen $E_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ ist $N_1 := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \{a_0, ..., a_{d-1}\} \subset E_n\}$ in $\mathbb{N}_0$. Für $N_1 \leqslant n \leqslant \infty$ ist dann $f \in E_n[X]$, hat $a$ als Nullstelle und ist irreduzibel, denn jede echte Zerlegung in $E_n[X]$ wäre erst recht eine in $E_\infty[X]$. Für diese $n$ ist folglich $[F_n : E_n] = d$ wie behauptet.

ii. Sei also $F_\infty|E_\infty$ zusätzlich normal. Dann hat obiges $f$ in $F_\infty$ genau $d$ unterschiedliche Nullstellen $a = x_1, ..., x_d$. Wegen $F_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ist

$$N_2 := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \{x_1, ..., x_d\} \subset F_n\}$$

in $\mathbb{N}_0$; offenbar gilt $N_2 \geqslant N_1$, und für $N_2 \leqslant n \leqslant \infty$ ist $F_n$ der Zerfällungskörper von $f$ über $E_n$, also galoissch.

iii. Nach i. reicht zu zeigen: $[F_n : E_n] = [F : F \cap E_\infty]$.
Nach Galoistheorie ist $[F_n : F_m] = [E_n : E_n \cap F_m]$, und nach den Voraussetzungen ist erstens $E_m \subseteq F \Rightarrow F_m = F$ und zweitens

$$E_m \subseteq E_n \cap F \subseteq E_\infty \cap F = E_m \Rightarrow E_n \cap F_m = E_m$$

Es folgt

$$[F_n : E_n] = \frac{[F_n : E_m]}{[E_n : E_m]} = \frac{[F_n : E_m]}{[F_n : F_m]} = [F_m : E_m] = [F : F \cap E_\infty]$$

Das Diagramm veranschaulicht die Situation:

$$\begin{tikzcd}
 & F_n \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "gal."] & & \\
E_n \arrow[dr, dash, "gal."'] & & F_m \arrow[r, equal] \arrow[dl, dash] & F \\
 & E_n \cap F_m \arrow[d, equal] & & \\
 & E_m = F \cap E_\infty & &
\end{tikzcd}$$

□

## 2.2 Der Körper $FrR$ und das Element $\epsilon$

Für die Konstruktion gehen wir zunächst von einem *absolut unverzweigten* Körper aus. Sei also $k$ ein perfekter Körper der Charakteristik $p$, $W := W(k)$ der zugehörige Ring der Wittvektoren, $K_0$ dessen Quotientenkörper. Durch geeignete Normierung der Bewertung stellen wir uns $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ mit dem üblichen $p$-adischen Betrag (d. h. $v_W(p) = 1$ bzw. $|p|_p = p^{-1}$) stets als Teilkörper von $(K_0, |\cdot|_p)$ vor. Sei $(\overline{K}, |\cdot|_{\overline{K}})$ ein fixierter algebraischer Abschluß von $K_0$ versehen mit der eindeutigen Betragsfortsetzung (vgl. [Schi84, Theorem 16.2]), und $(C, |\cdot|_C)$ dessen Vervollständigung, ebenfalls mit eindeutiger Betragsfortsetzung. Gelegentlich benutzen wir an Stelle des Betrags $|\cdot|_C$ die zugehörige (nicht diskrete) Bewertung $v_C := -log_p \circ |\cdot|_C$. Die zugehörigen Ganzheitsringe bezeichnen wir mit
$\mathcal{O}_{\overline{K}} := \{x \in \overline{K} \mid v_{\overline{K}}(x) \geqslant 0\}$ und $\mathcal{O}_C := \{x \in C \mid v_C(x) \geqslant 0\}$.
Die entsprechenden maximalen Ideale sind
$\mathfrak{m}_{\overline{K}} := \{x \in \overline{K} \mid v_{\overline{K}}(x) > 0\}$ und $\mathfrak{m}_C := \{x \in C \mid v_C(x) > 0\}$.
Bezeichne außerdem $\bar{k}$ den Restklassenkörper von $C$. Dieser ist ein algebraischer Abschluß von $k$, und wir können $W(\bar{k})$ mit einem Teilring von $\mathcal{O}_C$ identifizieren. Für $a \in \bar{k}$ ist also der Teichmüllerrepräsentant $\tau(a) \in \mathcal{O}_C$. Alle algebraischen Erweiterungen $K$ von $K_0$ seien im folgenden in $\overline{K}$ enthalten, und es sei $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K) \subseteq \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_0) = G_{K_0}$. Die Elemente von $G_{K_0}$ operieren wegen der Eindeutigkeit der Betragsforsetzung isometrisch auf $\overline{K}$ und lassen sich somit eindeutig zu isometrischen Körperautomorphismen von $C$ fortsetzen.

**Definition 2.2.1.** Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ mit $(p) \subseteq \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_{\overline{K}}$.
$\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{a}$ ist ein Ring der Charakteristik $p$, so daß das Potenzieren mit $p$ ein Ringendomorphismus ist. Wir indizieren $\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{a}$ abzählbar oft und erhalten ein projektives System

$$... \xrightarrow{(\cdot)^p} \mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{a} \xrightarrow{(\cdot)^p} \mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{a} \xrightarrow{(\cdot)^p} \mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{a}$$

Setze

$$R := \varprojlim_{(\cdot)^p} \mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{a}$$

Diese Definition ist in der Tat unabhängig von $\mathfrak{a}$. Genauer haben wir den weitreichenden

**Satz 2.2.2.**

*i. Betrachte die Menge $\tilde{R}$ derjenigen Folgen $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, ...)$ mit Einträgen aus $\mathcal{O}_C$, welche $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ erfüllen. Die Vorschriften $(xy)^{(n)} := x^{(n)}y^{(n)}$ und $(x+y)^{(n)} := \lim_{m\to\infty}(x^{(n+m)}+y^{(n+m)})^{p^m}$ definieren eine Multiplikation und Addition, welche eine Ringstruktur mit $0 = (0,0,...)$ und $1 = (1,1,...)$ sowie $-x = (-x^{(n)})_n$ für $p \neq 2$, $-x = x$ für $p = 2$ ergeben. Die Abbildung*

$$q_{\mathfrak{a}} : (x^{(0)}, x^{(1)}, ...) \mapsto (x^{(0)} + \mathfrak{a}\mathcal{O}_C, x^{(1)} + \mathfrak{a}\mathcal{O}_C, ...)$$

*ist ein Isomorphismus dieses Rings zu $\varprojlim_{(\cdot)^p}\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}\mathcal{O}_C = \varprojlim_{(\cdot)^p}\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{a} = R$. Eine Umkehrabbildung $r_{\mathfrak{a}}$ läßt sich wie in [Win83, 4.1.4.2] definieren.*

*ii. $R$ ist ein Integritätsbereich der Charakteristik $p$ und perfekt; das Erheben zur $p$-ten Potenz bzw. Ziehen der $p$-ten Wurzel ist nichts anderes als das „Verschieben“ der Folgeglieder um eine Stelle (z. B. $(x^{(n)})_n^p = (x^{(n-1)})_n$). Sein Quotientenkörper ist isomorph zu dem analog zu i. definierten Ring $FrR$, in dem die Folgeglieder aus $C$ stammen.*

iii. *Die Abbildung*

$$\bar{k} \to \tilde{R}$$

$$a \mapsto (\tau(a^{p^{-n}}))_n$$

*ist ein Ringhomomorphismus, vermöge dessen wir $\bar{k}$ als Teilkörper von $R$ und $FrR$ auffassen.*

iv. *Für $x = (x^{(n)})_n \in FrR$ definiere $v_{FrR}(x) := v_C(x^{(0)})$. Dann ist $v_{FrR}$ eine nicht-archimedische, nicht diskrete Bewertung auf $FrR$. Bezüglich dieser ist $FrR$ vollständig, $R$ sein Ganzheitsring und $\mathfrak{m}_R := \{x \in R : v_{FrR}(x) > 0\}$ dessen maximales Ideal. $\bar{k}$ identifiziert sich mit seinem Restklassenkörper (natürlich ist vermöge iii. $v_{FrR}|_{\bar{k}}$ trivial). Es gilt*

$$v_{FrR}(x) = p^n \cdot v_C(x^{(n)})$$

*für alle $n \in \mathbb{N}$. Äquivalent können wir einen Betrag $|\cdot|_{FrR} = e^{-v_{FrR}(\cdot)}$ definieren. Beschreiben wir $R$ als projektiven Limes, so gilt: Ist für ein Element $x \in R$ die $n$-te Komponente $\bar{x}_n \in \mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{a}$ ungleich 0, so haben alle Repräsentanten $x_n \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ dieselbe Bewertung, und es ist $v_{FrR}(x) = p^n \cdot v_{\overline{K}}(x_n)$.*

*Beweis.* Alle Aussagen sind entweder solche von [Win83, 4.1.2], werden im Verlauf von dessen Beweis gezeigt oder folgen sofort daraus. □

Wir unterscheiden im folgenden $R$ und $\tilde{R}$ nur dort explizit, wo dies nötig ist.
Es sei noch bemerkt, daß durch ein Folgeglied $x^{(n)}$ natürlich die $x^{(m)}$ für alle $m \leqslant n$ festgelegt sind. Wir können daher Folgen an einer beliebigen Stelle „abschneiden“ oder umgekehrt nach links verlängern.

**Bemerkung 2.2.3.** *Das hier betrachtete $FrR$ ist in Wintenbergers Notation $R(C)$. Ist $E$ ein abgeschlossener Teilkörper von $C$, so können wir Wintenbergers analog konstruiertes $R(E)$ mit dem Teilkörper $\{(x^{(n)})_n \in FrR: \text{ alle } x^{(n)} \in E\}$ identifizieren.*

**Bemerkung 2.2.4.** *$FrR$ ist algebraisch abgeschlossen.*

*Beweis.* Dies läßt sich direkt daraus folgern, daß $C$ algebraisch abgeschlossen ist, aber wir lassen diesen recht technischen Beweis weg. Wir können die Aussage später aus einem anderen Satz herleiten (siehe 2.3.15). □

**Satz 2.2.5.** *Durch $g(x^{(n)})_n := (gx^{(n)})_n$ wird eine $G_{K_0}$-Wirkung auf $FrR$ definiert. Für alle $g \in G_{K_0}$ ist die Abbildung $[x \mapsto gx]$ ein isometrischer Körperautomorphismus. Auf $k$ ist die Wirkung trivial. Die Wirkung vertauscht mit dem absoluten Frobenius $\phi : x \mapsto x^p$ auf $FrR$.*

*Beweis.* Nachrechnen unter Ausnutzung der eingangs erwähnten Tatsache, daß die Elemente von $G_{K_0}$ auf $C$ isometrische Körperautomorphismen sind. □

Um zu zeigen, daß diese $G_{K_0}$-Wirkung auch als Wirkung stetig ist, brauchen wir folgendes Lemma:

**Lemma 2.2.6.** *Seien $x = (x^{(n)})_n$ und $y = (y^{(n)})_n$ in $FrR$. Es existiere ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $v_C(x^{(N)} - y^{(N)}) \geqslant 1$. Dann ist $v_{FrR}(x - y) \geqslant p^N$.*

*Beweis.* Bedeute im folgenden $\mp$ für $p = 2$ $+$, sonst $-$.
Nach Annahme ist für alle $m \in \mathbb{N}$

$$(x^{(N+m)} \mp y^{(N+m)})^{p^m} \equiv (x^{(N+m)})^{p^m} \mp (y^{(N+m)})^{p^m} \equiv x^{(N)} \mp y^{(N)} \equiv 0 \bmod (p)$$

d. h. $v_C\left((x^{(N+m)} \mp y^{(N+m)})^{p^m}\right) \geqslant 1$, also auch

$$v_C\left(\lim_{m\to\infty} (x^{(N+m)} \mp y^{(N+m)})^{p^m}\right) \geqslant 1$$

Der Limes ist definitionsgemäß (in beiden Fällen) die $N$-te Komponente von $x - y$. Es folgt

$$v_{FrR}(x-y) \overset{2.2.2.\mathrm{iv}}{=} p^N \cdot v_C\left((x-y)^{(N)}\right) \geqslant p^N$$

□

**Satz 2.2.7.** *Versehe $G_{K_0}$ mit der Krull-Topologie. Die Abbildung*

$$G_{K_0} \times FrR \to FrR \ , \ (g,x) \mapsto gx$$

*ist stetig.*

*Beweis.* Sei $(g,x) \in G_{K_0} \times FrR$ gegeben. Es genügt zu zeigen: Zu beliebigem $c > 0$ existiert eine offene Umgebung $U$ von $(g,x)$, so daß das Bild von $U$ in $\{y \in FrR : v_{FrR}(y - gx) > c\}$ enthalten ist.
Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ mit $p^N > c$. Betrachte $gx^{(N)} \in C$, die $N$-te Komponente von $gx$. Sicherlich gibt es ein $\tilde{a} \in \overline{K}$ mit

$$v_C(gx^{(N)} - \tilde{a}) \geqslant 1 \tag{2.1}$$

$H := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K(\tilde{a}))$ ist eine offene Untergruppe von $G_{K_0}$. Wir behaupten:
$U := Hg \times \{z \in FrR : v_{FrR}(x - z) > p^N\}$ erfüllt obige Bedingung.
Klar ist, daß $U$ eine offene Umgebung von $(g,x)$ ist. Sei $(hg, x+w) \in U$ gegeben mit $h \in H, v_{FrR}(w) > p^N$. Wir wählen ein $a = (a^{(n)})_n \in FrR$, dessen $N$-te Komponente $a^{(N)} = \tilde{a}$ ist (dies ist natürlich möglich, indem wir für die weiteren Folgeglieder iterativ eine $p$-te Wurzel ziehen). Dann ist wegen Lemma 2.2.6 und (2.1):

$$v_{FrR}(gx - a) \geqslant p^N$$

also auch, da $h$ isometrisch ist,

$$v_{FrR}(hgx - ha) = v_{FrR}(h(gx - a)) = v_{FrR}(gx - a) \geqslant p^N$$

Nach Wahl von $H$ stimmen die $N$-ten Komponenten von $ha$ und $a$ sogar überein, also gilt noch einmal nach Lemma 2.2.6

$$v_{FrR}(ha - a) \geqslant p^N$$

Schließlich ist nach Wahl von $w$ und Isometrie von $hg$ auch

$$v_{FrR}(hgw) > p^N$$

Zusammen erhalten wir mit der strengen Dreiecksungleichung

$$v_{FrR}(hg(x+w) - gx) = v_{FrR}((hgx - ha) + (ha - a) + (a - gx) + hgw) \geqslant p^N > c$$

□

Wir wählen nun ein Element $\epsilon = (\epsilon^{(0)}, \epsilon^{(1)}, ...) \in \tilde{R}$ mit $\epsilon^{(0)} = 1$ und $\epsilon^{(1)} \neq 1$. Anders gesagt: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\epsilon^{(n)}$ eine primitive $p^n$-te Einheitswurzel in $\mathcal{O}_C$, und es gilt $(\epsilon^{(n+1)})^p = \epsilon^{(n)}$. (So läßt sich ein $\epsilon$ induktiv konstruieren, wobei natürlich in jedem Schritt eine Wahl getroffen wird.)

**Lemma 2.2.8.**

*i. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $v_{FrR}(\epsilon^{p^n} - 1) = \frac{1}{p-1}p^{n+1}$.*

*ii. $\epsilon$ ist nicht algebraisch über $k$.*

*Beweis.*

i. $\epsilon^{(m)}$ ist eine primitive $p^m$-te Einheitswurzel, für $m > n$ folglich $(\epsilon^m)^{p^n} = \epsilon^{(m-n)}$ eine primitive $p^{m-n}$-te. Wegen $v_C(p) = 1$ ist bekanntlich mit der Eulerschen $\varphi$-Funktion

$$v_C(\epsilon^{(m-n)} - 1) = (\varphi(p^{m-n}))^{-1} = \frac{p^{1+n-m}}{p-1}$$

also unter Ausnutzung der Stetigkeit der Bewertung

$$\begin{aligned} v_{FrR}(\epsilon^{p^n} - 1) &= v_C(\lim_{m\to\infty}(((\epsilon^{(m)})^{p^n} - 1)^{p^m})) = \lim_{m\to\infty} p^m \cdot v_C(\epsilon^{(m-n)} - 1) \\ &= \lim_{m\to\infty} p^m \cdot \frac{p^{1+n-m}}{p-1} = \frac{1}{p-1}p^{n+1} \end{aligned}$$

ii. Andernfalls wäre $\epsilon \in \bar{k} \subset R$, also in $R$ von der Gestalt $(\tau(a^{p^{-n}}))_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $a \in \bar{k}$. Es folgte $\epsilon^{(0)} = 1_{\mathcal{O}_C} = \tau(a) \Rightarrow a = 1_k \Rightarrow a^{p^{-n}} = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \epsilon^{(n)} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, Widerspruch. Alternativ: Sonst wäre auch $\epsilon - 1 \neq 0$ algebraisch, also in $\bar{k}^\times$, also nach Satz 2.2.2.iii und .iv $v_{FrR}(\epsilon - 1) = 0$ im Widerspruch zu i.

□

Insbesondere gilt $\epsilon \in 1 + \mathfrak{m}_R$, so daß $\epsilon$ nach Satz 2.1.1 mit Elementen aus $\mathbb{Z}_p$ potenziert werden kann.

**Bemerkung 2.2.9.** *Wegen $(\epsilon^{(n)})^{p^n} = 1$ kann das Potenzieren von $\epsilon$ mit einem Element $x \in \mathbb{Z}_p$ gemäß Satz 2.1.1.ii. auch folgendermaßen verstanden werden: Gilt $x \equiv \bar{x}_n \mod p^n$ mit $\bar{x}_n \in \mathbb{Z}$, so ist*

$$\epsilon^x = ((\epsilon^{(n)})^{\bar{x}_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

**Satz 2.2.10.**

*i. $G_{K_0}$ wirkt auf $\epsilon$ über den zyklotomischen Charakter:*

$$g\epsilon = \epsilon^{\chi(g)} \text{ für alle } g \in G_{K_0}.$$

*ii. Ist $\tilde{\epsilon} = (\tilde{\epsilon}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine andere Wahl, so gibt es ein $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ mit $\tilde{\epsilon} = \epsilon^a$. Umgekehrt erfüllt für jedes $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ auch $\epsilon^a$ die Bedingungen an $\epsilon$.*

*Beweis.* Mit der vorigen Bemerkung ist die Aussage i. nichts wesentlich anderes als die Definition des zyklotomischen Charakters.
Zu ii.: Da $\tilde{\epsilon}^{(n)}$ und $\epsilon^{(n)}$ jeweils primitive $p^n$-te Einheitswurzeln sind, gibt es für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein $a_n \in \mathbb{N}_0$ mit $(\epsilon^{(n)})^{a_n} = \tilde{\epsilon}^{(n)}$. Wegen der jeweiligen Verträglichkeit der Komponenten gilt sogar $(\epsilon^{(m)})^{a_n} = \tilde{\epsilon}^{(m)}$ für alle $0 \leqslant m \leqslant n$, woraus wiederum $a_m \equiv a_n \mod p^m$ folgt, denn die Komponenten sind *primitive* Einheitswurzeln. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also $p$-adisch gegen ein $a \in \mathbb{Z}_p$, für das wegen $a \equiv a_n \mod p^n$ und $(\epsilon^{(m)})^{a_n} = \tilde{\epsilon}^{(m)}$ auch $\epsilon^a = \tilde{\epsilon}$ gilt. – Nach Vertauschung der Rollen von $\epsilon$ und $\tilde{\epsilon}$ gibt es ein $b \in \mathbb{Z}_p$ mit $\epsilon = \tilde{\epsilon}^b$. Mit Satz 2.1.1.iii folgt $\epsilon^{ab-1} = 1$ und $ab = 1$, also $a \in \mathbb{Z}_p^\times$.
Die letzte Aussage folgt umgekehrt daraus, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Restklasse $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ eine Einheit und folglich $(\epsilon^{(n)})^{\bar{a}}$ ebenfalls eine primitive $p^n$-te Einheitswurzel ist. □

**Corollar 2.2.11.** *Für alle $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ ist $v_{FrR}(\epsilon^a - 1) = \frac{p}{p-1}$.*

*Beweis.* Folgt als Spezialfall aus Lemma 2.2.8.i und Satz 2.2.10.ii. □

## 2.3 Konstruktion nach Cherbonnier und Colmez ($\Gamma \leq \mathbb{Z}_p^\times$)

Wir stellen zunächst die Konstruktion dar, wie sie in [CC98] und [CC99] skizziert wird. Die konstruierten Körper bezeichnen wir wie dort durch Indizierung: $E_K$. Zwei Unterschiede zu [CC99] sind besonders zu beachten:
– Der Körper $K$ (bzw. $K_0$) ist hier, wie auch später bei Fontaine, nicht unbedingt eine endliche (unverzweigte) Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, sondern ein beliebiger (absolut unverzweigter) lokaler Körper von Charakteristik 0 im französischen Gebrauch des Wortes: d. h. Quotientenkörper eines vollständigen DBR mit perfektem Restklassenkörper der Charakteristik $p$ (und maximalem Ideal $(p)$).
– Die hier mit $K_0^n$ (oder allgemeiner $K^n$, $L^n$, ...), $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ bezeichneten Kreisteilungskörper heißen in der Notation von [CC99] $(K_0)_n$ ($K_n$, $L_n$, ...). Wir behalten die untere Indizierung der später benutzten zyklotomischen $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung bzw. deren Teilkörpern vor.

### 2.3.1 Der Körper $E_{K_0}$

**Definition 2.3.1.** Setze
$S_{K_0} := S_{K_0}(\epsilon) :=$ Abschluß des von $k$ und $\epsilon$ erzeugten Teilrings von $R$;
$E_{K_0} := E_{K_0}(\epsilon) :=$ Abschluß des von $k$ und $\epsilon$ erzeugten Teilkörpers von $FrR$.

Das $\epsilon$ läßt sich sofort entfernen:

**Satz 2.3.2.** *$S_{K_0}$ und $E_{K_0}$ sind stabil unter der Wirkung von $G_{K_0}$ und unabhängig von der Wahl von $\epsilon$.*

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus Satz 2.2.5 und Satz 2.2.10, denn alle natürlichen Potenzen von $\epsilon$ liegen im entsprechenden Teilring, also liegen $\mathbb{Z}_p$-Potenzen als Grenzwerte davon (gemäß Satz 2.1.1.ii) in dessen Abschluß. Sei für die zweite Aussage eine andere Wahl $\tilde{\epsilon}$ gegeben, dann folgt mit demselben Argument z. B. $\tilde{\epsilon} \in S_{K_0}(\epsilon)$, a fortiori $S_{K_0}(\tilde{\epsilon}) \subseteq S_{K_0}(\epsilon)$ und mit vertauschten Rollen die umgekehrte Inklusion. □

In der Definition ließe sich natürlich auch $\epsilon$ durch $\epsilon - 1$ ersetzen. Dieses Element ist weitaus interessanter:

**Satz 2.3.3.** *Versehe den Ring der formalen Potenzreihen $k[[T]]$ bzw. den Körper der formalen Laurentreihen $k((T))$ mit der Bewertung*

$$v\left(\sum_{-\infty \ll n} a_n T^n\right) := \frac{p}{p-1} \cdot \min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$$

*mit $v(0) := \infty$.*
*(Die unübliche Normierung der Bewertung erklärt sich sogleich.) $k((T))$ ist bekanntlich ein lokaler Körper mit Ganzheitsring $k[[T]]$ und Restklassenkörper $k$.*
*Wir haben dann durch $T \mapsto \epsilon - 1$ definierte isometrische Isomorphismen*

$$\begin{tikzcd} k((T)) \arrow[r, "\simeq"] & E_{K_0} \\ k[[T]] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u, "\cup"] & S_{K_0} \arrow[u, "\cup"'] \end{tikzcd}$$

*und können in suggestiver Weise $E_{K_0} = k((\epsilon - 1))$ schreiben.*

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildungen zunächst als solche nach $R$ bzw. $FrR$.
Daß die formalen Reihen nach Einsetzen von $\epsilon - 1$ in $R$ bzw. $FrR$ konvergieren, folgt aus $v_{FrR}(\epsilon - 1) = \frac{p}{p-1} > 0$ (Lemma 2.2.8.i.) und Satz 2.2.2 mit üblicher nicht-archimedischer Analysis. Dann werden auch die formale Multiplikation und Addition in diejenige in $FrR$ überführt (man kann etwa per Satz 2.2.2.iii. und iv. die Reihen als formale Reihen über $FrR$ mit Konvergenzradius 1 auffassen). Die Abbildungen sind also *wohldefinierte Ringhomomorphismen.*
Für $a_n \in k \setminus \{0\}$ gilt $v_{FrR}(a_n \cdot (\epsilon - 1)^n) = n \cdot \frac{p}{p-1}$. Daher ist, ebenfalls ein Standardergebnis ultrametrischer Rechnung, die Bewertung einer konvergenten Reihe aus dem Bild der Abbildungen gleich $\frac{p}{p-1} \cdot \min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$. Die obige Bewertung auf $k((T))$ ist für die Isometrie der Abbildungen also gerade richtig normiert. Als Isometrien sind sie automatisch *injektiv und stetig* (die Injektivität ist übrigens auch äquivalent zu Lemma 2.2.8.ii.). Es bleibt zu zeigen, daß ihre Bilder genau $S_{K_0}$ und $E_{K_0}$ sind.
Bekanntlich sind $k[[T]]$ und $k((T))$ bezüglich der durch die genannte Bewertung induzierten Metrik vollständig, also wegen der Isometrie auch ihre Bilder. Diese sind mithin ein abgeschlossener Teilring von $R$ bzw. abgeschlossener Teilkörper von $FrR$, welche $k$ und $\epsilon - 1$ enthalten, also auch $S_{K_0}$ bzw. $E_{K_0}$.
Zur umgekehrten Inklusion: Die Bilder aller Polynome $\sum_{0 \leqslant n \ll \infty} a_n T^n$ bilden gerade den von $k$ und $\epsilon - 1$ erzeugten Teilring von $R$. Da eine Potenzreihe $\sum_{0 \leqslant n} a_n T^n$ bezüglich der angegebenen Bewertung etwa Grenzwert der Folge $(\sum_{0 \leqslant n \leqslant m} a_n T^n)_{m \in \mathbb{N}}$ ist, liegen aufgrund der Isometrie auch alle Bilder von Potenzreihen im Abschluß des genannten Teilrings, also in $S_{K_0}$.
Der von $k$ und $\epsilon - 1$ erzeugte Teilkörper von $FrR$ enthält zumindest die Bilder der Laurentpolynome $\sum_{-\infty \ll n \ll \infty} a_n T^n$; mit einem analogen Argument enthält also auch dessen Abschluß das Bild von $k((T))$. □

**Corollar 2.3.4.** *$E_{K_0}$ identifiziert sich mit dem Quotientenkörper von $S_{K_0}$.*
*$S_{K_0}$ ist eindeutig charakterisiert als derjenige Teilring von $R$, der ein vollständiger DBR ist derart, daß $\epsilon - 1$ ein uniformisierendes Element ist und $k \subset R$ ein Repräsentantensystem seines Restklassenkörpers bildet. Bis auf Umnormierung ist dessen Bewertung die Einschränkung derjenigen von $FrR$.*

### 2.3.2 Normenkörper und ihre Einbettung in $FrR$. Der Körper $E_{K_0}^{sep}$.

**Definition 2.3.5.** Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$K_0^n := K_0(\mu_{p^n}) = K_0(\epsilon^{(n)}) \subset \overline{K}$$

haben also eine Folge von Körperweiterungen

$$K_0 \subset K_0^1 \subset ... \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_0^n =: K_0^\infty$$

Setze außerdem $H_{K_0} := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_0^\infty)$.

**Bemerkung 2.3.6.** *$H_{K_0}$ ist genau der Kern des zyklotomischen Charakters und wirkt folglich auch trivial auf $E_{K_0}$.*
*$\Gamma_{K_0} := \mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0) = G_{K_0}/H_{K_0}$ ist als topologische Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_p^\times$.*
*Für $n \geqslant 1$ ist $K_0^{n+1}|K_0^n$ zyklisch von Ordnung $p$, und ein Erzeuger der Galoisgruppe wird durch $g_0 : \epsilon^{(n+1)} \mapsto \epsilon^{(1)} \cdot \epsilon^{(n+1)}$ definiert.*

**Lemma 2.3.7.**

*i.*

$$\varprojlim_{n\geqslant 1} \mathcal{O}_{K_0^n}/(\epsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_0^n}$$

*ist mit den von den Relativnormen $N_{K_0^{n+1}|K_0^n}$ induzierten Übergangsabbildungen der in [Win83, 2.2.3.3] definierte Ring $A_{K_0}(K_0^\infty)$.*

*ii. Andererseits identifiziert sich dieser Ring mit*

$$\varprojlim_{n\geqslant 1} \mathcal{O}_{K_0^n}/(\epsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_0^n}$$

*wobei die Übergangsabbildungen vom Erheben zur $p$-ten Potenz induziert werden.*

*Beweis.*

i. Der Beweis benötigt die Theorie höherer Verzweigungsgruppen.
Die Beweise von [Ser68, chap. IV, § 4] übertragen sich von $\mathbb{Q}_p$ auf unseren absolut unverzweigten Körper $K_0$. Wir haben folglich (vgl. ibd., proposition 18) als Verzweigungsgruppen von $\mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0)$ in der unteren Numerierung

$$\mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0)_i = \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^m) \text{ für } p^{m-1} \leqslant i \leqslant p^m - 1$$

falls $1 \leqslant i \leqslant p^{n+1}-1$, für $i \geqslant p^{n+1}$ ist $\mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0)_i$ trivial. Insbesondere ist $\mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^n)$ genau in den $\mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0)_i$ mit $i \leqslant p^n - 1$ enthalten.
Als nächstes bestimmen wir die in [Win83, 1.2.1] definierte Zahl $i(K_0^\infty|K_0)$. Diese ist

$$\begin{aligned}
&\sup(i \in \mathbb{R} : G^i_{K_0^n} G_{K_0^\infty} = G_{K_0^n})\\
=&\sup(i \in \mathbb{R} : \mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0^n)^i = \mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0^n))\\
=&\min(i \in \mathbb{R} : \mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0^n)^{i+\eta} \neq \mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0^n) \text{ für alle } \eta > 0)\\
=&\min(i \in \mathbb{R} : \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^n)^{i+\eta} \neq \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^n) \text{ für alle } \eta > 0)\\
=&\min(i \in \mathbb{R} : \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^n)_{i+\eta} \neq \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^n) \text{ für alle } \eta > 0)\\
=&\min(i \in \mathbb{R} : \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0)_{i+\eta} \neq \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0) \text{ für alle } \eta > 0)\\
=&\,p^n - 1
\end{aligned}$$

Dabei gilt
– die erste Gleichheit, weil $K_0^\infty|K_0^n$ galoissch ist, nach der der letzten Aussage in [Win83, 1.1.1] mit $L = \overline{K}, K = K_0^n, K' = K_0^\infty$, also $G = G_{K_0^n}, H = G_{K_0^\infty}$ (die obere Numerierung ist an Quotienten adaptiert);
– die zweite Gleichheit definitionsgemäß (dies ist der kleinste Verzweigungsbruch in der oberen Numerierung);
– die dritte Gleichheit nach dem gleichen Argument wie die erste, diesmal mit $L = K_0^\infty$ und $K' = K_0^{n+1}$;
– die vierte Gleichheit, weil der kleinste Verzweigungsbruch in der oberen und der unteren Numerierung übereinstimmen, wie sofort aus deren Definition folgt;
– die fünfte und sechste Gleichheit gemäß [Ser68, chap. IV, § 1, prop. 2] mit $H =$

$\mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^n), G = \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0)$ und der obigen Bestimmung von $\mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0)_i$.
Also haben wir in [Win83, 2.2.3] für $n \geqslant 1$:

$$r(K_0^n) = \left\lceil \frac{p-1}{p}(p^n - 1) \right\rceil = \left\lceil (p-1)p^{n-1} - \frac{p-1}{p} \right\rceil = (p-1)p^{n-1}$$

Danach können wir in [Win83, 2.2.3.3] $s(K_0^n) := p^{n-1}$ setzen.
Für $n \geqslant 1$ ist das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{K_0^n}$ bekanntlich $(\epsilon^{(n)} - 1)$. Wir haben in $\mathcal{O}_{K_0^n}$ Gleichheit von Idealen

$$(\epsilon^{(n)} - 1)^{s(K_0^n)} = (\epsilon^{(1)} - 1)$$

denn $p^{n-1} \cdot v_C(\epsilon^{(n)} - 1) = \frac{1}{p-1} = v_C(\epsilon^{(1)} - 1)$ und $\epsilon^{(1)} \in \mathcal{O}_{K_0^n}$.
Folglich ist Wintenbergers $A_E/P_E^{s(E)}$ bei uns für $E = K_0^n, n \geqslant 1$, genau $\mathcal{O}_{K_0^n}/(\epsilon^{(1)} - 1)$.

ii. Sei $n \geqslant 1$ fest. Die Relativnorm induziert eine Abbildung

$$\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}/(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^{n+1}} \to \mathcal{O}_{K_0^n}/(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^n}$$

Die $p$-Potenzierung induziert zunächst nur eine Abbildung

$$\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}/(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^{n+1}} \to \mathcal{O}_{K_0^{n+1}}/(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$$

Wir zeigen, daß auch für Elemente aus dem Bild dieser Abbildung stets ein Repräsentant aus $\mathcal{O}_{K_0^n}$ gewählt werden kann. Indem wir dessen Nebenklasse modulo $(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$ in $\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$ mit derjenigen modulo $(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^n}$ in $\mathcal{O}_{K_0^n}$ identifizieren, stimmen die induzierten Abbildungen dann überein.
Für alle $g \in \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^n)$ und alle $x \in \mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$ gilt

$$gx \equiv x \bmod (\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}. \tag{2.2}$$

Sei nämlich zunächst $g = g_0$ der in Bemerkung 2.3.6 definierte Erzeuger. Dann gilt (2.2) für $x \in \mathcal{O}_{K_0^n}$ (trivialerweise) sowie nach Definition für $x = \epsilon^{(n+1)}$, also (mit $g_0(x^i) = (g_0(x))^i$) auch für alle Potenzen von $\epsilon^{(n+1)}$ und weiter für alle Linearkombinationen davon, schließlich also für alle $x \in \mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$. Wegen $g_0(\epsilon^{(1)} - 1) = \epsilon^{(1)} - 1$ ist a fortiori

$$\underbrace{(g_0 \circ \ldots \circ g_0)}_{m \text{ mal}} x \equiv \underbrace{(g_0 \circ \ldots \circ g_0)}_{m-1 \text{ mal}} x \equiv \ldots \equiv x \bmod (\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$$

und damit (2.2) gezeigt.
Hieraus folgt nun

$$N_{K_0^{n+1}|K_0^n}(x) = \prod_{g \in \mathrm{Gal}(K_0^{n+1}|K_0^n)} gx \equiv x^p \bmod (\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$$

und daraus die Behauptung. Insbesondere gibt es zu jedem $x \in \mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$ stets ein $y \in \mathcal{O}_{K_0^n}$ mit $y \equiv x^p \bmod (\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^{n+1}}$, nämlich $y = N_{K_0^{n+1}|K_0^n}(x)$.

$\square$

Es liegt nahe, den im zweiten Teil dieses Lemmas betrachteten Ring als einen Unterring von $R$ aufzufassen, wenn wir diesen mit Definition 2.2.1 bezüglich des Ideals $\mathfrak{a} = (\epsilon^{(1)} - 1)$ definieren. Formal genauer haben wir für alle $n \geqslant 1$ von der Inklusion induzierte und in offenkundiger Weise miteinander verträgliche Injektionen

$$\mathcal{O}_{K_0^n}/(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^n} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}/(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{\overline{K}}$$

und damit wegen der Linksexaktheit des projektiven Limes eine Injektion

$$\begin{aligned} \iota_{K_0} : \varprojlim_{n\geqslant 1} \mathcal{O}_{K_0^n}/(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^n} &\hookrightarrow R \\ (a_n + (\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^n}))_{n\geqslant 1} &\mapsto (a_n + (\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{\overline{K}}))_{n\geqslant 1} \end{aligned}$$

wobei die noch zu ergänzende 0-te Komponente in $R$ notwendigerweise $a_1^p + (\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{\overline{K}}$ gesetzt werden muß.

Um die Ergebnisse Wintenbergers benutzen zu können, identifizieren wir diese Inklusion mit einer von ihm untersuchten Abbildung. Ganz knapp wiederholen wir die dortigen Notationen und Definitionen:

– $X_{K_0}(K_0^\infty)$ bezeichnet den *Normenkörper* zur Erweiterung $K_0^\infty|K_0$. Dessen Einheitengruppe ist definiert als der projektive Limes der Einheitengruppen aller endlichen Teilerweiterungen, geordnet bezüglich Inklusionen, wobei die Übergangsabbildungen durch die Normen gegeben sind. Diese Struktur, vereinigt mit einem Nullelement und mit einer geeigneten Addition versehen, ist tatsächlich ein (lokaler) Körper (vgl. [Win83, 2.1]). Wir können uns dabei offenbar auf die Teilerweiterungen der Form $K_0^n$ beschränken.

– Dessen *Ganzheitsring* $A_{X_{K_0}(K_0^\infty)}$ läßt sich über einen isometrischen Isomorphismus $\xi$ mit dem in Lemma 2.3.7.i bestimmten Ring

$$A_{K_0}(K_0^\infty) = \varprojlim_{n\geqslant 1} \mathcal{O}_{K_0^n}/(\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^n}$$

identifizieren. $\xi$ ist in jeder Komponente einfach die Restklassenprojektion (vgl. [Win83, 2.3.1][1].)

– In [Win83, 4.2] wird eine Einbettung des Normenkörpers

$$\Lambda_{K_0^\infty|K_0} : X_{K_0}(K_0^\infty) \hookrightarrow R(\widehat{K_0^\infty})$$

definiert, wobei $\widehat{K_0^\infty}$ den Abschluß von $K_0^\infty$ in $C$ bezeichne und wir Wintenbergers $R(\widehat{K_0^\infty})$ mit der Menge $\{(x^{(n)})_n \in FrR : \text{ alle } x^{(n)} \in \widehat{K_0^\infty}\}$ identifizieren können. Die Abbildung $\Lambda$ wird (in unserem Fall) folgendermaßen definiert: Zunächst ist die maximale zahm verzweigte Teilerweiterung von $K_0^\infty|K_0$ genau unser $K_0^1 = K(\mu_p)$. Nun wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathcal{E}_n$ derjenigen endlichen Teilerweiterungen $E$ von $K_0^\infty|K_0^1$, welche durch $p^n$ teilbaren Grad $q^E$ über $K_0^1$ haben, bestimmt. Dann ist für jedes Element $\alpha = (\alpha_{K_0^m})_{K_0^m}$ die Familie

$$(\alpha_{K_0^m}^{p^{-n}q^E})_{E\in\mathcal{E}_n}$$

konvergent (bezüglich der durch die Inklusionen gegebenen Filtrierung von $\mathcal{E}_n$) gegen ein Element $x^{(n)} \in \widehat{K_0^\infty}$, und die Folge $(x^{(n)})_n$ erfüllt $x^{(n+1)p} = x^{(n)}$, definiert also ein Element von $FrR$.

[1] Hier findet sich am Ende ein Druckfehler: Offenbar muß der Limes über alle $E' \in \mathcal{E}_{L|E}$ genommen werden.

**Satz 2.3.8.** *Zusätzlich zu obigen Bezeichnungen seien $\iota_{K_0}$ und $R$ wie zuvor bezüglich des Ideals $(\epsilon^{(1)} - 1)$ definiert und $r_{(\epsilon^{(1)}-1)}$ wie in 2.2.2.i. , und bezeichne $\phi : x \mapsto x^p$ den absoluten Frobenius auf $\tilde{R}$. Dann kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
A_{K_0}(K_0^\infty) \arrow[r, "\iota_{K_0}"] & R \arrow[d, "\cong"', "r_{(\epsilon^{(1)}-1)}"] \\
A_{X_{K_0}(K_0^\infty)} \arrow[u, "\xi", "\cong"'] \arrow[r, "\phi \circ \Lambda_{K_0^\infty|K_0}"] & \tilde{R}
\end{tikzcd}$$

*Die waagerechten Pfeile sind injektiv, und das Bild der Abbildungen liegt in $\{(x^{(n)})_n \in R :$ alle $x^{(n)} \in \widehat{K_0^\infty}\}$.*

*Beweis.* Die Menge $\mathcal{E}_n$ besteht gerade aus den $K_0^m$ mit $m \geqslant n+1$; für diese ist der weiter unten im Limes erscheinende Ausdruck wohldefiniert. Wintenbergers $q^{K_0^m}$ ist $[K_0^m : K_0^1] = p^{m-1}$. Ist also $\alpha = (\alpha_{K_0^m})_m \in A_{X_{K_0}(K_0^\infty)}$, so ist die $n$-te Komponente von $\Lambda_{K_0^\infty|K_0}(\alpha)$:

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_{K_0^m}^{p^{m-n-1}}$$

Gehen wir im Diagramm stattdessen von unten links im Uhrzeigersinn herum, erhalten wir gemäß [Win83, 4.1.4.2] als $n$-te Komponente von $(r_{(\epsilon^{(1)}-1)} \circ \iota_{K_0} \circ \xi)((\alpha_{K_0^m})_m)$ den Limes

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_{K_0^m}^{p^{m-n}}$$

(wobei wir als Lift $\widehat{\overline{\alpha_{K_0^m}}}$ von $\overline{\alpha_{K_0^m}}$ einfach $\alpha_{K_0^m}$ gewählt haben). Um die fehlende $p$-Potenz zu ergänzen und so das Diagramm kommutieren zu lassen, ist also in der unteren Zeile des Diagramms noch der Automorphismus $\phi$ eingeschaltet. Dieser tritt auch im folgenden stets auf und basiert im Grunde nur auf einer hier ungünstigen Normierung.
Die Injektivität der waagerechten Pfeile ist in mehrerlei Hinsicht klar. Die letzte Aussage folgt aus der letzten Vorabbemerkung, wobei alle Elemente im Bild zudem nichtnegative Bewertung haben – auch links im Diagramm wird ja nur der Ganzheitsring betrachtet –, so daß der Körper $FrR$ durch den Ganzheitsring $R$ ersetzt werden kann. □

Im letzten Teil dieses Beweise haben wir implizit schon genutzt:

**Bemerkung 2.3.9.** *Die waagerechten Pfeile im obigen Diagramm sind bis auf Umnormierung isometrisch.*

*Beweis.* Da die senkrechten Pfeile nach Definition isometrisch sind, reicht es, dies für $\iota_{K_0}$ zu zeigen. Sei $0 \neq x = (\bar{x}_{K_0^n})_{n\geqslant 0} \in A_{K_0}(K_0^\infty)$. Ist $n \in \mathbb{N}$ groß genug, so ist $\bar{x}_{K_0^n} \neq 0$, und definitionsgemäß ([Win83, 2.2.3.3]) ist die Bewertung

$$w(x) = v_{K_0^n}(x_n)$$

für alle diese $n$ und beliebige Repräsentanten $x_n$. Nach Satz 2.2.2.iv ist andererseits für dieselben $n$:

$$v_{FrR}(\iota_{K_0}(x)) = p^n \cdot v_C(x_n)$$

Da bekanntlich

$$v_C \mid_{K_0^n} = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \cdot v_{K_0^n}$$

gilt, ist daher unabhängig von jenen $n$

$$v_{FrR}(\iota_{K_0}(x)) = \frac{p}{p-1} w(x)$$

Bis auf den Umnormierungsfaktor $p/(p-1)$ bleibt also die Bewertung erhalten.
Übrigens ergibt sich dies auch bei Betrachtung des unteren waagerechten Pfeils mit [Win83, S. 84, Ende des ersten Absatzes] unter Beachtung von $K_{1\,(\mathrm{Wint})} = K_0^1$, $v_{K_0^1} = \frac{1}{p-1} v_C$ und „$v \circ \phi = p \cdot v$“. □

**Satz 2.3.10.** *Das Bild von $\phi \circ \Lambda_{K_0^\infty|K_0} : X_{K_0}(K_0^\infty) \to FrR$ ist $E_{K_0}$. Die Abbildung definiert also einen Isomorphismus des Normenkörpers der Erweiterung $K_0^\infty|K_0$ zu $E_{K_0}$.*

*Beweis.* Wir zeigen, daß das Bild des Ganzheitsrings $A_{X_{K_0}(K_0^\infty)}$ genau $S_{K_0}$ ist, woraus durch Übergang zum Quotientenkörper die Behauptung folgt.
Dazu benutzen wir die Charakterisierung von $S_{K_0}$ in Corollar 2.3.4. Da $\phi \circ \Lambda_{K_0^\infty|K_0}$ wie gesehen bis auf Umnormierung die Bewertung erhält, ist das Bild bezüglich $v_{FrR}$ ein vollständiger, diskret bewerteter Teilring von $R$. Der in Lemma 2.3.7 und Satz 2.3.8 benutzte Ring $A_{K_0}(K_0^\infty)$ hat gemäß [Win83, 2.2.3.3]

$$\alpha := \Big( (\epsilon^{(n)} - 1) + (\epsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_0^n} \Big)_{n \geqslant 1}$$

als uniformisierendes Element, denn für $n \geqslant 1$ ist $v_{K_0^n}(\epsilon^{(n)} - 1) = 1$. Dieses Element wird im kommutativen Diagramm in Satz 2.3.8 auf $\epsilon - 1 \in R$ abgebildet. Anders gesagt: Das Bild enthält $\epsilon - 1$ als uniformisierendes Element. (Man beachte: Auch die Ergebnisse von Lemma 2.2.8 und Bemerkung 2.3.9 passen genau.)
Betrachten wir schließlich die Restkörper der Ringe. Gemäß [Win83, 2.1.2 und 2.1.3] angewandt auf die vorliegende Situation bilden die Elemente

$$(\tau(x^{p^{-n+1}})_{K_0^n})_{n \geqslant 1}$$

wobei $x$ den Restkörper $k_{K_0^\infty} = k_{K_0} = k$ durchläuft und $\tau : k \to K_0$ die Teichmüllerabbildung ist, ein Repräsentantensystem des Restkörpers von $X_{K_0}(K_0^\infty)$. Nach 2.3.8 haben wir also auch als Repräsentantensystem des Restkörpers von $(\phi \circ \Lambda_{K_0^\infty|K_0})(X_{K_0}(K_0^\infty))$ die Elemente

$$(\tau(x^{p^{-n+1}}))_{n \geqslant 1} \in R$$

wobei $x$ den Körper $k$ durchläuft. Dies sind gerade die $p$-ten Potenzen des mit $k$ identifizierten Teilkörpers von $R$ (vgl. 2.2.2.iii), also, da $k$ perfekt ist, eben dieser Teilkörper. □

Wir haben also den Grund-Normenkörper $X_{K_0}(K_0^\infty)$ in $FrR$ eingebettet. Im folgenden werden wir diese Einbettung gewissermaßen hochziehen, und zwar, wie sich dann herausstellen wird, sogar unter Beachtung zumindest der $H_{K_0}$-Wirkung.

**Konstruktion 2.3.11.** Betrachte nun für alle algebraischen Erweiterungen $L|K_0^\infty$ gemäß [Win83, 4.3.1] die Einbettung

$$\Lambda_{L|K_0^\infty|K_0} : X_{K_0^\infty|K_0}(L) \hookrightarrow \{(x^{(n)})_n \in FrR : \text{ alle } x^{(n)} \in \hat{L}\}$$

wobei $\hat{L}$ den Abschluß von $L$ in $C$ bezeichne. Diese sind nach Konstruktion miteinander verträglich, d. h.

$$L \subset L' \Rightarrow \Lambda_{L'|K_0^\infty|K_0} |_{X_{K_0^\infty|K_0}(L)} = \Lambda_{L|K_0^\infty|K_0}$$

Sie alle setzen sich zusammen zu einer Einbettung

$$\Lambda_{\overline{K}|K_0^\infty|K_0} : X_{K_0^\infty|K_0}(\overline{K}) \hookrightarrow FrR$$

und können umgekehrt als Einschränkung dieser Abbildung aufgefaßt werden.

**Bemerkung 2.3.12.** *Für jede algebraische Erweiterung $L|K_0^\infty$ ist*

$$\{(x^{(n)})_n \in FrR : \text{ alle } x^{(n)} \in \hat{L}\}$$

*der Abschluß der perfekten Hülle von $(\phi \circ \Lambda_{L|K_0^\infty|K_0})(X_{K_0^\infty|K_0}(L))$ in $FrR$. (In [Fon83] hatte Fontaine noch eher mit diesen Körpern gearbeitet.)*

*Beweis.* [Win83, 4.3.4] besagt in unserer Situation: $\{(x^{(n)})_n \in FrR : \text{ alle } x^{(n)} \in \hat{L}\}$ ist in $FrR$ der Abschluß der perfekten Hülle des Bildes von $X_{K_0^\infty|K_0}(L)$ unter $\Lambda_{L|K_0^\infty|K_0}$.
Bezeichne immer noch $\phi : x \mapsto x^p$ den (bijektiven!) absoluten Frobenius auf $FrR$, so ist für jeden Teilkörper $E \subseteq FrR$ bekanntlich

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-n}(E)$$

die perfekte Hülle von $E$ in $FrR$ – aber auch, wie daraus folgt, von $\phi^i(E)$ für beliebiges $i \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt die Aussage. □

Die Normenkörperkonstruktion setzt (vgl. [Win83, 3.2]) die algebraischen Erweiterungen von $K_0^\infty$ (in $\overline{K}$) in eine Äquivalenz zu den separablen Erweiterungen des Normenkörpers $X_{K_0}(K_0^\infty)$: Sie alle sind in $X_{K_0^\infty|K_0}(\overline{K})$ enthalten, welchen wir in Konstruktion 2.3.11 bereits in $FrR$ eingebettet hatten.
Noch genauer haben wir aber sogar eine über den Funktor $X_{K_0}$ bzw. $X_{K_0^\infty|K_0}$ vermittelte Isomorphie zwischen der absoluten Galoisgruppe von $X_{K_0}(K_0^\infty)$ und $H_{K_0} := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_0^\infty)$.
Wir stellen nun fest, daß unsere Einbettung gerade die in [Win83, 3.1] konstruierte funktorielle Wirkung von $H_{K_0}$ auf $X_{K_0^\infty|K_0}(\overline{K})$ in die nach Satz 2.2.5 definierte $H_{K_0}$-Wirkung auf $FrR$ überführt.

**Satz 2.3.13.** *Sei $\alpha \in X_{K_0^\infty|K_0}(\overline{K})$ und $h \in H_{K_0}$. Dann gilt:*

$$\Lambda_{\overline{K}|K_0^\infty|K_0}\left(X_{K_0^\infty|K}(h)(\alpha)\right) = h\left(\Lambda_{\overline{K}|K_0^\infty|K_0}(\alpha)\right)$$

*Einfacher gesagt: $\Lambda$ ist $H$-äquivariant.*

*Beweis.* Nach Definition ist $\alpha \in X_{K_0^\infty|K_0}(L) = X_{K_0}(L)$ für eine endliche Erweiterung $L|K_0^\infty$, welche oBdA als galoissch angenommen werden kann (sonst gehe zur normalen Hülle über). Nach dem Satz vom primitiven Element gibt es ein $\theta \in L$ mit $L = K_0^\infty(\theta)$. Setze für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
$L^n := K_0^n(\theta)$.
Wir sind dann in der Situation von Satz 2.1.2 mit $E_n = K_0^n$, $F = F_0 = L^0$, $F_n = L^n$, $E_\infty = K_0^\infty$ und $F_\infty = L_0^\infty = L$. Nach 2.1.2.i und ii gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $L^n|K_0^n$ galoissch mit $[L^n : K_0^n] = [L : K_0^\infty]$ ist für $n \geqslant N$. Für $n \geqslant N$ gilt außerdem $L^n \cap K_0^{n+1} = K_0^n$. Da $K_0^{n+1}|K_0^n$ zyklisch von Ordnung $p$ ist, also keine Zwischenkörper außer den beiden trivialen besitzt, wäre sonst nämlich $K_0^{n+1} \subseteq L^n$, folglich $L^{n+1} = L^n$. Aus der oben gezeigten Gradgleichheit folgt aber

$$\underbrace{[L^{n+1} : K_0^{n+1}]}_{d} \cdot \underbrace{[K_0^{n+1} : K_0^n]}_{p} = [L^{n+1} : K_0^n] = [L^{n+1} : L^n] \cdot \underbrace{[L^n : K_0^n]}_{d}$$

also genauer $[L_{n+1} : L_n] = p$. Anschaulich:

$$\begin{tikzcd}
L_0 \arrow[dr, dash, "?"] \arrow[dddd, dash, "?"'] & & & & & & & \\
& L^1 \arrow[dr, dash, "?"] \arrow[ddd, dash, "?"] & & & & & & \\
& & L^2 \arrow[dr, dashed, dash] \arrow[dd, dash, "?"] & & & & & \\
& & & L^N \arrow[r, dash, "p"] \arrow[d, dash, "d"] & L^{N+1} \arrow[r, dash, "p"] \arrow[d, dash, "d"] & L^{N+2} \arrow[d, dash, "d"] & --- & L \arrow[d, dash, "d"] \\
K_0 \arrow[r, dash, "p-1"] & K_0^1 \arrow[r, dash, "p"] & K_0^2 \arrow[r, dashed, dash] & K_0^N \arrow[r, dash, "p"] & K_0^{N+1} \arrow[r, dash, "p"] & K_0^{N+2} & --- & K_0^\infty
\end{tikzcd}$$

Die $(L^n)_{n \geqslant N}$ bilden eine kofinale Teilmenge der von Wintenberger mit $\mathcal{E}_{L|K_0}$ bezeichneten Menge der endlichen Erweiterungen von $K_0$ in $L$.
Da $h$ den Körper $K_0^\infty$ punktweise fixiert und $L$ über diesem galoissch ist, induziert $h$ einen Automorphismus von $L$, insbesondere gilt $h(L) = h^{-1}(L) = L$; mit dem gleichen Argument induziert $h$, das ja erst recht alle $K_0^n$ fixiert, Automorphismen auf allen $L^n$ für $n \geqslant N$. Schließlich sind alle $L^n$ in der in [Win83, 3.1.1] betrachteten Menge $\mathcal{E}'_h$, denn hier ist

$$h(L) \underset{h(L) \cap L^n}{\otimes} L^n = L \underset{L^n}{\otimes} L^n \simeq L$$

Definitionsgemäß ist $X_{K_0^\infty|K_0}(h)(\alpha)$ dadurch eindeutig festgelegt, daß an den Stellen zu den Körpern $L^n$ mit $n \geqslant N$ einfach $h(\alpha_{L^n})$ steht; anders gesagt, wirkt $h$ an diesen Stellen direkt auf den Eintrag.
Nun ist jede Komponente von $\Lambda_{L|K_0^\infty|K_0}\left(X_{K_0^\infty|K_0}(h)(\alpha)\right) \in FrR$ gemäß [Win83, 4.2 und 4.2.1] als Limes einer Familie von geeignet potenzierten Komponenten definiert. Da die $(L^n)_{n \geqslant N}$ kofinal sind, reicht es, den Limes über diese zu nehmen, d. h. die $k$-te Komponente von

$\Lambda_{L|K_0^\infty|K_0}\left(X_{K_0^\infty|K_0}(h)(\alpha)\right)$ ist von der Form

$$\lim_{n\to\infty}\left(h(\alpha_{L^n})^{(\text{geeign. p-Potenz})}\right)_{L^n\in\mathcal{E}_k}$$

Da $h$ stetiger Körperautomorphismus ist, ist dies nichts anderes als

$$h\left(\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_{L^n}^{(\text{selbe geeign. p-Potenz})}\right)_{L^n\in\mathcal{E}_k}\right)$$

und dies ist mit einem analogen Argument die $k$-te Komponente von $h\left(\Lambda_{L|K_0^\infty|K}(\alpha)\right)$. $\square$

**Theorem 2.3.14.** *$E_{K_0}^{sep} := (\phi\circ\Lambda_{\overline{K}|K_0^\infty|K})(X_{K_0^\infty|K}(\overline{K}))$ ist eine separabel abgeschlossene, separable Erweiterung von $E_{K_0}$. Sie läßt sich folglich auch charakterisieren als separabler Abschluß von $E_{K_0}$ in $FrR$.*
*Die $H_{K_0}$-Wirkung hierauf identifiziert $H_{K_0}$ mit der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E_{K_0}^{sep}|E_{K_0})$.*

*Beweis.* Der Satz [Win83, 3.2.3] sagt, daß $X_{K_0^\infty|K_0}(\overline{K})$ ein separabler Abschluß von $X_{K_0}(K_0^\infty)$ ist und der Funktor $X_{K_0}$ die Galoisgruppe $H_{K_0}$ mit $\mathrm{Gal}(X_{K_0^\infty|K_0}(\overline{K})|X_{K_0}(K_0^\infty))$ identifiziert. Die Behauptung folgt dann durch Einbettung in $FrR$ über $\phi\circ\Lambda_{\overline{K}|K_0^\infty|K_0}$ gemäß Satz 2.3.10, Konstruktion 2.3.11 und Satz 2.3.13. Hierzu beachte man noch, daß der nur zur Normierung gebrauchte Automorphismus $\phi$ von $FrR$ offenbar $H_{K_0}$-äquivariant ist. $\square$

**Bemerkung 2.3.15.** *Aus Bemerkung 2.3.12 erhalten wir im Spezialfall $L = \overline{K}$, daß $FrR$ die Vervollständigung der perfekten Hülle von $E_{K_0}^{sep}$ ist. Nach Theorem 2.3.14 ist $E_{K_0}^{sep}$ separabel abgeschlossen. Man folgert leicht, daß dessen perfekte Hülle algebraisch abgeschlossen ist. Da sie dicht in $FrR$ liegt, ist auch $FrR$ algebraisch abgeschlossen (vgl. etwa [Schi84, Theorem 17.1]), wie wir in Bemerkung 2.2.4 behauptet hatten.*

Das Diagramm veranschaulicht die Situation:

$X_{\overline{K}|K_0^\infty}(\cdot)$ $\qquad$ $\phi\circ\Lambda_{\overline{K}|K_0^\infty|K}$ $\qquad$ Vervollst. d. perf. Hülle

$$\begin{tikzcd}
\overline{K} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dash, "H_{K_0}"'] & X_{K_0^\infty|K_0}(\overline{K}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dash, "X_{\overline{K}|K_0^\infty}(H_{K_0})"] & E_{K_0}^{sep} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dash, "H_{K_0}"'] & FrR \arrow[d, dash, "\cup"] \\
K_0^\infty \arrow[r, dashed] \arrow[d, dash, "G_{K_0}/H_{K_0}"'] & X_{K_0}(K_0^\infty) \arrow[r, dashed] & E_{K_0} \arrow[r, dashed] & \{(x^{(n)})_n : \text{ alle } x^{(n)} \in \widehat{K_0^\infty}\} \\
K_0 & & &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die ersten drei senkrechten Striche gewissermaßen identisch.

**Bemerkung 2.3.16.** *In [CC99] wird vordergründig nicht mit der hier benutzten Abbildung $\phi\circ\Lambda$ gearbeitet, sondern für jede endliche Erweiterung $K|K_0$ eine Abbildung $\iota_K$ analog zu*

*$\iota_{K_0}$ (s. vor Satz 2.3.8) definiert; das Ergebnis bleibt dasselbe. Dieses Vorgehen mag auf den ersten Blick schöner erscheinen. Jedoch braucht man schon für die Wohldefiniertheit von $\iota_K$ mehr höhere Verzweigungstheorie, auf die wir hier verzichten wollen. Zudem wird auch dort an entscheidender Stelle auf die Arbeit Wintenbergers verwiesen, und es ist anzunehmen, daß für einen genauen Beweis entweder die dortigen Beweise wiederholt oder aber über kommutative Diagramme wie in Satz 2.3.8 doch die $\Lambda$-Abbildungen genutzt werden müssen.*

Wir halten an dieser Stelle für späteren Gebrauch schon fest, daß nicht nur $H_{K_0}$, sondern ganz $G_{K_0}$ auf $E_{K_0}^{sep}$ operiert:

**Satz 2.3.17.** *$E_{K_0}^{sep}$ ist stabil unter der in Satz 2.2.5 definierten $G_{K_0}$-Wirkung auf $FrR$.*

*Beweis.* Sei $g \in G$ und $x_1 \in E_{K_0}^{sep}$, etwa mit Minimalpolynom
$f(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0 \in E_{K_0}[X]$. In $E_{K_0}^{sep}[X]$ geschieht eine Zerlegung

$$f(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - x_i)$$

mit paarweise verschiedenen $x_i$. Da nach Satz 2.2.5 die Elemente von $G$ als Körperautomorphismen, insbesondere injektiv, wirken, sind auch die $g(x_i)$ paarweise verschieden. $g(x_1)$ ist also Nullstelle des separablen Polynoms $\prod_{i=1}^{d}(X - g(x_i)) = X^d + g(a_{d-1})X^{d-1} + ... + g(a_0) \in FrR[X]$, welches wegen der Stabilität von $E_{K_0}$ unter $G$ (Satz 2.3.2) aber wieder in $E_{K_0}[X]$ liegt. Folglich ist $g(x_1)$ separabel über $E_{K_0}$. Die Behauptung folgt mit der Charakterisierung von $E_{K_0}^{sep}$ als separabler Abschluß von $E_{K_0}$ in $FrR$. □

### 2.3.3 Die Körper $E_K$

Sei zunächst eine beliebige abgeschlossene Untergruppe $H$ von $H_{K_0}$ gegeben oder, nach Galoistheorie äquivalent, eine Erweiterung $L|K_0^\infty$ in $\overline{K}$ mit $H = \mathrm{Gal}(\overline{K}|L)$.

**Satz 2.3.18.**

i. *$(FrR)^H = \{(x^{(n)})_n \in FrR : \text{ alle } x^{(n)} \in \hat{L}\}$ ist der Abschluß der perfekten Hülle des Bildes $\left(\phi \circ \Lambda_{L|K_0^\infty|K}\right)(X_{K_0^\infty|K}(L))$ in $FrR$.*

ii. *Sei $E_{K_0}^{sep}$ definiert wie in Theorem 2.3.14. Dann ist obiges Bild genau $(E_{K_0}^{sep})^H$, d. h. wir erhalten durch Einschränkung den Isomorphismus*

$$\phi \circ \Lambda_{L|K_0^\infty|K_0} : X_{K_0^\infty|K_0}(L) \xrightarrow{\sim} (E_{K_0}^{sep})^H$$

*Beweis.*

i. In der Gleichheit $(FrR)^H = \{(x^{(n)})_n \in FrR : \text{ alle } x^{(n)} \in \hat{L}\}$ ist nur „$\supseteq$“ offensichtlich; der Fixkörper $C^H$ könnte größer sein als der Abschluß von $L = \overline{K}^H$ in $C$. Für die andere Inklusion ist daher die Beschreibung von $R$ als projektiver Limes nach 2.2.1 zu nutzen, wo die Repräsentanten in $\overline{K}$ gewählt werden können.[2] Ist damit (nach Übergang zum Quotientenkörper) die Gleichheit etabliert, ist die Aussage bereits in Bemerkung 2.3.12 als Umformulierung von [Win83, 4.3.4] festgehalten worden.

[2] Tatsächlich gilt aber auch $C^H = \hat{L}$, vgl. [Ax70].

ii. Gemäß [Win83, 3.2.1 und 3.2.3] ist

$$\left(X_{K_0^\infty|K}(\overline{K})\right)^{X_{K_0^\infty|K_0}(H)} = X_{K_0^\infty|K_0}(L)$$

Die Behauptung folgt daher aus Satz 2.3.13 und Theorem 2.3.14.

□

**Bemerkung 2.3.19.** $(E_{K_0}^{sep})^H = E_{K_0}^{sep} \cap (FrR)^H$ *läßt sich auch charakterisieren als der separable Abschluß von* $E_{K_0}$ *in* $(FrR)^H = \{(x^{(n)})_n \in FrR:$ *alle* $x^{(n)} \in \hat{L}\}$.

Natürlich ist $E_{K_0} = (E_{K_0}^{sep})^{H_{K_0}}$. Wollen wir nun einer endlichen Erweiterung $K|K_0$ (in $\overline{K}$) einen Teilkörper von $E_{K_0}^{sep}$ zuordnen, so bietet sich an, die abgeschlossene Untergruppe

$$H_K := G_K \cap H_{K_0} = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_0^\infty.K)$$

von $H_{K_0}$ zu betrachten. Man beachte im übrigen, daß mit $K^n := K(\mu_{p^n})$ und $K^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K^n$ auch $K_0^n.K = K^n$ für alle $n \in N_0 \cup \{\infty\}$ ist; definitionsgemäß ist $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K^\infty)$.

**Definition 2.3.20.** Setze

$$E_{K|K_0} := (E_{K_0}^{sep})^{H_K}$$

**Beispiel 2.3.21.** Ist $K|K_0$ ein Teilkörper von $K_0^\infty$, so gilt $H_K = H_{K_0}$ und folglich $E_{K|K_0} = E_{K_0}$.

Aus Satz 2.3.18.ii folgt sofort:

**Satz 2.3.22.** *Ist* $K|K_0$ *eine endliche Erweiterung, so ist* $E_{K|K_0}$ *isomorph zu* $X_{K_0}(K^\infty)$*, dem Normenkörper der Erweiterung* $K^\infty|K_0$.

Weiter gilt:

**Satz 2.3.23.**

*i. Seien* $K$ *und* $L$ *zwei endliche Erweiterungen von* $K_0$*, so daß* $K \subset L^\infty$ *gilt (etwa wenn schon* $K \subseteq L$ *ist). Dann ist auch* $E_{K|K_0} \subseteq E_{L|K_0}$*, die Erweiterung ist separabel und hat den Grad* $[E_{L|K_0} : E_{K|K_0}] = [H_K : H_L] = [L^\infty : K^\infty] \leqslant [L : K]$.

*ii. Ist in obiger Situation* $L|K$ *galoissch, so auch* $E_{L|K_0} \mid E_{K|K_0}$*, und die Galoisgruppe hiervon identifiziert sich mit* $H_K/H_L$.

*Beweis.*

i. $K \subset L^\infty \Rightarrow K^\infty \subseteq L^\infty \Rightarrow H_L \subseteq H_K \Rightarrow E_{K|K_0} = (E_{K_0}^{sep})^{H_K} \subseteq (E_{K_0}^{sep})^{H_L} = E_{L|K_0}$. Da sich alles in $(E_{K_0}^{sep})$ abspielt, ist die Erweiterung separabel. Die (Un-)Gleichungen über den Grad folgen aus der Galoistheorie (vgl. etwa [SuS88, Lemma 92.11]).

ii. $L|K$ normal $\Leftrightarrow G_L$ Normalteiler in $G_K \Rightarrow H_L$ Normalteiler in $H_K \Leftrightarrow E_{L|K_0} \mid E_{K|K_0}$ normal. Da nach i. diese Erweiterung zudem separabel ist, ist sie galoissch und die Behauptung folgt nach Galoistheorie.

□

Störend mag noch die Abhängigkeit von $K_0$ erscheinen. Üblicherweise wird zu einem vorgegebenen lokalen Körper $K$ mit Restkörper $k_K$ stets $K_0$ als der Quotientenkörper von $W(k_K)$, also als der maximale absolut unverzweigte Teilkörper von $K$ gewählt. Der folgende Satz und dessen Corollar zeigen, daß dies nicht allzu willkürlich ist.

**Satz 2.3.24.** *Ist $F_0|K_0$ eine unverzweigte endliche Erweiterung, $k_{F_0}$ der Restklassenkörper von $F_0$, so ist $E_{F_0|K_0} = k_{F_0}((\epsilon-1)) \subset FrR$.*

*Beweis.* $H_{F_0}$ fixiert $k_{F_0} \subset \bar{k} \subset FrR$ (vgl. 2.2.2.iii), d. h. $k_{F_0} \subseteq E_{F_0|K_0}$; also auch

$$k_{F_0}.E_{K_0} = k_{F_0}.k((\epsilon-1)) \subseteq E_{F_0|K_0} \tag{2.3}$$

Andererseits ist $k_{F_0}.k((\epsilon-1)) = k_{F_0}((\epsilon-1))$, und dieser Körper hat über $E_{K_0}$ den Grad

$$[k_{F_0} : k] \overset{\text{unverzweigt}}{=} [F_0 : K_0] \overset{2.3.23}{\geqslant} [E_{F_0|K_0} : E_{K_0}]$$

Es muß also in (2.3) schon Gleichheit gelten. □

**Corollar 2.3.25.** *Sei $F_0$ ein Zwischenkörper der endlichen Erweiterung $K|K_0$, welcher absolut unverzweigt ist; d. h. $F_0$ ist von der Gestalt* $\operatorname{Quot} W(k_{F_0})$ *mit einer endlichen Erweiterung $k_{F_0}|k$. Dann ist $E_{K|K_0} = E_{K|F_0}$.*

*Beweis.* Indem wir alle Konstruktionen analog für $F_0, k_{F_0}$ und die Erweiterung $F_0^\infty|F_0$ durchführen, erhalten wir $E_{F_0} = k_{F_0}((\epsilon-1)) \subset FrR$. Dies ist nach Satz 2.3.24 auch der Körper $E_{F_0|K_0}$, der eine separable Erweiterung von $E_{K_0}$ ist. Insbesondere sind gemäß Theorem 2.3.14 die Körper $E_{K_0}^{sep}$ und $E_{F_0}^{sep}$ identisch. Zudem gilt wegen $F_0 \subseteq K$ die Gleichheit $K_0^\infty.K = F^\infty.K$, also $\operatorname{Gal}(\overline{K}|K_0^\infty.K) = \operatorname{Gal}(\overline{K}|F^\infty.K)$ und damit

$$E_{K|K_0} = (E_{K_0}^{sep})^{\operatorname{Gal}(\overline{K}|K_0^\infty.K)} = (E_{F_0}^{sep})^{\operatorname{Gal}(\overline{K}|F^\infty.K)} = E_{K|F_0}$$

□

Sei also ab jetzt $K$ ein beliebiger lokaler Körper mit Restklassenkörper $k$ und $K_0 = \operatorname{Quot}(W(k)) \subseteq K$. Wir verzichten von nun an in der Bezeichnung auf $K_0$:

**Definition und Bemerkung 2.3.26.** Setze $E_K := E_{K|K_0}$.
Ist $K$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, so ist gemäß Corollar 2.3.25 auch $E_K = E_{K|\mathbb{Q}_p}$. (So wird der Körper in [CC99] eingeführt.)

Wir möchten $E_K$ als lokalen Körper noch expliziter beschreiben. Für absolut unverzweigtes $K$ ist $E_K = k((\epsilon-1))$. Satz 2.3.23 liefert bereits ein wenig Struktur für den allgemeinen Fall: $E_K$ ist jedenfalls eine endliche separable Erweiterung von $k((\epsilon-1))$, also von der Gestalt $l((T))$ mit einer endlichen Erweiterung $l|k$. Genauer:

**Satz 2.3.27.** *Es ist $E_K = k^\infty((\bar{\pi}_K))$, wobei*
*– $k^\infty$ der Restklassenkörper von $K^\infty$, und*
*– $\bar{\pi}_K$ Nullstelle eines (separablen, irreduziblen) Eisensteinpolynoms vom Grad $e := \dfrac{[H_{K_0} : H_K]}{[k^\infty : k]}$,*
*d. h.*

$$X^e + a_{e-1}X^{e-1} + ... + a_1X + a_0 \in (k^\infty[[\epsilon-1]])\,[X]$$

*mit $(\epsilon-1)|a_i$, $(\epsilon-1)^2 \nmid a_0$ ist.*

*Beweis.* Es reicht, die Behauptung über $k^\infty$ zu zeigen. Dann ist nämlich $[k^\infty : k]$ der Trägheitsgrad der Erweiterung $E_K|E_{K_0}$ (die nach Satz 2.3.23 Grad $[H_{K_0} : H_K]$ hat), d. h. $e$ ist der Verzweigungsindex und $k^\infty((\epsilon - 1))$ die maximale unverzweigte Teilerweiterung von $E_K|E_{K_0}$, und die Aussage über $\overline{\pi}_K$ folgt etwa aus [Ser68, chap. I, § 6, prop. 17 und 18].
Sei also $l$ der Restklassenkörper von $E_K$ und zeigen wir $l = k^\infty$. Wie schon bemerkt, ist $l$ jedenfalls eine endliche Erweiterung von $k$ und liegt insbesondere in $\bar{k} \subset FrR$. Genauer ist

$$l = \bar{k} \cap (FrR)^{H_K} = \bar{k}^{H_K}$$

wobei $H_K$ auf $\bar{k}$ zunächst wie in Satz 2.2.2.iii und Satz 2.2.5 wirkt. Man überzeugt sich aber mit diesen Sätzen leicht davon, daß die Wirkung auf $\bar{k}$ tatsächlich dieselbe ist wie diejenige, die von der $H_{K_0}$-Wirkung auf $\overline{K}$ auf $\bar{k} = \mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ induziert wird. Folglich ist $l$ der Restklassenkörper von $K^\infty$, also $k^\infty$. (Alternativ könnte man schlicht auf Satz 2.3.22 sowie [Win83, 2.1.3.(ii)] verweisen, wonach der Restkörper des Normenkörpers $X_{K_0}(K^\infty)$ genau $k^\infty$ ist.) $\square$

**Corollar 2.3.28.** *Definiere in obiger Situation* $F := \mathrm{Quot}(W(k^\infty))$, *die maximale unverzweigte Teilerweiterung von* $K^\infty|K_0$. *Dann ist* $e = [K^\infty : F^\infty]$.

*Beweis.* Es ist $F \subset K^\infty$ eine endliche Erweiterung von $K_0$, also ist nach Satz 2.3.23 (Vorsicht: umgekehrte Bezeichnungen) $[E_K : E_F] = [K^\infty : F^\infty]$. Wegen Satz 2.3.24 ist andererseits $E_F = k^\infty((\epsilon - 1))$, also nach dem letzten Satz $e = [E_K : E_F]$. $\square$

**Beispiel 2.3.29.** Daß der Restklassenkörper von $E_K$ tatsächlich größer werden kann als der von $K$, zeigt etwa das Beispiel $K = \mathbb{Q}_3(\sqrt{3})$, $k = \mathbb{F}_3$, $K_0 = \mathbb{Q}_3$. Da nämlich $\frac{\sqrt{-3}-1}{2}$ eine primitive dritte Einheitswurzel ist, ist

$$K^1 = K(\mu_3) = K_0^1.K = \mathbb{Q}_3(\sqrt{3}, \sqrt{-3}) = \mathbb{Q}_3(\sqrt{3}, \sqrt{-1})$$

Folglich enthält $K(\mu_3)$ die vierten Einheitswurzeln und damit eine echte unverzweigte Erweiterung. Indem man etwas mit den Körpergraden, Trägheitsgraden und Verzweigungsindizes hantiert, erhält man: Zwar ist $K|K_0$ (wie stets) rein verzweigt, aber

- für $1 \leqslant n \leqslant \infty$ ist $K^n|K_0^n$ unverzweigt vom Grad $2 = [H_{K_0} : H_K]$;
- $K^\infty|K_0 = \mathbb{Q}_3(\mu_{3^\infty})(\sqrt{3})|\mathbb{Q}_3$ hat als maximale unverzweigte Teilerweiterung

$$F = \mathbb{Q}_3(\sqrt{-1}) = \mathrm{Quot}(W(\mathbb{F}_9)) \subset K(\mu_3)$$

Es folgt $E_K = \mathbb{F}_9((\epsilon - 1))$. Also ist auch $E_K|E_{K_0}$ unverzweigt, und $E_K$ hat ebenso wie $K^\infty = F^\infty$ Restklassenkörper $k^\infty = \mathbb{F}_9$.

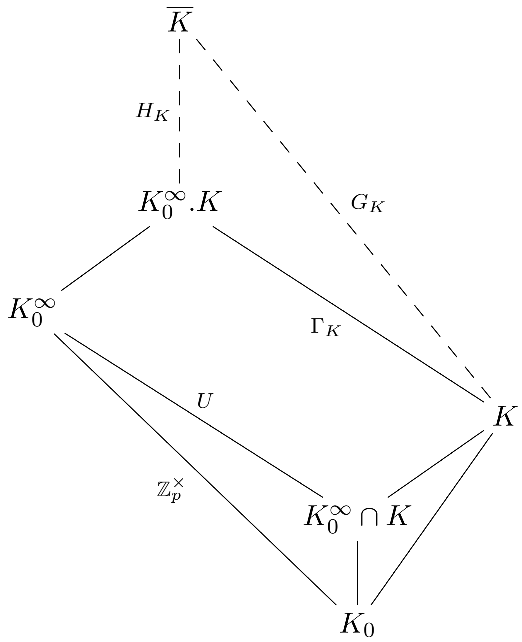
**Bemerkung 2.3.30.** *In [CC99, Remarque I.1.2.ii)] ist höchstwahrscheinlich (in unserer Notation)* $F = K^\infty \cap \mathbb{Q}_p^{nr}$ *und damit unser obiges* $F$ *gemeint. Selbst mit dieser Änderung ist der dortige Beweis unschön; ohne sie ist er falsch.*
*Die Gradgleichheit stimmt zwar in beiden Fällen: Für* $F = K \cap \mathbb{Q}_p^{nr}$ *(d. h.* $F = K_0$*) ist sie wegen der Bemerkung in 2.3.26 mit Satz 2.3.23 allerdings beinahe trivial. Für das abgeänderte* $F = K^\infty \cap \mathbb{Q}_p^{nr}$ *haben wir sie in Corollar 2.3.28 gezeigt.*
*Aber der in [CC99] gegebene Beweis, genauer der Satz „Ceci implique que* $v_E(\iota_K(\omega)) = \frac{1}{[K_\infty:F_\infty]} v_E(\pi)$*" ist nur richtig, wenn die Erweiterung* $K^\infty|F^\infty$ rein verzweigt *ist. Dies stimmt definitionsgemäß für unser geändertes* $F$, *aber im allgemeinen nicht für* $K_0$, *wie etwa obiges*

*Beispiel zeigt. In [loc. cit., Proposition V.2.4.] scheint der Tippfehler beseitigt zu sein. – Im übrigen kommt unser Beweis ohne die im allgemeinen Fall nicht gegebene lokale Kompaktheit von $K$ aus und ist zumindest nicht weniger konstruktiv.*

### 2.3.4 Die Operation von $\Gamma$

Kommen wir schließlich zur Wirkung von $G_K$ auf $E_K$.

Vorab: Nach Galoistheorie ist $K^\infty|K = K_0^\infty.K|K$ galoissch, und die Galoisgruppe ist isomorph zu $\mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0^\infty \cap K)$, welche wiederum (algebraisch und topologisch) isomorph zu einer offenen Untergruppe $U \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$ ist. Anders gesagt, ist $H_K$ Normalteiler in $G_K$, und $G_K/H_K =: \Gamma_K$ „ist“ eine offene Untergruppe $U \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$. Das Diagramm faßt die Situation zusammen:




**Satz 2.3.31.** *$E_K$ ist stabil unter der in 2.2.5 definierten Wirkung von $G_K \leq G_{K_0}$.*

*Beweis.* Sei $g \in G_K, x \in E_K$. Definitionsgemäß ist $E_K = (E_{K_0}^{sep})^{H_K}$; nach 2.3.17 ist jedenfalls $gx \in E_{K_0}^{sep}$. Sei nun $h \in H_K$ beliebig. Da $H_K$ Normalteiler in $G_K$ ist, existiert ein $h' \in H_K$ mit $hg = gh'$. Es folgt

$$h(gx) = (hg)x = (gh')x = g(h'x) \overset{x \in (E_{K_0}^{sep})^{H_K}}{=} gx$$

Also ist $gx \in (E_{K_0}^{sep})^{H_K} = E_K$. ☐

Definitionsgemäß wirkt dabei $H_K$ trivial. Mit Satz 2.2.7 folgt:

**Satz 2.3.32.** *Die Wirkung von $G_K \leq G_{K_0}$ definiert (nach Einschränkung und Quotientenbildung) eine stetige Wirkung von $\Gamma_K$ auf $E_K$.*

**Beispiel 2.3.33.** Ist mit den Bezeichnungen von 2.3.5 $K = K_0^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so ist

$$E_{K_0^n} = k((\epsilon - 1)) \ \ (2.3.21 \text{ und } 2.3.3)$$

$$\Gamma_{K_0^n} = \mathrm{Gal}(K_0^\infty | K_0^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1) \times (1+p\mathbb{Z}_p,\,\cdot) \text{ falls } n = 0 \\ (1+p^n\mathbb{Z}_p,\,\cdot) \text{ falls } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Hier läßt sich die Wirkung mit 2.2.10 sogar explizit angeben: Sei $\gamma \in \Gamma_{K_0^n}$, dann ist $\gamma\,|_k = id_k$ und $\gamma(\epsilon) = \epsilon^{\chi(g)}$, oder mit $T := \epsilon - 1$:

$$\gamma(T) = (1+T)^{\chi(g)} - 1$$

wobei $g \in G_{K_0^n} \subseteq G_{K_0}$ ein Lift von $\gamma$ und $\chi$ der zyklotomische Charakter ist. Dieser ist aber gerade so gemacht, daß er zu den oben angegebenen Isomorphismen „paßt". Das heißt: Identifizieren wir $\Gamma_{K_0} = \mathbb{Z}_p^\times$ und für $n \geqslant 1$ $\Gamma_{K_0^n} = (1+p^n\mathbb{Z}_p,\,\cdot)$, so ist die Wirkung durch $\gamma(T) = (1+T)^\gamma - 1$ gegeben.

Wir sehen an diesem Beispiel, wie ein Teil der Information in der Gestalt von $E_{K_0^n}$ codiert wird, ein anderer in der Operation von $\Gamma_{K_0^n}$.

Man beachte noch, daß zwar fast alle $\Gamma_{K_0^n}$ als topologische Gruppen isomorph sind: Vermöge des $p$-adischen Logarithmus und Division durch eine geeignete $p$-Potenz ist $\Gamma_{K_0^n}$ nämlich für $n \geqslant 1$ (für $p \neq 2$) bzw. $n \geqslant 2$ ($p = 2$) topologisch und algebraisch zu $(\mathbb{Z}_p, +)$ isomorph. Entscheidend ist aber, daß die *Operation* jeweils eine andere ist, wie man an der obigen multiplikativen Schreibweise sieht.

## 2.4 Konstruktion nach Fontaine ($\Gamma = (\mathbb{Z}_p, +)$)

Die Konstruktion in [Fon90] unterscheidet sich in einigen Nuancen von der bisher dargestellten. Sie läßt sich aber mit den nun vorliegenden Ergebnissen leichter durchführen, weswegen sie hier im Anschluß dargestellt wird. Die konstruierten Körper werden wir wie Fontaine mit $E(K)$ bezeichnen.
Im wesentlichen wird (für $p \neq 2$)[3] der Körper $K_0^\infty$, der durch Adjunktion aller $p$-Potenz-Einheitswurzeln zu $K_0$ entsteht, durch die darin enthaltene *zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung* ersetzt, die wir wie Fontaine mit $K_\infty$ bezeichnen. Dies führt insbesondere dazu, daß die Gruppe $\Gamma$ stets $(\mathbb{Z}_p, +)$ statt eine erst zu bestimmende Untergruppe von $\mathbb{Z}_p^\times$ ist. Die besondere Form der $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung macht einen Trick möglich, der in der zu Satz 2.3.23 analogen Aussage eine Gradgleichheit $[E(L) : E(K)] = [L : K]$ erzwingt.

### 2.4.1 Die zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung

Wir hatten oben $\mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0)$ als $\mathbb{Z}_p^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1) \times (\mathbb{Z}_p, +)$ bestimmt. Die zyklische Untergruppe läßt sich folgendermaßen beschreiben: Für $a \in \mathbb{F}_p^\times (\simeq \mathbb{Z}/(p-1))$ sei $[a]$ der Teichmüllerrepräsentant in $\mathbb{Z}_p$, d. h. für einen Lift $\hat{a} \in \{1, ..., p-1\}$ diejenige $(p-1)$-te Einheitswurzel, welche modulo $p$ kongruent zu $\hat{a}$ ist. Für $n \in \mathbb{N}_0$ wähle $\overline{[a]}$ als einen Repräsentanten in $\mathbb{Z}$ von $[a]$ modulo $p^n$. Dann definiert

$$g_{a,n} : \epsilon^{(n)} \mapsto (\epsilon^{(n)})^{\overline{[a]}}$$

einen $K_0$-Automorphismus von $K_0^n$. Diese sind miteinander verträglich, ergeben also eine Automorphismus

$$g_a : K_0^\infty \to K_0^\infty$$

Die $g_a$ fixieren (viel mehr als) $K_0$, liegen also in $\mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0)$; offenbar ist $\mathbb{F}_p^\times \to \mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_0)$ ($a \mapsto g_a$) ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Die $g_a$ bilden daher genau die gesuchte Untergruppe, denn $(\mathbb{Z}_p, +)$ ist torsionsfrei. Sei

$$K_\infty := (K_0)_\infty := (K_0^\infty)^{\mathbb{F}_p^\times}$$

der zugehörige Fixkörper. Nach Galoistheorie ist also $\mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_\infty) = \mathbb{F}_p^\times$ und $\mathrm{Gal}(K_\infty|K_0) = (\mathbb{Z}_p, +)$. Aus naheliegenden Gründen heißt $K_\infty$ die <u>zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung</u> (von $K_0$).

**Bemerkung 2.4.1.** *Da die offenen Untergruppen von $(\mathbb{Z}_p, +)$ genau die $(p^n\mathbb{Z}_p, +)$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind, gibt es in $K_\infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau eine endliche Teilerweiterung $K_n|K_0$ vom Grad $p^n$, und umgekehrt ist jede endliche Teilerweiterung eines dieser $K_n$. Wir haben einen Körperturm $K_0 \subset K_1 \subset ...$, und es gilt $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \geqslant m$ ist $K_n|K_m$ zyklisch vom Grad $p^{n-m}$. Die gesamte Erweiterung $K_\infty|K_0$ ist rein verzweigt.*

Wegen [Win83, 1.2.3.(ii)] läßt sich auch zur Erweiterung $K_\infty|K_0$ der Normenkörper $X_{K_0}(K_\infty)$ bilden. Wir werden ihn in $X_{K_0}(K_0^\infty)$ und dann in $E_{K_0}$ wiederfinden. Zur Orientierung möge vorab das folgende Diagramm dienen:

[3] Für $p = 2$ benutzt auch Fontaine $K_0^\infty$. Im folgenden sei der Fall $p = 2$ stillschweigend ausgeschlossen.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & FrR \\
 & & & & \cup \\
 & & X_{K_0}(K_0^\infty) & \xrightarrow[\sim]{\phi\circ\Lambda_{K_0^\infty|K}} & E_{K_0}(=E(K_0^1)) \\
 & & \cup & (2.3.10) & \cup \\
X_{K_0}(K_\infty) & \xrightarrow[\sim]{X_{K_0}(i)} & X_{K_0}(i)\,(X_{K_0}(K_\infty)) & \xrightarrow{\sim} & E(K_0)
\end{array}$$

### 2.4.2 Der Körper $E(K_0)$

**Satz 2.4.2.** *Sei $i : K_\infty \hookrightarrow K_0^\infty$ die Inklusion. Dann ist $X_{K_0}(i)\,(X_{K_0}(K_\infty))$ der Fixkörper von $\{X_{K_0}(g_a) | a \in \mathbb{F}_p^\times\}$ in $X_{K_0}(K_0^\infty)$.*

*Beweis.* Folgt aus [Win83, 3.1.2] mit $K = K_0$, $\tau = i$, $L = K_\infty$, $L' = K_0^\infty$. □

Die Wirkung der $X_{K_0}(g_a)$ auf $X_{K_0}(K_0^\infty)$ läßt sich ebenfalls mit [Win83, 3.1.1], diesmal mit $\tau = g_a$, $L = L' = \tau L = K_0^\infty$, leicht beschreiben:
Für die dortigen $E'$ können wir die $K_0^n$ nehmen, denn sie erfüllen $K_0^\infty \underset{K_0^n}{\otimes} K_0^n = K_0^\infty$, und die Familie $(K_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist kofinal in der Familie der Teilerweiterungen von $K_0^\infty|K_0$. Dann ist die Operation auf $\epsilon$ durch

$$(X_{K_0}(g_a))\left((\epsilon^{(n)})_{K_0^n}\right) = \left((\epsilon^{(n)})^{\overline{[a]}}\right)_{K_0^n}$$

gegeben, während $X_{K_0}(g_a)$ auf dem Restklassenkörper $k$ bzw. dessen multiplikativem Vertretersystem in $X_{K_0}(K_0^\infty)$ (vgl. [Win83, 2.1.2]) trivial wirkt, denn alle Komponenten dieser Vertreter liegen in $K_0$.

Noch einfacher übersetzt sich die Wirkung nach Einbettung in $FrR$:

**Lemma 2.4.3.** *Sei $a \in \mathbb{F}_p^\times$. Dann ist*

$$\left(\phi \circ \Lambda_{K_0^\infty|K_0}\right)\left((X_{K_0}(g_a))(\epsilon^{(n)})_{K_0^n}\right) = \epsilon^{[a]}$$

*Beweis.* Dies folgt aus dem vorher gesagten in Verbindung mit Satz 2.3.8 und der Bemerkung 2.2.9. □

Da die $X_{K_0}(g_a)$ Körperautomorphismen sind, haben wir mit diesem Lemma die zugehörige Operation von $\mathbb{F}_p^\times = \mathrm{Gal}(K_0^\infty|K_\infty)$ auf $E_{K_0} = k((\epsilon - 1)) \subset FrR$ vollständig beschrieben: $\epsilon$ wird auf $\epsilon^{[a]}$ abgebildet, $k$ wird fixiert. Die induzierten Körperautomorphismen sind wegen $[a] \in \mathbb{Z}_p^\times$ und Corollar 2.2.11 zudem isometrisch. Mit Lemma 1.1.14 folgt:

**Theorem 2.4.4.** *Setze $E(K_0) := (E_{K_0})^{\mathbb{F}_p^\times}$ und $S(K_0) := (S_{K_0})^{\mathbb{F}_p^\times}$.*
*Dann ist $E(K_0)$ ein lokaler Körper, enthält $k$ als Vertretersystem seines Restklassenkörpers, und ist (über $\phi \circ \Lambda_{K_0^\infty|K_0} \circ X_{K_0}(i)$) isomorph zum Normenkörper der Erweiterung $K_\infty|K_0$.*
*Die Erweiterung $E_{K_0}|E(K_0)$ ist rein verzweigt und galoissch mit Galoisgruppe $\mathbb{F}_p^\times$.*

Für $E_{K_0}$ hatten wir $\epsilon - 1$ als uniformisierendes Element mit $v_{FrR}(\epsilon - 1) = \frac{p}{p-1}$. Nach dem letzten Satz taugt daher jedes Element von $E(K_0)$ mit Bewertung $p$ als uniformisierendes Element für $E_{K_0}$. Ein solches läßt sich konkret angeben:

**Definition und Lemma 2.4.5.** *Setze*

$$\tilde{\pi}_0(\epsilon) := \sum_{a\in\mathbb{F}_p} \epsilon^{[a]}$$

*Die Abhängigkeit von $\epsilon$ unterschlagen wir im folgenden.*
*$\tilde{\pi}_0$ ist ein uniformisierendes Element von $E(K_0)$, d. h. $S(K_0) = k[[\tilde{\pi}_0]]$ und $E(K_0) = k((\tilde{\pi}_0))$.*

*Beweis.* Definitionsgemäß ist $\tilde{\pi}_0 = 1 + Tr_{E_{K_0}|E(K_0)}(\epsilon)$, liegt also in $E(K_0)$. Weniger simpel ist die Berechnung der Bewertung:
Behauptung: $v_{FrR}(\tilde{\pi}_0) = p$.
Beweis: Setze $\zeta := \epsilon^{(1)}$ und $\xi := \epsilon^{(2)}$, so daß also $\xi^p = \zeta$. Rechnen wir modulo $(1-\zeta) \supset (p)$, so vertauscht das Potenzieren mit $p$-Potenzen mit Summenbildung. Identifizieren wir $\{0, ..., p-1\}$ mit $\mathbb{F}_p$, so erhalten wir für die zweite Komponente von $\tilde{\pi}_0$:

$$\tilde{\pi}_0^{(2)} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \xi^{[i]} \bmod (1-\zeta)$$

Wegen $[i] \equiv i \bmod p$ sowie $1 - \zeta^k \equiv 0 \bmod (1-\zeta)$ für alle $k \in \mathbb{Z}_p$ ist

$$\xi^i - \xi^{[i]} = \xi^i(1 - \zeta^{\frac{[i]-i}{p}}) \equiv 0 \bmod (1-\zeta)$$

also

$$\tilde{\pi}_0^{(2)} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \xi^i \bmod (1-\zeta)$$

Nun ist aber in $\mathcal{O}_C$

$$v_C\left(\sum_{i=0}^{p-1} \xi^i\right) = v_C\left(\frac{\xi^p - 1}{\xi - 1}\right) = v_C(\zeta - 1) - v_C(\xi - 1) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p}$$

also wegen $v_C(1-\zeta) = 1/(p-1) > 1/p$ und der strengen Dreiecksungleichung (bzw. dem daraus folgenden „Maximumsprinzip“) auch

$$v_C(\tilde{\pi}_0^{(2)}) = \frac{1}{p}$$

Mit Satz 2.2.2.iv folgt $v_{FrR}(\tilde{\pi}_0) = p^2 \cdot \frac{1}{p} = p$. □

### 2.4.3 Die Körper $E(K)$

Wir können jetzt Konstruktionen analog zu 2.3.11 durchführen. Man beachte hierfür noch, daß tatsächlich $\Lambda_{K_0^\infty|K_0} |_{X_{K_0}(K_\infty)} = \Lambda_{K_\infty|K_0}$ (vgl. [Win83, 4.3.1] mit $L' = K_0^\infty, L = K_\infty, K_1' = K_0^1$; wegen $K_0^1.K_\infty = K_0^\infty$ ist $q^{L'} = 1$). Wir setzen also

$$\phi \circ \Lambda_{\overline{K}|K_\infty|K_0} : X_{K_\infty|K_0}(\overline{K}) \hookrightarrow FrR$$

als Fortsetzung von

$$\phi \circ \Lambda_{K_\infty|K_0} : X_{K_0}(K_\infty) \xrightarrow{\simeq} E(K_0)$$

Statt $H_{K_0} = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_0^\infty)$ haben wir jetzt natürlich $H(K_0) := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_\infty)$ zu betrachten.

**Satz 2.4.6** (vgl. Satz 2.3.13). *$\phi \circ \Lambda_{\overline{K}|K_\infty|K_0}$ überführt die Wirkung von $H(K_0)$ auf $X_{K_\infty|K_0}(\overline{K})$ in die auf $FrR$ gemäß 2.2.5 definierte.*

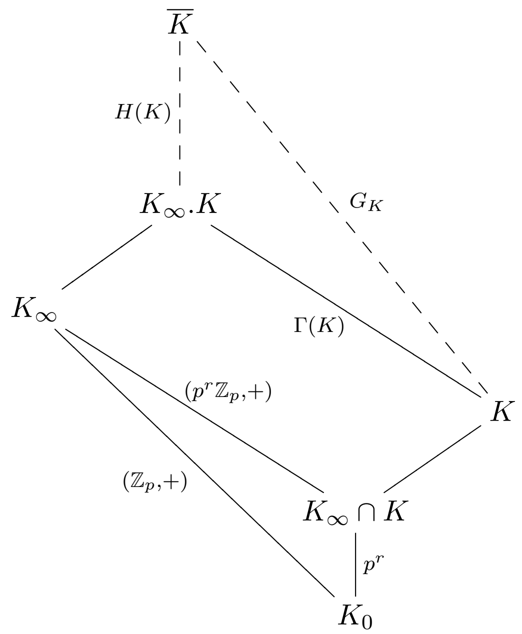
*Beweis.* Analog zu 2.3.13, wobei nun nicht mehr die Kreisteilungskörper $K_0^n = K_0(\mu_{p^n})$, sondern die jeweils eindeutigen Zwischenkörper $K_n$ der $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung $K_\infty|K_0$ vom Grad $p^n$ zu benutzen sind. Auch hier ist $K_{n+1}|K_n$ zyklisch vom Grad $p$. Entsprechend ist $L_n := K_n(\theta) = L_0.K_n$ zu setzen. Für hinreichend große $n$ ist wiederum $L_n|K_n$ galoissch, der Rest des Beweises funktioniert entsprechend. □

**Theorem 2.4.7** (vgl. Theorem 2.3.14). *$X_{K_\infty|K_0}(\overline{K})$ ist (über $\phi \circ \Lambda_{\overline{K}|K_\infty|K_0}$) isomorph zu $E(K_0)^{sep}$, dem separablen Abschluß von $E(K_0)$ in $FrR$. Die Wirkung von $H(K_0)$ hierauf identifiziert $H(K_0)$ mit $\mathrm{Gal}(E(K_0)^{sep}|E(K_0))$.*

Man beachte: Da $E(K_0)|E_{K_0}$ separabel ist, ist $E(K_0)^{sep}$ identisch mit dem zuvor betrachteten $E_{K_0}^{sep}$.

Wir könnten so fortfahren und analog zu Definition 2.3.20 zu jeder endlichen Erweiterung $K|K_0$ die Gruppe $H(K) := H(K_0) \cap G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_\infty.K)$ und einen Körper $(E(K_0)^{sep})^{H(K)}$ definieren, der Eigenschaften analog zu denen in Satz 2.3.23 hat. Wir können aber durch Abänderung der Konstruktion eine dortige Unschönheit beseitigen.

Wir sind in der Situation von Satz 2.1.2.iii (mit $F = K$, $E_n = K_n$ und $F_\infty = K_\infty.K$), denn nach Bemerkung 2.4.1 ist $(K_\infty \cap K)|K_0$ als endliche Teilerweiterung von $K_\infty|K$ von der Form $K_r$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$; ihr Grad über $K_0$ ist $p^r$. Zudem ist $K_n|K_r$ sogar für alle $n \geqslant r$ galoissch. Nach jenem Satz haben daher im Körperdiagramm




die linke obere und rechte untere Erweiterung denselben Grad[4].

[4] den [Her98], S. 570, $d_K$ nennt, worauf aber auch ein Druckfehler folgt; in seiner Notation müßte dort entweder $[K_\infty : (K_0)_\infty]$ (hier die Erweiterung oben links) oder $[K : K \cap (K_0)_\infty]$ (unten rechts) stehen.

Es folgt:

**Definition und Lemma 2.4.8.** *Definiere $r(K|K_0)$ durch die Gleichung $[K_\infty \cap K : K_0] = p^{r(K|K_0)}$. Dann ist*

$$p^{r(K|K_0)} \cdot [(E(K_0)^{sep})^{H(K)} : E(K_0)] = [K : K_0]$$

*Beweis.* Wie gesagt ist wegen Satz 2.1.2.iii

$$[K_\infty.K : K_\infty] = [K : K_\infty \cap K]$$

und damit

$$[(E(K_0)^{sep})^{H(K)} : E(K_0)] \cdot p^{r(K|K_0)} = [K.K_\infty : K_\infty] \cdot p^{r(K|K_0)}$$

$$= [K : K_\infty \cap K] \cdot [K_\infty \cap K : K_0] = [K : K_0]$$

□

**Definition 2.4.9.** Setze

$$E(K|K_0) := \phi^{-r(K|K_0)} \left( (E(K_0)^{sep})^{H(K)} \right) = \left( \phi^{-r(K|K_0)} (E(K_0)^{sep}) \right)^{H(K)} \subset FrR$$

**Bemerkung 2.4.10.** *Sei wieder $K_0^1 = K_0(\mu_p)$ (in [Fon90] auch mit $K_0'$ bezeichnet). Wegen $K_0^1 \cap K_\infty = K_0$ ist $r(K_0^1|K_0) = 0$. Zudem ist $H(K_0^1) = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_0^1.K_\infty) = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_0^\infty) = H_{K_0}$. Folglich ist $E(K_0^1) = E_{K_0} = k((\epsilon - 1))$.*

$(E(K_0)^{sep})^{H(K)}$ ist jedenfalls eine endliche Erweiterung von $k((\tilde{\pi}_0))$, also selbst von der Form $l((T))$ für eine endliche Erweiterung $l|k$; mit $k$ ist auch $l$ perfekt. Der Körper $E(K|K_0)$ ist dann von der Form $l((t))$ mit $T = t^{p^{r(K|K_0)}}$, d. h. eine rein inseparable Erweiterung von $l((T))$ vom Grad $p^{r(K|K_0)}$.

**Satz 2.4.11** (vgl. Satz 2.3.23)**.**

i. *Sind $K \subseteq L$ zwei endliche Erweiterungen von $K_0$, so gilt $E(K|K_0) \subseteq E(L|K_0)$. Die Erweiterung hat den Grad $[E(L|K_0) : E(K|K_0)] = [L : K]$; ihr Inseparabilitätsgrad ist $p^{(r(L|K_0) - r(K|K_0))}$.*

ii. *Ist in obiger Situation $L|K$ galoissch, so ist $E(L|K_0) \mid E(K|K_0)$ normal, und $\mathrm{Aut}(E(L|K_0) \mid E(K|K_0))$ identifiziert sich mit $H(K)/H(L)$.*

*Beweis.*

i. Wegen $H(L) \subseteq H(K)$ ist wieder $(E(K_0)^{sep})^{H(K)} \subseteq (E(K_0)^{sep})^{H(K)}$ und wegen $r(L|K_0) \geqslant r(K|K_0)$ folglich

$$E(K|K_0) = \phi^{-r(K|K_0)} \left( (E(K_0)^{sep})^{H(K)} \right) \subseteq \phi^{-r(L|K_0)} \left( (E(K_0)^{sep})^{H(L)} \right) = E(L|K_0)$$

Wir zerlegen die Erweiterung $E(L|K_0) \mid E(K|K_0)$ nun wie folgt:

$$\begin{array}{c} E(L|K_0) \\ \| \\ \phi^{-(r(L|K_0)-r(K|K_0))}\left(\phi^{-r(K|K_0)}\left((E(K_0)^{sep})^{H(L)}\right)\right) \\ \cup \\ \phi^{-r(K|K_0)}\left((E(K_0)^{sep})^{H(L)}\right) \\ \cup \\ \phi^{-r(K|K_0)}\left((E(K_0)^{sep})^{H(K)}\right) \\ \| \\ E(K|K_0) \end{array}$$

Die untere Erweiterung ist separabel und hat denselben Grad wie $(E(K_0)^{sep})^{H(L)}$ über $(E(K_0)^{sep})^{H(K)}$. Dieser ist

$$\frac{[(E(K_0)^{sep})^{H(L)} : E(K_0)]}{[(E(K_0)^{sep})^{H(K)} : E(K_0)]} \overset{2.4.8}{=} \frac{[L : K_0]}{[K : K_0]} \cdot \frac{p^{r(K|K_0)}}{p^{r(L|K_0)}} = \frac{[L : K]}{p^{r(L|K_0)-r(K|K_0)}}$$

Die obere Erweiterung ist rein inseparabel und hat genau den Grad $p^{r(L|K_0)-r(K|K_0)}$, woraus die Behauptung folgt.

ii. Nach Annahme ist $H(L)$ in $H(K)$ normal. Aus dem Beweis von i. folgt

$$\begin{aligned} &\operatorname{Aut}\left(E(L|K_0) \mid E(K|K_0)\right) \\ &= \operatorname{Gal}\left(\phi^{-r(K|K_0)}\left((E(K_0)^{sep})^{H(L)}\right) \mid E(K|K_0)\right) \simeq H(K)/H(L) \end{aligned}$$

□

Ist $F|K_0$ unverzweigt, so gilt (da alle $K_n$ über $K_0$ rein verzweigt sind) $F \cap K_\infty = K_0$ und folglich $r(F|K_0) = 0$. Da die Aussagen von Satz 2.3.24 und Corollar 2.3.25 sich übertragen, können wir auch hier ohne Bedenken für $K$ dessen maximalen absolut unverzweigten Teilkörper $K_0$ als „Basis“ wählen und $E(K) := E(K|K_0)$ setzen. Unter Berücksichtigung der Abänderung durch $r(K|K_0)$ erhalten wir:

**Satz 2.4.12** (vgl. Satz 2.3.27)**.** *Es ist $E(K) = k_\infty((x^{p^{-r(K|K_0)}}))$, wobei*
*– $k_\infty$ der Restklassenkörper von $K.K_\infty$, und*
*– $\tilde{\pi}_K$ Nullstelle eines separablen Eisensteinpolynoms vom Grad $e := \dfrac{[H_{K_0} : H_K]}{[k_\infty : k]}$, d. h.*

$$X^e + a_{e-1}X^{e-1} + ... + a_1X + a_0 \in (k_\infty[[\tilde{\pi}_0]])[X]$$

*mit $\tilde{\pi}_0 | a_i$, $\tilde{\pi}_0^2 \nmid a_0$ ist.*

Schließlich haben wir auf $E(K)$ wiederum eine stetige Wirkung von $\Gamma(K) := G_K/H(K)$. Diese Gruppe ist nach Galoistheorie (vgl. das Diagramm vor 2.4.8) isomorph zu $(p^{r(K|K_0)}\mathbb{Z}_p, +)$ und damit zu $(\mathbb{Z}_p, +)$ selbst.

**Beispiel 2.4.13** (vgl. Beispiel 2.3.33)**.** Betrachte für $n \in \mathbb{N}_0$ einerseits die Kreisteilungskörper

$$K_0^n = K = K_0(\mu_{p^n})$$

andererseits die in Bemerkung 2.4.1 eingeführten

$$K_n = \text{ Zwischenkörper von } K_\infty | K_0 \text{ vom Grad } p^n$$

Zunächst erhalten wir im Spezialfall $n = 0$ überall unseren Ausgangskörper $K_0$ sowie natürlich $r(K_0|K_0) = 0$, also

$$E(K_0) = k((\tilde{\pi}_0))$$

Sei nun $n \geqslant 1$. Man kann zeigen: $K_0^n \cap K_\infty = K_{n-1}$ und $K_0^n = K_{n-1}.K_0^1$; die Erweiterung $K_0^n | K_{n-1}$ ist zyklisch vom Grad $p-1$. Wir haben folglich

$$r(K_0^n|K_0) = r(K_{n-1}|K_0) = p^{n-1}$$

Für die $K_n$ ist wegen $K_n \subset K_\infty$

$$H(K_n) = H(K_0)$$

also

$$E(K_n) = \phi^{-n}\left(k((\tilde{\pi}_0))\right) = k((\tilde{\pi}_0^{p^{-n}})) \tag{2.4}$$

Für die Kreisteilungskörper ist dagegen $K_0^n.K_\infty = K_0^\infty$ und somit

$$H(K_0^n) = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K_0^n.K_\infty) = H_{K_0}$$

Das bedeutet:

$$E(K_0^n) = \phi^{-(n-1)}\left(\left(E_{K_0}^{sep}\right)^{H_{K_0}}\right) = \phi^{-(n-1)}\left(k((\epsilon-1))\right) = k(((\epsilon-1)^{p^{1-n}})) \tag{2.5}$$

(Bemerkung 2.4.10 hielt dies für $n = 1$ fest.) Schließlich läßt sich auch die Wirkung von $\Gamma$ auf diesen Körpern wieder recht leicht beschreiben: Sie ist auf $k$ trivial, und es gilt

$$\gamma(\epsilon) = \epsilon^{\chi(g)}$$

bzw. wegen $\tilde{\pi}_0 = 1 + Tr_{E_{K_0}|E(K_0)}(\epsilon)$:

$$\gamma(\tilde{\pi}_0) = 1 + Tr_{E_{K_0}|E(K_0)}(\epsilon^{\chi(g)})$$

für einen Lift $g \in G_{K_0}$ von $\gamma$, wobei $\chi$ wieder der zyklotomische Charakter ist. Da $\Gamma$ über Körperautomorphismen wirkt, ist die Wirkung damit eindeutig festgelegt.

### 2.4.4 Abschließende Bemerkung

Die Konstruktion nach Cherbonnier und Colmez wirkt etwas sympathischer. Auch Fontaine nutzt sie in seiner Konstruktion, aber er betreibt zusätzlichen Aufwand, um als Gruppe $\Gamma$ stets $(\mathbb{Z}_p, +)$ zu erhalten. Dies mag leichte Vorteile haben, funktioniert aber im Fall $p = 2$ ohne weitere Abänderungen nicht. Im übrigen hat man $\Gamma = (\mathbb{Z}_p, +)$ auch nach Cherbonnier und Colmez, wenn wir uns auf Körper $K$ beschränken, welche die $p$-ten Einheitswurzeln enthalten. Übrigens nutzt [Her98] zwar wie Fontaine die $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung $K_\infty$, verzichtet dann aber auf die Angleichung der Erweiterungsgrade durch den Automorphismus $\phi$. Andererseits erzwingt er $\Gamma = (\mathbb{Z}_p, +)$ auch für $p = 2$.

Die Normenkörperkonstruktion funktioniert für sehr viel mehr Erweiterungen als $K^\infty$ und $K_\infty$; diese sind aber gewissermaßen Standardbeispiele und liefern hier insbesondere eine recht einfache Gruppe $\Gamma$.

# 3 Konstruktion von $\mathcal{E}(K)$

Im vorigen Kapitel haben wir zum lokalen Körper $K$ der Charakteristik 0 einen lokalen Körper $E(K)$ in Charakteristik $p$ konstruiert, dessen absolute Galoisgruppe sich zumindest mit einer großen Untergruppe $H$ der absoluten Galoisgruppe von $K$ identifiziert. Wir möchten nun zu diesem Körper $E(K)$ besondere Körper $\mathcal{E}(K)$ und $\mathcal{E}_{nr}$ konstruieren, welche die Anforderungen aus 1.4 erfüllen, dabei aber die zusätzliche Information über die Wirkung von ganz $G$ (statt nur $H$) erhalten.

Wir werden die Theorie zu Beginn recht allgemein halten. Wir setzen die Theorie der Wittvektoren voraus, wie sie in [Schn07, Kapitel 5] oder [AC, chap. IX] dargestellt wird, und übernehmen auch die dortigen Notationen, etwa $S_n$ und $P_n$ für die die Addition und Multiplikation definierenden Polynome, $\Phi_n$ für das $n$-te Wittpolynom, und für $m \in \mathbb{N}$ ist $V_m(R) := \{(x_0, x_1, ...) \in W(R) \mid x_0 = ... = x_{m-1} = 0\}$, $W_m(R) = W(R)/V_m(R)$.

## 3.1 Schwache Topologie auf Wittvektoren

In diesem Abschnitt sei $(\mathfrak{K}, |\cdot|)$ ein bewerteter Körper der Charakteristik $p$, der vollständig[1] und perfekt ist, $\mathfrak{A} := \{x \in \mathfrak{K} \mid |x| \leqslant 1\}$ sein Ganzheitsring, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}} := \{x \in \mathfrak{A} \mid |x| < 1\}$ dessen maximales Ideal. Mit $\mathfrak{K}$ ist auch der topologisch abgeschlossene Unterring $\mathfrak{A}$ Integritätsbereich der Charakteristik $p$, vollständig und perfekt, d. h. der auf $\mathfrak{A}$ eingeschränkte Frobenius $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}, a \mapsto a^p$ ist bijektiv (denn $a \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow a^p \in \mathfrak{A}$ für $a \in \mathfrak{K}$). In der späteren Anwendung wird $\mathfrak{K} = FrR$, $\mathfrak{A} = R$ sein.

**Satz 3.1.1.** *$W(\mathfrak{K})$ ist ein vollständiger DBR der Charakteristik 0 mit Primelement p; sein Quotientenkörper entsteht durch Adjunktion eines Inversen zu p. Es gilt $p^m W(\mathfrak{K}) = V_m(\mathfrak{K})$ für alle $m \geqslant 1$. Die Einheitengruppe ist $W(\mathfrak{K})^\times = \{(x_0, x_1, ...) \in W(\mathfrak{K}) \mid x_0 \neq 0\}$.*
*$W(\mathfrak{A})$, den wir mit dem Unterring $\{(x_0, x_1, ...) \in W(\mathfrak{K}) \mid$ alle $x_i \in \mathfrak{A}\}$ identifizieren, ist ein Integritätsbereich der Charakteristik 0 mit genau einem maximalem Ideal $\mathfrak{m}_{W(\mathfrak{A})} = \tau(\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}) + V_1(\mathfrak{A})$, in dem das Primideal $V_1(\mathfrak{A}) = pW(\mathfrak{A})$ echt enthalten ist. Die Einheitengruppe ist $W(\mathfrak{A})^\times = W(\mathfrak{A}) \setminus \mathfrak{m}_{W(\mathfrak{A})} = \{(x_0, x_1, ...) \mid |x_0| = 1\}$.*

*Beweis.* Bis auf die Aussage über das maximale Ideal und die Einheitengruppe von $W(\mathfrak{A})$ sind dies alles bekannte oder offensichtliche Tatsachen aus der Theorie der DBR und Wittvektoren. Jene Aussage zeigen wir im folgenden Lemma in noch einmal verallgemeinerter Form. □

**Lemma 3.1.2.** *Ist $A$ ein Ring der Charakteristik $p$ mit genau einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_A = A \setminus A^\times$, so besitzt $W(A)$ ebenfalls genau ein maximales Ideal*

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{W(A)} &= \{(x_0, x_1, ...) \in W(A) \mid x_0 \in \mathfrak{m}_A\} = \{x \in W(A) \mid pr(x) \in \mathfrak{m}_A\} \\ &= \tau(\mathfrak{m}_A) + V_1(A) \end{aligned}$$

*und es ist $W(A)^\times = W(A) \setminus \mathfrak{m}_{W(A)}$.*

[1] Die Vollständigkeit brauchen wir erst ab Satz 3.1.11.

*Beweis.* Die Beschreibungen der Menge $\mathfrak{m}_{W(A)}$ sind offenbar äquivalent; daß sie ein Ideal ist, folgt etwa in der ersten Beschreibung unter Benutzung von $S_0 = X_0 + Y_0$ und $P_0 = X_0 Y_0$ daraus, daß $\mathfrak{m}_A$ ein Ideal ist. Es reicht nun zu zeigen, daß alle Elemente von $W(A) \setminus \mathfrak{m}_{W(A)}$ Einheiten in $W(A)$ sind, denn dann ist obiges Ideal offenbar das einzige maximale. Ein solches Element

$$(x_0, x_1, ...) \text{ mit } x_0 \in A^\times$$

bringen wir durch Multiplikation mit $\tau(x_0^{-1})$ und [Schn07, Satz 5.14] auf die Form

$$(1, 0, 0, ...) + (0, y_1, y_2, ...)$$

also $1_{W(A)} + y$ mit $y \in V_1(A)$. Es genügt nun, ein Inverses hierzu zu finden. Dies ist die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i y^i$, der wir formal genau folgenden Sinn geben: In

$$\varprojlim W(A)/V_1(A)^n$$

liegt offenbar das Element

$$(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i y^i + V_1(A)^n)_n$$

welches invers zu $(1_{W(A)} + y + V_1(A)^n)_n$ ist. Wegen $char(A) = p$ ist aber die Abbildung

$$W(A) \to \varprojlim W(A)/V_1(A)^n$$

$$x \mapsto (x + V_1(A)^n)_n$$

ein Isomorphismus (vgl. [Schn07, Satz 5.22.ii.] nur unter Benutzung von [ibd., Satz 5.19.iii. und iv.]), d. h. das Urbild des obigen Elements ist invers zu $1_{W(A)} + y$. □

Ist übrigens im speziellen $A$ ein Körper, $\mathfrak{m}_A = 0$, so ist dieses Lemma ein Teil der Aussage von [Schn07, Satz 5.22.i], an dessen Beweis wir uns angelehnt haben.

Wir halten noch einige allgemeine Tatsachen über die Additions- und Multiplikationspolynome für Wittvektoren fest:

**Lemma 3.1.3.** *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

*i. Die $P_n$ sind Summen von Monomen, in denen jeweils mindestens ein $X_k$ und mindestens ein $Y_l$ für gewisse $k, l \leqslant n$ vorkommt. Anders gesagt, sind sie als Elemente von $\mathbb{Z}[X_0, ..., Y_0, ...]$ kongruent zu 0 modulo $(X_0, X_1, ...)$ und modulo $(Y_0, Y_1, ...)$.*

*ii.*
$$P_n(X_0, 0, ..., 0, Y_0, Y_1, ..., Y_n) = X_0^{p^n} Y_n$$
*(Links ist $X_1 = ... = X_n = 0$ gesetzt worden.) Ist $B$ ein beliebiger Ring und $\{b, a_i \mid i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq B$, so gilt folglich in $W(B)$:*

$$\tau(b) \cdot (a_0, a_1, a_2, ...) = (ba_0, b^p a_1, b^{p^2} a_2, ...)$$

*iii. $S_n \equiv X_n$ mod $(Y_0, Y_1, ...)$.*

*iv. $S_n$ und $P_n$ haben als konstanten Term 0.*

*Beweis.* iv. folgt aus i. und iii. Die Aussagen i. bis iii. lassen sich jeweils induktiv beweisen. Als Beispiel beweisen wir iii.:
Der Induktionsanfang ist wegen $S_0 = X_0 + Y_0$ trivial. Sei also $n \geqslant 1$ und die Behauptung für $0, ..., n-1$ bewiesen. Aus dieser Induktionsannahme folgt insbesondere

$$\Phi_{n-1}(S_0^p, ..., S_{n-1}^p) \equiv \Phi_{n-1}(X_0^p, ..., X_{n-1}^p) \bmod (Y_0, Y_1, ...)$$

da sowohl die $S_i$ als auch $\Phi_{n-1}$ polynomiale Ausdrücke sind. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned}
\Phi_{n-1}(S_0^p, ..., S_{n-1}^p) + p^n S_n &= \Phi_n(S_0, ..., S_n) \\
&= \Phi_n(X_0, ..., X_n) + \Phi_n(Y_0, ..., Y_n) \\
&\equiv \Phi_n(X_0, ..., X_n) \qquad \bmod (Y_0, Y_1, ...) \\
&= \Phi_{n-1}(X_0^p, ..., X_{n-1}^p) + p^n X_n
\end{aligned}$$

also wegen der ersten Gleichung

$$p^n S_n \equiv p^n X_n \bmod (Y_0, Y_1, ...)$$

woraus die Behauptung für $n$ folgt. □

Auf $W(\mathfrak{K})$ haben wir die zu seiner Struktur als DBR gehörende Topologie, die wir aus naheliegenden Gründen die $p$-adische Topologie nennen. Ein Wittvektor

$$(x_0, x_1, ...) \in W(\mathfrak{K})$$

ist „nahe bei 0“ in dieser Topologie, wenn am Anfang des Vektors möglichst viele Nullen stehen. Eine Folge von Wittvektoren konvergiert in dieser Topologie, wenn jede Komponentenfolge konstant wird.
Nun haben wir aber in der gegebenen Situation auch auf $\mathfrak{K}$, also in den Koeffizienten von $W(\mathfrak{K})$, eine Topologie und einen Konvergenzbegriff. Es liegt nahe, diesen zu benutzen, so daß etwa eine Folge von Wittvektoren konvergiert, wenn ihre Komponentenfolgen in $\mathfrak{K}$ konvergieren.

**Definition 3.1.4.** Versehe die Menge $W(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}^{\mathbb{N}_0}$ (abzählbares direktes Produkt) mit der Produkttopologie. Wir nennen dies die N-Topologie oder schwache Topologie auf $W(\mathfrak{K})$. Wir nutzen gelegentlich Bezeichnungen wie $N$-abgeschlossen, $N$-lim etc.[2]

Die universelle Eigenschaft der Produkttopologie läßt sich in diesem Fall so formulieren: Ist $X$ ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}
f : X &\to W(\mathfrak{K}) \\
x &\mapsto (f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...)
\end{aligned}$$

genau dann $N$-stetig, wenn für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung

$$f_i : X \to \mathfrak{K}$$

stetig ist. Bekanntlich läßt sich außerdem die Produkttopologie definieren als die gröbste Topologie, die alle Mengen der Form $\prod M_i$ enthält, wo alle $M_i \subseteq \mathfrak{K}$ offen und *nur endlich viele* $M_i \subsetneq \mathfrak{K}$ sind. Genauer bilden diese sogar eine Basis der Topologie; vgl. dazu und zum folgenden auch [TG, chap. I, §4]. Wir notieren:

[2] Übrigens ist die $p$-adische die Produkttopologie, wenn $\mathfrak{K}$ mit der *diskreten* Topologie versehen wird.

**Satz 3.1.5.** *Sei $W(\mathfrak{K})$ mit der $N$-Topologie versehen.*

*i.* *$W(\mathfrak{K})$ ist hausdorffsch.*

*ii.* *Sei $x = (x_0, x_1, ...) \in W(\mathfrak{K})$. Die Mengen der Form*

$$B_{k,\delta_0,\ldots,\delta_k}(x) := \{(y_0, y_1, ...) \in W(\mathfrak{K}) : |x_i - y_i| < \delta_i \text{ für } 0 \leqslant i \leqslant k\}$$

*mit $k \in \mathbb{N}_0, \delta_i > 0$ bilden eine $N$-Umgebungsbasis von $x$.*

*iii.* *Anstelle dieser Umgebungsbasen können auch entsprechende Mengen genommen werden, wo alle $\delta_i$ gleich einem einzigen $\delta$ sind, oder die $\delta_i$ aus den positiven* rationalen *Zahlen gewählt werden; insbesondere haben wir abzählbare Umgebungsbasen.*

**Corollar 3.1.6.** *Grenzwerte von Folgen sind (falls existent) eindeutig.*
*Eine Teilmenge $M \subset W(\mathfrak{K})$ ist genau dann $N$-abgeschlossen, wenn für jede $N$-konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ für alle $n$ auch $\lim_{n\to\infty} x_n \in M$ ist.*
*Die Teichmüllerabbildung $\tau : \mathfrak{K} \to W(\mathfrak{K})$ ist $N$-stetig.*

Ist $\mathfrak{K}$ trivial bewertet, so ist die $N$-Topologie gleich der „starken“ $p$-adischen Topologie. Andernfalls ist die $N$-Topologie aber gröber, d. h. jede $N$-offene (-abgeschlossene) Menge ist auch $p$-adisch offen (abgeschlossen), aber nicht umgekehrt. (So sind die Ideale $p^m W(\mathfrak{A})$ bzw. $p^m W(\mathfrak{K})$ zwar $N$-abgeschlossen, aber nicht $N$-offen, während sie $p$-adisch bekanntlich beides sind.) Aus $p$-adischer Konvergenz folgt $N$-Konvergenz, aber nicht umgekehrt.
Auf $W(\mathfrak{A})$ ließe sich auch die vom maximalen Ideal $\mathfrak{m}_{W(\mathfrak{A})}$ (vgl. Lemma 3.1.2) erzeugte $\mathfrak{m}$-adische Topologie betrachten. Diese ist noch gröber als die $N$-Topologie[3], aber i. a. zu grob: Ist die Bewertung von $\mathfrak{K}$ nicht diskret, so ist die $\mathfrak{m}$-adische Topologie nicht hausdorffsch.

Mit dem Repräsentantensystem $\tau(\mathfrak{K})$ läßt sich jedes Element von $W(\mathfrak{K})$ eindeutig als Reihe darstellen, und zwar

$$(x_0, x_1, ...) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau(x_i^{p^{-i}}) p^i$$

Da die Abbildung

$$\mathfrak{K}^{\mathbb{N}_0} \to \mathfrak{K}^{\mathbb{N}_0} : (x_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \mapsto (x_i^{p^{-i}})_{i\in\mathbb{N}_0}$$

bezüglich der Produkttopologie ein Homöomorphismus ist, können wir die störende Potenzierung übersehen und als Umgebungsbasis der 0 alternativ z. B. die Mengen

$$\tilde{B}_{k,\delta} := \{\sum_{i=0}^{\infty} \tau(x_i) p^i : \max_{0\leqslant i\leqslant k} |x_i| < \delta\}$$

nehmen.

**Definition und Bemerkung 3.1.7.** Indem wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $p^{-n}W(\mathfrak{K})$ homöomorph mit $W(\mathfrak{K})$ identifizieren, versehen wir den Quotientenkörper $W(\mathfrak{K})[1/p] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} p^{-n}W(\mathfrak{K})$ mit der Topologie des induktiven Limes, d. i. die feinste Topologie, bezüglich welcher alle Inklusionen $p^{-n}W(\mathfrak{K}) \subset W(\mathfrak{K})[1/p]$ stetig sind. Auch diese nennen wir $N$-Topologie. Definitionsgemäß ist eine Teilmenge von $W(\mathfrak{K})[1/p]$ genau dann offen (abgeschlossen), wenn ihr Schnitt mit allen $p^{-n}W(\mathfrak{K})$ offen (abgeschlossen) ist.

[3] Daher die Bezeichnung: $M < N < P$.

Man beachte, daß damit die Umgebungen aus 3.1.5.ii in $W(\mathfrak{K})[1/p]$ *nicht offen* sind und ebensowenig $W(\mathfrak{K})$ selbst. Wir sind aber in der Situation von [TG, chap. I, § 2, no. 4, prop. 8] mit $\Lambda = \mathbb{N}_0$, $X_n = p^{-n}W(\mathfrak{K})$, wobei $X_m \cap X_n = X_{\min(m,n)}$ *abgeschlossen* ist in $X_m$ und $X_n$. Insbesondere stimmt die Teilraumtopologie auf $W(\mathfrak{K})$ mit der zuvor definierten $N$-Topologie überein, und eine Teilmenge von $W(\mathfrak{K})$ ist genau dann abgeschlossen in $W(\mathfrak{K})$, wenn sie in $W(\mathfrak{K})[1/p]$ abgeschlossen ist.

Wie gut verträgt sich die $N$-Topologie mit der Witt-Ringstruktur?

**Satz 3.1.8.**

i. *Für die Addition*

$$s : W(\mathfrak{K}) \times W(\mathfrak{K}) \to W(\mathfrak{K})$$
$$((x_0, x_1, ...), (y_0, y_1, ...)) \mapsto (S_0(x_0, y_0), S_1(x_0, x_1, y_0, y_1), ...)$$

*und die Multiplikation*

$$m : W(\mathfrak{K}) \times W(\mathfrak{K}) \to W(\mathfrak{K})$$
$$((x_0, x_1, ...), (y_0, y_1, ...)) \mapsto (P_0(x_0, y_0), P_1(x_0, x_1, y_0, y_1), ...)$$

*gilt mit den Bezeichnungen von Satz 3.1.5 für* $x, y \in W(\mathfrak{A}) + p^{k+1}W(\mathfrak{K})$ *und* $\delta \leqslant 1$:

$$s(B_{k,\delta,...,\delta}(x) \times B_{k,\delta,...,\delta}(y)) \subseteq B_{k,\delta,...,\delta}(s(x, y))$$
$$m(B_{k,\delta,...,\delta}(x) \times B_{k,\delta,...,\delta}(y)) \subseteq B_{k,\delta,...,\delta}(m(x, y))$$

*Für die Multiplikation gilt außerdem (für* $\delta \leqslant 1$*):*

$$m\Big((W(\mathfrak{A}) + p^{k+1}W(\mathfrak{K})) \times B_{k,\delta,...,\delta}((0, 0, ...))\Big) \subseteq B_{k,\delta,...,\delta}((0, 0, ...))$$

*Insbesondere sind für* $\delta \leqslant 1$ *die* $B_{k,\delta,...,\delta}((0, 0, ...))$ *additive Untergruppen und multiplikativ abgeschlossen in* $W(\mathfrak{K})$*; in* $W(\mathfrak{A})$ *sind sie sogar Ideale.*

ii. $W(\mathfrak{K})$ *ist mit der* $N$*-Topologie ein topologischer Ring.*

iii. $W(\mathfrak{A})$ *ist ein* $N$*-abgeschlossener Unterring. Die Teilmengentopologie stimmt mit der analog definierten* $N$*- / Produkttopologie auf* $W(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^{\mathbb{N}_0}$ *überein und macht* $W(\mathfrak{A})$ *ebenfalls zu einem topologischen Ring; als Umgebungsbasen können wir die oben definierten nehmen und dabei die* $\delta_i \leqslant 1$ *wählen.*

*Beweis.*

i. Ist $Q \in \mathbb{Z}[X_0, ..., X_k, Y_0, ..., Y_k]$ ein Polynom, und sind $a_0, ..., a_k, b_0, ..., b_k \in \mathfrak{A}$, $c_0, ..., c_k, d_0, ..., d_k \in B_\delta(0) \subseteq \mathfrak{A}$, dann folgt wegen $\delta^i \leqslant \delta$ für $i \in \mathbb{N}$ und der strengen Dreiecksungleichung:

$$|Q(a_0 + c_0, ..., a_k + c_k, b_0 + d_0, ..., b_k + d_k) - Q(a_0, ..., a_k, b_0, ..., b_k)| < \delta$$

und daraus folgen die ersten Behauptungen für Addition und Multiplikation. Ebenfalls wegen der strengen Dreiecksungleichung gilt nach der Aussage über die $P_i$ in Lemma 3.1.3.i für $a_0, ..., a_k, d_0, ..., d_k \in \mathfrak{A}$, $\max_{0 \leqslant j \leqslant k} |d_j| < \delta$ und $0 \leqslant i \leqslant k$:

$$|P_i(a_0, ..., a_i, d_0, ..., d_i)| < \delta$$

was eine Umformulierung der zweiten Aussage über die Multiplikation ist.

ii. Wir können zur $N$-Stetigkeit der Ringoperationen nicht einfach auf i. verweisen, weil dort Zusatzbedingungen an die Elemente $x$ und $y$ gestellt worden sind. Wir wissen aber, daß Polynome stetig sind, d. h. zu gegebenen $Q \in \mathbb{Z}[X_0, ..., X_k, Y_0, ...Y_k]$, $\delta > 0$ und $a_0, ...a_k, b_0, ..., b_k \in \mathfrak{K}$ existieren $\epsilon_0, ..., \epsilon_k, \eta_0, ..., \eta_k > 0$ mit

$$Q(B_{\epsilon_0}(a_0) \times ... \times B_{\epsilon_k}(a_k) \times B_{\eta_0}(b_0) \times ... \times B_{\eta_k}(b_k)) \in B_\delta\left(Q(a_0, ..., a_r, b_0, ..., b_k)\right)$$

und daraus folgt die Behauptung, denn ist insbesondere $Q$ eines der $P_i$ oder $S_i$ für $i \leqslant k$, so ist

$$\tilde{Q} : W(\mathfrak{K}) \times W(\mathfrak{K}) \to K$$
$$((a_0, ...), (b_0, ...)) \mapsto Q(a_0, ..., a_i, b_0, ..., b_i)$$

stetig, woraus wegen der universellen Eigenschaft der Produkttopologie die Stetigkeit der Ringoperationen folgt.

iii. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Mengen

$$C_n := \{(x_0, x_1, ...) \in W(\mathfrak{K}) : x_n \in \mathfrak{A}\}$$

$N$-abgeschlossen, somit auch $W(\mathfrak{A}) = \bigcap_n C_n$. (Alternativ: [TG, chap. I, §4, no. 3, corollaire].) Die anderen Behauptungen sind dann klar.

$\square$

**Corollar 3.1.9.** *Eine Folge von Wittvektoren $x_n = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ...)$ ist genau dann $N$-konvergent gegen einen Wittvektor $x = (x_0, x_1, ...)$, wenn in allen Komponenten Konvergenz*

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$$

*vorliegt; aber auch genau dann, wenn die Folge der Differenzen $x - x_n$ (deren Komponenten sich schwerlich explizit angeben lassen) in diesem Sinne gegen 0 konvergiert.*
*Es gelten die üblichen Grenzwertsätze bezüglich Addition und Multiplikation.*

Später wichtige Nullfolgen sind die folgenden:

**Satz 3.1.10.** *Für $x = (x_0, x_1, ...) \in W(\mathfrak{K})$ gilt:*

$$|x_0| < 1 \Leftrightarrow N - \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

*Beweis.* „$\Leftarrow$“ ist klar, denn die nullte Komponente von $x^n$ ist einfach $(x_0)^n$.
Umgekehrt gilt jedenfalls schon einmal: $N - \lim_{n\to\infty} \tau(x_0)^n = 0$. Schreibe nun $x = \tau(x_0) + py$ mit $y \in W(\mathfrak{K})$. Dann gilt

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau(x_0)^{n-i} p^i y^i$$

und für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$

$$x^n \equiv \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \tau(x_0)^{n-i} p^i y^i \bmod p^{k+1}$$

Da die Binomialkoeffizienten als natürliche Zahlen in $W(\mathfrak{A})$ liegen, folgt mit der letzten Formel in Satz 3.1.8.i:

$$N - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \tau(x_0)^{n-i} p^i y^i = 0$$

d. h. die nullte bis $k$-te Komponente von $x^n$ konvergieren gegen 0. Da $k$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Kommen wir nun zur Konvergenz von *Reihen* in der $N$-Topologie.

**Satz 3.1.11.** *Eine $N$-Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $W(\mathfrak{K})$ ist $N$-summierbar.*

*Beweis.* (Vergleiche zur Summierbarkeit [TG, chap. III, §5], insbesondere no. 6 und 7.)
Wir betrachten zunächst die Partialsummen $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_n$ und zeigen, daß $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wittvektor $s$ konvergiert. Danach werden wir die Summierbarkeit der Familie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu diesem Grenzwert $s$ zeigen.

1. Schritt: Die Partialsummen $s_n$ konvergieren.

Schreibe $a_n = (a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, ...)$ und $s_n = (s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, ...)$. Zwar ist speziell in der 0-ten Komponente $s_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_0^{(i)}$, im allgemeinen lassen sich die Komponenenten aber nur rekursiv durch $s_1 = a_1$ und

$$s_i^{(n+1)} = S_i\left(s_0^{(n)}, ..., s_i^{(n)}, a_0^{(n+1)}, ..., a_i^{(n+1)}\right)$$

($n \in \mathbb{N}$) mit den Additionspolynomen $S_i$ angeben. Sei nun $\delta > 0$ gegeben, oBdA $\delta \leqslant 1$. Wir haben zu beliebigem, ab jetzt festem $k \in \mathbb{N}_0$ die Konvergenz der Komponentenfolge $s_k^{(n)}$ zu zeigen. Da $(a_n)_n$ eine Nullfolge in $W(\mathfrak{K})$, also in allen Komponenten eine Nullfolge in $\mathfrak{K}$ ist, existiert zunächst ein $N(k) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|a_0^{(n)}\right|, ..., \left|a_k^{(n)}\right| \leqslant 1 \text{ für alle } n \geqslant N(k) \tag{3.1}$$

Wir vergessen für einen Moment die vorherigen Folgeglieder und betrachten für $n \geqslant N(k)$ die abgeänderten Partialsummen

$$\tilde{s}_n := \sum_{i=N(k)}^{n} a_i$$

mit Komponenten $\tilde{s}_n = (\tilde{s}_0^{(n)}, \tilde{s}_1^{(n)}, ...)$. Es gilt $\tilde{s}_{N(k)} = a_{N(k)}$ und für $n \geqslant N(k)$ wiederum die Rekursionsformel

$$\tilde{s}_i^{(n+1)} = S_i\left(\tilde{s}_0^{(n)}, ..., \tilde{s}_i^{(n)}, a_0^{(n+1)}, ..., a_i^{(n+1)}\right) \tag{3.2}$$

Aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) erhalten wir durch Iteration, da die $S_i$ Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten sind:

$$\left|\tilde{s}_i^{(n)}\right| \leqslant 1 \text{ für alle } n \geqslant N(k),\ 0 \leqslant i \leqslant k \tag{3.3}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir auf das gegebene $\delta$ ein und erhalten, weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, ein $N(k,\delta)$ (oBdA $\geqslant N(k)$ $(= N(k,1))$), so daß

$$\left|a_0^{(n)}\right|, ..., \left|a_k^{(n)}\right| < \delta \text{ für alle } n \geqslant N(k,\delta) \tag{3.4}$$

Nun gilt für $0 \leqslant i \leqslant k$:

$$\tilde{s}_i^{(N(k,\delta)+1)} \in \tilde{s}_i^{(N(k,\delta))} + B_\delta(0)$$

Denn: Man betrachte die Differenz

$$\tilde{s}_i^{(N(k,\delta))} - \tilde{s}_i^{(N(k,\delta)+1)} \overset{(3.2)}{=} \tilde{s}_i^{(N(k,\delta))} - S_i\left(\tilde{s}_0^{(N(k,\delta))}, ..., \tilde{s}_i^{(N(k,\delta))}, a_0^{(N(k,\delta)+1)}, ..., a_i^{(N(k,\delta)+1)}\right)$$

Lemma 3.1.3.iii sagt: Dies ist eine Summe von Produkten aus den Faktoren

$$\tilde{s}_0^{(N(k,\delta))}, ..., \tilde{s}_i^{(N(k,\delta))}, a_0^{(N(k,\delta)+1)}, ..., a_i^{(N(k,\delta)+1)}$$

bei welcher in jedem Produkt mindestens eine positive Potenz eines der $a_0^{(N(k,\delta)+1)}, ..., a_i^{(N(k,\delta)+1)}$ auftaucht. Diese Produkte haben wegen der Ungleichungen (3.3) und (3.4) Betrag $< \delta$. Wegen der strengen Dreiecksungleichung hat dies dann der gesamte Term.
Indem wir dieses Argument iterieren und noch einmal die strenge Dreiecksungleichung beachten, erhalten wir (für $0 \leqslant i \leqslant k$)

$$\tilde{s}_i^{(n)} \in \tilde{s}_i^{(N(k,\delta))} + B_\delta(0) \text{ für alle } n \geqslant N(k,\delta)$$

Insbesondere ist $(\tilde{s}_i^{(n)})_{n \geqslant N(k)}$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{K}$. Bezeichne ihren Grenzwert mit $\tilde{s}_i$.
Nun gehen wir zur ursprünglichen Komponentenfolge $(s_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ zurück. Für $n \geqslant N(k)$ ist definitionsgemäß $s_n = s_{N(k)-1} + \tilde{s}_n$, was sich in der $k$-ten Komponente durch

$$s_k^{(n)} = S_k(s_0^{(N(k)-1)}, ..., s_k^{(N(k)-1)}, \underbrace{\tilde{s}_0^{(n)}}_{\to \tilde{s}_0}, ..., \underbrace{\tilde{s}_k^{(n)}}_{\to \tilde{s}_k})$$

ausdrückt. Da aber $S_k$ ein Polynom ist, folgt auch die Konvergenz von $s_k^{(n)}$ gegen ein $s_k$.
Da $k$ beliebig war, haben wir in allen Komponenten Konvergenz und

$$s := (s_0, s_1, ...) = \lim_{n\to\infty} s_n$$

<u>2. Schritt: Summierbarkeit zur Summe s</u>

Wir behalten die Notationen aus dem ersten Schritt bei. Für die Summierbarkeit reicht es zu zeigen, daß für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \delta \leqslant 1$ gilt:
Für jede endliche Menge $J \subset \mathbb{N}$ mit $\{1, ..., N(k,\delta)\} \subseteq J$ ist

$$\left(s - \sum_{j\in J} a_j\right) \in B_{k,\delta,...,\delta}((0,0,...))$$

Dazu ist zunächst zu beachten: Ist $E$ eine endliche Teilmenge von $\{N(k,\delta), N(k,\delta)+1, ...\}$, so folgt schon aus (3.4), daß die 0-te bis $k$-te Komponente von $\sum_{e\in E} a_e$ allesamt Betrag kleiner als $\delta$ haben; denn sie setzen sich durch iteratives Einsetzen solcher Komponenten in die Polynome $S_0, ..., S_k$ zusammen, welche nach Lemma 3.1.3.iv keinen konstanten Term haben.

Nun ist nach dem ersten Schritt und den Grenzwertsätzen

$$\begin{aligned}
s - \sum_{j\in J} a_j &= (\lim_{n\to\infty} s_n) - \sum_{j\in J} a_j \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i\right) - \sum_{j\in J} a_j \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j\in J} a_j\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=N(k,\delta)}^{n} a_i - \sum_{\substack{j\in J,\\ j\geqslant N(k,\delta)}} a_j\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i\in E(n)} a_i\right)
\end{aligned}$$

mit $E(n) := \{N(k,\delta), ..., n\}\backslash J$. Nach dem oben bemerkten haben die 0-te bis $k$-te Komponente von allen $\sum_{i\in E(n)} a_i$ Betrag kleiner als $\delta$; da deren Grenzwerte definitionsgemäß die 0-te bis $k$-te Komponente des obigen Limes, also von $s - \sum_{j\in J} a_j$ sind, haben auch diese Betrag kleiner als $\delta$ (echt kleiner: $B_\delta(x) \subset \mathfrak{K}$ ist abgeschlossen wegen strenger Dreiecksungleichung), und dies war zu zeigen. □

**Corollar 3.1.12.** *$W(\mathfrak{K})$ ist $N$-vollständig.*

*Beweis.* Für eine $N$-Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere $N - \lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Nach dem letzten Satz existiert daher ein $s \in W(\mathfrak{K})$ mit $s = N - \lim_{n\to\infty} (x_1 + \sum_{i=2}^{n}(x_n - x_{n-1})) = N - \lim_{n\to\infty} x_n$. Also: Jede Cauchyfolge konvergiert.
Dies reicht für den allgemeineren Begriff der Vollständigkeit (im Sinne der Konvergenz jedes Cauchy*filters*), da $W(\mathfrak{K})$ (als topologische additive Gruppe) aufgrund von Satz 3.1.5.i und iii. metrisierbar ist ([TG, chap. IX, § 3, no. 1, prop. 1]) und diese Implikation in metrischen Räumen gilt ([TG, chap. IX, § 2, no. 6, prop. 9]). □

**Satz 3.1.13.** *Seien $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ Familien in $W(\mathfrak{K})$, die bezüglich einer und damit jeder Abzählung von $\mathbb{Z}$ $N$-Nullfolgen sind. Setze*

$$c_i := \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}:\\ k+l=i}} a_k b_l$$

*Dies ist wohldefiniert, auch $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ist $N$-summierbar und es gilt $(\sum_m a_m) \cdot (\sum_n b_n) = \sum_i c_i$.*

*Beweis.* Die Familie $(a_m b_n)_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ist wegen Satz 3.1.8.i in jeder beliebigen Abzählung eine $N$-Nullfolge – was ja nichts anderes heißt, als daß für alle $r \in \mathbb{N}_0, 0 < \delta$ (wähle oBdA $\delta \leqslant 1$) nur endlich viele der Elemente *nicht* in $B_{r,\delta,\ldots,\delta}((0,0,...))$ liegen. Insbesondere ist sie nach dem letzten Satz summierbar. Dann folgt aus [TG, chap. III, exercice 4 zu § 6]:

$$\left(\sum_m a_m\right) \cdot \left(\sum_n b_n\right) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} a_m b_n$$

Da alle Teilfamilien einer Nullfolge wieder Nullfolgen, also summierbar sind, überträgt sich der Beweis von [TG, chap. III, § 5, no. 3, théorème 2], d. h. die Partitionierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in die Mengen $\{(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : k + l = i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ und die zugehörige „Klammerung“ der Summe wie in der Behauptung ist nach der „Assoziativität“ von Summen erlaubt. $\square$

## 3.2 Die Körper $\mathcal{E}_K$ und $\mathcal{E}(K)$

### 3.2.1 Der Körper $\mathcal{E}_{K_0}$

Wir kehren jetzt zurück zur konkreten Situation der Körper $k$, $K_0 = \operatorname{Quot} W(k)$ und $FrR$ wie in Kapitel 2, und werden die im vorigen Abschnitt bereit gestellten Ergebnisse auf $\mathfrak{K} = FrR$, $\mathfrak{A} = R$ anwenden. Die $p$-adische Bewertung auf $W(FrR)$ bezeichnen wir mit $v_{W(FrR)}$. Wir konstruieren zunächst Lifts $\mathcal{E}_K$ zu den nach Cherbonnier und Colmez konstruierten Körpern $E_K$ und werden zum Schluß auf die analoge Konstruktion von Lifts $\mathcal{E}(K)$ zu den Fontaineschen Körpern $E(K)$ eingehen.

**Definition und Lemma 3.2.1.** *Sei $\epsilon \in R$ gewählt wie in 2.2.8. Für das Element $\pi_\epsilon := \tau(\epsilon) - 1 \in W(R)$ gilt:*

*i.* $\pi_\epsilon \in \mathfrak{m}_{W(R)}$

*ii.* $v_{W(FrR)}(\pi_\epsilon^k) = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$

*iii.* $\pi_\epsilon$ *ist nicht ganz über* $W(k) \subset W(R)$.

*Beweis.* Zu i. und ii.: Die kanonische Projektion $pr : W(R) \to R$ ist linear, so daß $pr(\pi_\epsilon) = \epsilon - 1 \in \mathfrak{m}_R$, also die Behauptungen mit Satz 3.1.1 und Lemma 3.1.2 (sowie $0 \neq \epsilon - 1 \in \mathfrak{m}_R$ nach Lemma 2.2.8) folgt. (Insbesondere ist $\pi_\epsilon$ eine Einheit in $W(FrR)$, und die negativen Potenzen ergeben überhaupt Sinn.)
iii. folgt daraus, daß $\epsilon - 1$ nicht algebraisch ist über $k$ (Lemma 2.2.8.ii). Gäbe es nämlich in $W(R)$ eine Gleichung

$$\pi_\epsilon^n + a_{n-1}\pi_\epsilon^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

mit $a_i \in W(k)$, so hätte man durch die Projektion auf $R$ auch eine Gleichung

$$(\epsilon - 1)^n + \bar{a}_{n-1}(\epsilon - 1)^{n-1} + ... + \bar{a}_0 = 0$$

mit Koeffizienten $\bar{a}_i := pr(a_i) \in k$. □

$\pi_\epsilon$ ist ein Lift von $\epsilon - 1$, das uns im zweiten Kapitel als uniformisierendes Element gedient hat. Aus Teil i obigen Lemmas folgt mit Satz 3.1.10, daß $(\pi_\epsilon^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bezüglich der $N$-Topologie* eine Nullfolge ist – während Teil ii zeigt, daß sie *$p$-adisch* alles andere als eine Nullfolge ist. Wollen wir nun unsere Körper $E_K$ aus Kapitel 2 liften, so sollten Reihen der Form $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\pi_\epsilon^n$ einen Sinn haben. Wir müssen daher mit der $N$-Topologie arbeiten, auch wenn es uns schließlich vor allem auf die $p$-adische Struktur der gelifteten Körper ankommen wird.

**Definition 3.2.2.** Setze zur Abkürzung $W := W(k) \subset W(R) \subset W(FrR)[1/p]$. Definiere
$\mathcal{S}_{K_0}$ := $N$-Abschluß des von $W$ und $\pi_\epsilon$ erzeugten Teilrings von $W(R)$
$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ := $N$-Abschluß des von $W$, $\pi_\epsilon$ und $\pi_\epsilon^{-1}$ erzeugten Teilrings von $W(FrR)$
$\mathcal{E}_{K_0}$ := $N$-Abschluß des von $W$ und $\pi_\epsilon$ erzeugten Teilkörpers von $W(FrR)[1/p]$
Es wird sich herausstellen, daß auch diese Definitionen unabhängig von der Wahl von $\epsilon$ sind.

A priori ist nicht klar, daß $\mathcal{E}_{K_0}$ additiv und multiplikativ abgeschlossen ist, denn über die Verträglichkeit der über den induktiven Limes definierten $N$-Topologie mit der Körperstruktur von $W(FrR)[1/p]$ haben wir keine Aussagen gemacht. Es wird sich aber herausstellen, daß $\mathcal{E}_{K_0}$ tatsächlich ein Körper ist. Genauer gilt:

**Satz 3.2.3** („Lift“ von Satz 2.3.3). *Wir haben ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{K_0}(TdA) \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{E}_{K_0} \\
\mathcal{E}_{K_0}^{int}(TdA) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u, "\cup"] & \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}} \arrow[u, "\cup"'] \\
W[[T]] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u, "\cup"] & \mathcal{S}_{K_0} \arrow[u, "\cup"']
\end{tikzcd}$$

*worin die waagerechten Pfeile Isomorphismen (oben: von Körpern, dann: von Ringen) sind, welche jeweils die Variable $T$ auf $\pi_\epsilon$ abbilden (also $\pi_\epsilon$ in die formalen Reihen einsetzen). Dabei ist $\mathcal{E}_{K_0}(TdA)$ der in [Schn07, Lemma 10.4] beschriebene Körper der formalen beidseitig unendlichen Laurentreihen über $K_0$*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n$$

*deren Koeffizienten $a_n$ eine beschränkte Menge bezüglich des Betrags $|a_n|_{K_0} = p^{-v_{K_0}}$ bilden:*

$$\max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|_{K_0} < \infty \Leftrightarrow \min_{n\in\mathbb{Z}} v_{K_0}(a_n) > -\infty \tag{3.5}$$

*und*

$$\lim_{n\to-\infty} |a_n|_{K_0} = 0 \tag{3.6}$$

*erfüllen.*
*Versehen wir die Objekte links jeweils mit der Bewertung*

$$\omega\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n\right) := \min_{n\in\mathbb{Z}} v_{K_0}(a_n)$$

*und die Objekte rechts mit der eingeschränkten Bewertung von $W(FrR)[1/p]$ (d. h. der p-adischen Metrik), so sind die Isomorphismen isometrisch.*

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildungen zunächst in folgender Form:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{K_0}(TdA) \arrow[r] & W(FrR)[1/p] \\
\mathcal{E}_{K_0}^{int}(TdA) \arrow[r] \arrow[u, "\cup"] & W(FrR) \arrow[u, "\cup"'] \\
(W(k))\,[[T]] \arrow[r] \arrow[u, "\cup"] & W(R) \arrow[u, "\cup"']
\end{tikzcd}$$

Wie schon gesagt, ist $(\pi_\epsilon^n)_{n\geqslant 0}$ eine Nullfolge bezüglich der $N$-Topologie. Nun ist $k \subset R$, also $W \subset W(R)$, und wegen der Beschränktheit der Koeffizienten gibt es ein $r \in \mathbb{N}$, so daß

$$p^r a_n \in W(R)$$

für alle $n \geqslant 0$. Aus Satz 3.1.8.i folgt daher, daß $(p^r a_n \pi_\epsilon^n)_{n\geqslant 0}$ eine $N$-Nullfolge ist, also auch $(a_n \pi_\epsilon^n)_{n\geqslant 0}$.

Schauen wir für den oberen und mittleren Pfeil noch auf die negativen Koeffizienten, so sichert Bedingung (3.6) zusammen mit Lemma 3.2.1.ii, daß $(a_n\pi_\epsilon^n)_{n<0}$ $p$-adisch, also erst recht bezüglich der $N$-Topologie eine Nullfolge ist.
Die Summen ergeben also nach Satz 3.1.11 in den betrachteten Ringen / Körpern Sinn, d. h. die Abbildungen sind *wohldefiniert*. Die *Homomorphie* folgt sofort aus bekannter Summierbarkeit von Summen und Satz 3.1.13. Es ist auch klar, daß das Diagramm *kommutativ* ist.
Zur Verträglichkeit der Abbildung mit den *Bewertungen*:
Zunächst einmal haben wir $v_{W(FrR)}\mid_W = v_{K_0}\mid_W$. Da zudem 0 auf 0 und (für alle $k \in \mathbb{Z}$) $p^k$ auf $p^k$ abgebildet wird, reicht es,

$$\omega\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n\right) = 0 \Rightarrow v_{W(FrR)}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \pi_\epsilon^n\right) = 0$$

zu zeigen. Aber die Bedingung auf der linken Seite ist äquivalent dazu, daß das Element eine Einheit in $\mathcal{E}_{K_0}^{int}$(TdA) ist; da wir die Homomorphie schon gezeigt haben, ist sein Bild eine Einheit (sogar im noch zu bestimmenden Bild der Abbildung, aber damit erst recht) in $W(FrR)$ und muß, da dieser ein DBR ist, dort ebenfalls Bewertung 0 haben. (Alternativ: Stellen wir die durch Einsetzen entstehende Reihe als Wittvektor dar, so ist die erste Komponente die durch Projektion der Koeffizienten in $k$ und von $\pi_\epsilon$ auf $\epsilon - 1$ in $k((\epsilon-1))$ gebildete Reihe; hat nun mindestens einer der Koeffizienten $a_n$ Bewertung 0, so ist die projizierte Reihe ungleich 0, d. h. der Wittvektor hat nichttriviale 0-te Komponente, also $p$-adische Bewertung 0).
Als Isometrien sind die Abbildungen *injektiv* (und *stetig*), wobei die Injektivität übrigens wieder äquivalent zu Lemma 3.2.1.iii ist.
Es bleibt zu prüfen, daß die *Bilder* der Abbildungen genau die im Satz behaupteten Mengen $\mathcal{S}_{K_0}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}, \mathcal{E}_{K_0}$ sind. Betrachten wir an Stelle der Reihen (Laurent-)Polynome

$$\sum_{0\leqslant n\ll\infty} a_n T^n \text{ bzw. } \sum_{-\infty\ll n\ll\infty} a_n T^n$$

so liegen sie nach Einsetzen von $\pi_\epsilon$ offenbar in den behaupteten Mengen; und da jede Reihe (nach Einsetzen) Grenzwert solcher Polynome (nach Einsetzen) in der $N$-Topologie ist, die Mengen aber definitionsgemäß abgeschlossen sind, haben wir eine Inklusion gezeigt. Die andere folgt aus dem folgenden Lemma. □

**Lemma 3.2.4.** *Die Bilder der im letzten Satz betrachteten Abbildungen sind $N$-abgeschlossen.*

*Beweis.* Man beachte, daß für die unteren beiden Abbildungen Abgeschlossenheit des Bildes in $W(FrR)[1/p]$ nach 3.1.7 gleichbedeutend ist mit dessen Abgeschlossenheit in $W(FrR)$. Wir zeigen die Behauptung zunächst für diese beiden und nutzen dafür die Bedingung in Corollar 3.1.6. Sei

$$(x_r)_{r\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^r \pi_\epsilon^n\right)_{r\in\mathbb{N}}$$

eine Folge von Reihen, deren Koeffizienten in $W$ liegen und für jedes $r$ die Bedingung (3.6) erfüllen; und die Folge $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ konvergiere bezüglich der $N$-Topologie. Wir zeigen folgende mit $(*)$ bezeichnete Aussage:

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ beliebig. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $r(k, n_0) \in \mathbb{N}$, so daß
$a_n^s - a_n^t \in p^k W$ für alle $s, t \geqslant r(k, n_0)$ und alle $n \leqslant n_0$.

Daraus folgt die Behauptung für die Bilder von $\mathcal{E}_{K_0}^{int}(\text{TdA})$ und $W[[T]]$, denn:
– Insbesondere ist die Folge der $n$-ten Koeffizienten $(a_n^r)_{r\in\mathbb{N}}$ eine $p$-adische Cauchyfolge in $W$, konvergiert also gegen ein $a_n \in W$. Es liegt daher nahe, $x := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \pi_\epsilon^n$ als Kandidaten für den Grenzwert zu betrachten.
– Aus der „gleichmäßigen“ Konvergenz der Koeffizienten folgt weiter, daß mit den Koeffizienten der $x_r$ auch diejenigen von $x$ der Bedingung (3.6) genügen, d. h. alle $x_r \in \text{im}(\mathcal{E}_{K_0}^{int}(TdA)) \Rightarrow x \in \text{im}(\mathcal{E}_{K_0}^{int}(TdA))$. Die entsprechende Implikation für $W[[T]]$ ist ohnehin klar.
– Schließlich ist dann auch $x$ der $N$-Grenzwert der Folge. Ist nämlich ein Ball $B := B_{k,\delta,\ldots,\delta}(0)$ gegeben, oBdA $\delta \leqslant 1$, so wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\pi_\epsilon^n \in B$ für alle $n \geqslant n_0$. Dann implizieren $(*)$ und 3.1.8.i:

$$x - x_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n - a_n^r)\pi_\epsilon^n \in B$$

für alle $r \geqslant r(k, n_0)$.

Sei also ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ vorgegeben. Wir zeigen $(*)$ per Induktion nach $k$. Setze hierfür $\delta_0 := \min(1, exp(-\frac{n_0 p}{p-1}))$ – der zweite Ausdruck ist $|(\epsilon-1)^{n_0}|_{FrR}$, s. Lemma 2.2.8.i.

*Induktionsanfang*: $k = 1$
Da die Folge $(x_r)_r$ eine $N$-Cauchyfolge ist, gibt es ein $r(1, n_0) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $s, t \geqslant r(1, n_0)$ gilt:

$$x_s - x_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n^s - a_n^t)\pi_\epsilon^n \in B_{0,\delta_0}((0, 0, \ldots))$$

Die erste Komponente dieser Differenz ist die in $FrR$ (genauer: in $k((\epsilon - 1)))$ projizierte Reihe

$$\sum_{-\infty \ll n} (\bar{a}_n^s - \bar{a}_n^t)(\epsilon - 1)^n$$

– daß für jedes Paar $s, t$ die Koeffizienten für hinreichend kleine Indizes verschwinden, wird durch (3.6) gesichert – und muß in $FrR$ einen Betrag echt kleiner als $exp(-\frac{n_0 p}{p-1})$ haben. Dies ist nur möglich, wenn für alle $n \leqslant n_0$ die Restklassendifferenz $\bar{a}_n^s - \bar{a}_n^t$ verschwindet, anders gesagt: wenn $a_n^s - a_n^t \in pW$.

*Induktionsschritt*: $k > 1$, die Behauptung sei für $1 \leqslant l < k$ gezeigt.
Zunächst gibt es, weil $x_r$ Cauchyfolge ist, ein $r'(k) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $s, t \geqslant r'(k)$ gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n^s - a_n^t)\pi_\epsilon^n \in B_{k-1,1,\ldots,1,\delta_0^{p^{k-1}}}((0, 0, \ldots)) \tag{3.7}$$

Da $\pi_\epsilon^n$ gegen 0 konvergiert, gibt es außerdem ein $n' \in \mathbb{N}$, oBdA $n' \geqslant \max(n_0, 0)$, so daß für alle $n \geqslant n'$

$$\pi_\epsilon^n \in B_{k-1,1,\ldots,1,\delta_0^{p^{k-1}}}((0, 0, \ldots))$$

gilt. Damit folgt insbesondere für $s, t \geqslant r'(k)$ wegen 3.1.8.i (Ideal in $W(R)$) auch

$$(a_n^s - a_n^t)\pi_\epsilon^n \in B_{k-1,1,\ldots,1,\delta_0^{p^{k-1}}}((0, 0, \ldots))$$

und weiter (der „Ball“ ist offene, also abgeschlossene additive Untergruppe)

$$\sum_{n\geqslant n'} (a_n^s - a_n^t)\pi_\epsilon^n \in B_{k-1,1,\ldots,1,\delta_0^{p^{k-1}}}((0, 0, \ldots))$$

sowie schließlich mit (3.7) und noch einmal 3.1.8.i (Untergruppe in $W(FrR)$):

$$\sum_{n \leqslant n'} (a_n^s - a_n^t)\pi_\epsilon^n \in B_{k-1,1,\ldots,1,\delta_0^{p^{k-1}}}((0,0,\ldots)) \tag{3.8}$$

Andererseits liefert die Induktionsvoraussetzung ein $r(k-1,n') \in \mathbb{N}$, so daß für alle $s,t \geqslant r(k-1,n')$ und $n \leqslant n'$ gilt:

$$a_n^s - a_n^t \in p^{k-1}W \tag{3.9}$$

Wir zeigen, daß $r(k,n') := \max(r(k-1,n'), r'(k))$ die Behauptung für $n'$ und damit auch für $n_0 \leqslant n'$ erfüllt. Durch Kombination von (3.8) und (3.9) erhält man nämlich unter Ausnutzung der Formel $p^i \cdot (x_0, x_1, \ldots) = (0, \ldots, 0, x_0^{p^i}, x_1^{p^i}, \ldots)$ (wobei $x_0^{p^i}$ an der $i$-ten Stelle steht):

$$\frac{1}{p^{k-1}} \sum_{n \leqslant n'} (a_n^s - a_n^t)\pi_\epsilon^n \in B_{0,\delta_0}((0,0,\ldots))$$

und damit mit demselben Argument wie im Induktionsanfang

$$\frac{1}{p^{k-1}}(a_n^s - a_n^t) \in pW \Rightarrow a_n^s - a_n^t \in p^k W$$

für alle $s,t \geqslant r(k,n')$ und $n \leqslant n'$. – Damit ist $(*)$ gezeigt, also die Behauptung für die mittlere und untere Abbildung.

Für die obere Abbildung schließen wir folgendermaßen: Das Bild von $\mathcal{E}_{K_0}(\mathrm{TdA})$ ist jedenfalls der Quotientenkörper des Bildes von $\mathcal{E}_{K_0}^{int}(\mathrm{TdA})$. Wir haben eben gezeigt, daß dieses Bild $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ ist. Folglich ist

$$\mathrm{im}\,(\mathcal{E}_{K_0}(TdA)) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}[1/p] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} p^{-n}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ ist zudem

$$\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} p^{-n}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}} \right) \cap p^{-m}W(FrR) = p^{-m}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$$

denn die Bewertung von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ stimmt mit der eingeschränkten von $W(FrR)$ überein und $p$ ist Primelement beider Ringe, so daß $W(FrR) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}[1/p] = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ ist. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ ist abgeschlossen in $W(FrR)$ und damit (definitionsgemäß unter Homöomorphie) auch $p^{-m}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ in $p^{-m}W(FrR)$. Wir haben also nachgerechnet, daß der Schnitt des Bildes mit allen $p^{-m}W(FrR)$ abgeschlossen ist. Daraus folgt mit 3.1.7 die Behauptung. □

Übrigens ist gemäß der Bemerkung nach 3.1.6 und Satz 2.2.2.iv die von der $N$-Topologie induzierte Topologie auf $W = W(k) \subset W(FrR)$ gleich der $p$-adischen, weswegen es nicht zu sehr überraschen sollte, im obigen Beweis aus der „schwachen“ Konvergenz der ganzen Folge eine „starke“ Konvergenz in den Koeffizienten zu erhalten.

**Corollar 3.2.5.** *$\mathcal{E}_{K_0}$ ist ein vollständiger diskret bewerteter Körper. Ein Primelement seines Ganzheitsrings $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ ist $p$; es gilt $\mathcal{E}_{K_0} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}[1/p] \cong \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}})$; der Restklassenkörper ist $E_{K_0}$ (aus 2.3.1 und 2.3.3).*

Zur letzten Aussage ist zu notieren:

**Bemerkung 3.2.6.** *Mit Bezeichnungen aus Satz 2.3.3 und* $pr = \Phi_0$ *kommutiert auch das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
W(FrR) \arrow[r, "\Phi_0"] & FrR \\
\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}} \arrow[u, dashed, "\cup"] \arrow[r, "\Phi_0"] & k((\epsilon-1)) = E_{K_0} \arrow[u, dashed, "\cup"'] \\
\mathcal{S}_{K_0} \arrow[u, "\cup"] \arrow[r, "\Phi_0"] & k[[\epsilon-1]] = S_{K_0} \arrow[u, "\cup"']
\end{tikzcd}$$

*Dies folgt aus dem Argument, welches wir bei Satz 3.2.3 im Alternativbeweis der Isometrie benutzt haben. Man könnte, indem man noch die offensichtlichen Projektionen* $W[[T]] \to k[[T]]$ *etc. verwendet, den unteren Teil dieses kommutativen Diagramms mit dem unteren Teil des in 3.2.3 behandelten und dem aus 2.3.3 in einen kommutativen Würfel bringen.*

**Satz 3.2.7.** *Die Strukturen* $\mathcal{S}_{K_0}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}, \mathcal{E}_{K_0}$ *sind unabhängig von der Wahl von* $\epsilon$.

*Beweis.* Für $\mathcal{S}_{K_0}$ und $\mathcal{E}_{K_0}$ läßt sich in Definition 3.2.2 $\pi_\epsilon = \tau(\epsilon) - 1$ durch $\tau(\epsilon)$ ersetzen. Nun ist jede andere Wahl $\tilde{\epsilon}$ von der Form $\epsilon^a$ für ein $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ (Satz 2.2.10.ii). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, die $p$-adisch gegen $a$ konvergiert; gemäß Satz 2.1.1.ii konvergiert dann $\epsilon^{a_n}$ in $FrR$ gegen $\epsilon^a$, also ist auch

$$N - \lim_{n\to\infty} \tau(\epsilon^{a_n}) = \tau(\epsilon^a)$$

Andererseits ist wegen der Multiplikativität von $\tau$ auch $\tau(\epsilon^{a_n}) = (\tau(\epsilon))^{a_n}$ für alle $n$, und diese Elemente liegen definitionsgemäß in den betrachteten Strukturen – also, da diese als $N$-abgeschlossen definiert sind, auch der $N$-Grenzwert. Damit ist die ganze über $\tilde{\epsilon}$ definierte Struktur in der über $\epsilon$ definierten enthalten. Mit vertauschten Rollen folgt die umgekehrte Inklusion.
$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ ist der Ganzheitsring von $\mathcal{E}_{K_0}$ und folglich ebenfalls uabhängig von der Wahl von $\epsilon$. □

**Definition und Bemerkung 3.2.8.** Wir haben Satz 2.1.1 zwar auch für Charakteristik 0 formuliert, können ihn aber *hier nicht* anwenden, denn $\tau(\epsilon) \notin 1 + \mathfrak{m}_{W(FrR)} = 1 + V_1(FrR)$. Analoge Aussagen zu denen des Satzes gelten allerdings *bezüglich der $N$-Topologie auf* $W(R)$, das heißt die $N$-abgeschlossene Untergruppe $1 + \mathfrak{m}_{W(R)} \subset W(R)^\times$ ist bezüglich der Potenzierung ein $\mathbb{Z}_p$-Modul; auch 2.1.1.ii und iii gelten, wenn der $N$-Grenzwert genommen wird. Wir definieren daher

$$(\tau(\epsilon))^a := \tau(\epsilon^a) = N - \lim \tau(\epsilon)^{a_n}$$

für beliebige Folgen natürlicher oder ganzer Zahlen $a_n \xrightarrow{p-\text{adisch}} a$. Die $N$-Topologie erlaubt uns also auch, $\mathbb{Z}_p$-Potenzen von mehr Elementen als nur denen in $1+pW(FrR)$ zu betrachten. Insbesondere gilt dann wegen der $N$-Abgeschlossenheit: $\tau(\epsilon)^a \in \mathcal{S}_{K_0}$ für alle $a \in \mathbb{Z}_p$.

Dazu sei noch einmal betont, daß für $a \in \mathbb{Z}_p$ der Ausdruck $(\tau(\epsilon))^a$ *nicht wie in 2.1.1*, also als $P$- statt $N$-Limes definiert werden kann: Etwa für $a_n = p^n, a = 0$ haben wir $\left|\tau(\epsilon)^{p^n} - 1\right|_{W(FrR)} = 1$ für alle $n$.

**Bemerkung 3.2.9.** *Es mag auf den ersten Blick angenehmer erscheinen, statt $\pi_\epsilon = \tau(\epsilon) - 1$ direkt den Teichmüllerlift $\tau(\epsilon - 1)$ zu nehmen und damit die Strukturen $\mathcal{S}_{K_0}$ etc. zu definieren. Das lieferte in der Tat Ergebnisse analog zu 3.2.3, aber der Beweis von Satz 3.2.7 würde nicht mehr funktionieren; und es scheint auch keinen anderen Grund zu geben, warum derart definierte Strukturen unabhängig von der Wahl von $\epsilon$ sein sollten.*

### 3.2.2 Die Körper $\widehat{\mathcal{E}_{nr}}$ und $\mathcal{E}_K$. Die Operationen von $G_{K_0}$ und $\sigma$.

Wir haben also zum Körper $E_{K_0}$ in Charakteristik $p$ aus Kapitel 2 einen total unverzweigten Körper $\mathcal{E}_{K_0}$ (der Charakteristik 0) konstruiert, der diesen als Restkörper hat. Wir werden im folgenden
– zu allgemeinerem $E_K$ (konstruiert nach Cherbonnier und Colmez) analoge $\mathcal{E}_K$ konstruieren;
– dazu (und um die Ergebnisse des ersten Kapitels anzuwenden), eine Kopie der Vervollständigung der maximalen unverzweigten Erweiterung $\widehat{\mathcal{E}_{nr}} = \widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$ in $W(FrR)[1/p]$ finden, auf der schließlich
– die Gruppe $G_{K_0}$ und damit auch die $G_K$, $H_K$ und $\Gamma_K$ sowie ein Frobenius-Lift $\sigma$ geeignet operieren.

Der letzte Punkt ist der Grund, warum wir die Konstruktion nicht abstrakt – was leichter wäre – sondern stets im Wittring $W(FrR)$ bzw. dessen Quotientenkörper durchführen. Hierauf haben wir nämlich vernünftige Operationen:

**Satz 3.2.10.** *Definiere auf den Wittvektoren $W(FrR)$ eintragsweise eine $G_{K_0}$-Wirkung, wobei $G_{K_0}$ auf $FrR$ per Satz 2.2.5 wirkt. Definiere außerdem $\sigma := F$ als den Witt-Frobenius auf $W(FrR)$.*

*i.* *Für jedes $g \in G_{K_0}$ ist die Abbildung $x \mapsto gx$ ein Ringendomorphismus von $W(FrR)$, der bezüglich der $N$-Topologie stetig und bezüglich der $p$-adischen Metrik isometrisch ist. Für die in 3.1.5.ii betrachteten „Bälle“ gilt $gB_{k,\delta_0,\dots,\delta_k}(x) = B_{k,\delta_0,\dots,\delta_k}(gx)$ für alle $g \in G_{K_0}$, insbesondere sind solche Bälle um 0 $G_{K_0}$-invariant.*

*ii.* *Die Projektion $\Phi_0 : W(FrR) \to FrR$ ist äquivariant bezüglich der hier und in 2.2.5 definierten $G_{K_0}$-Wirkungen.*

*iii.* *$\sigma$ ist ein bezüglich der $N$-Topologie stetiger und $p$-adisch isometrischer Ringautomorphismus. Es gilt $(pr \circ \sigma)(x_0, x_1 \dots) = x_0^p = (\phi \circ pr)(x_0, x_1, \dots)$, d. h. $\sigma$ ist auf $W(FrR)$ ein Frobenius-Lift im Sinne von Kapitel 1.*

*iv.* *Die Wirkungen von $G_{K_0}$ und $\sigma$ vertauschen miteinander.*

*v.* *Der Unterring $W(R)$ ist unter beiden Wirkungen stabil; umgekehrt setzen sie sich auf den Quotientenkörper $W(FrR)[1/p]$ fort.*

*vi.* *Die Abbildung*

$$G_{K_0} \times W(FrR) \to W(FrR) \quad (g, x) \mapsto gx$$

*ist stetig bezüglich der Krull-Topologie auf $G_{K_0}$ und der $N$-Topologie auf $W(FrR)$.*

*Beweis.*

i. Die Abbildungen sind Ringendomorphismen, weil $G_{K_0}$ auf den Einträgen als Körperautomorphismus operiert und Addition und Multiplikation im Wittring über polynomiale Ausdrücke definiert sind. Die Stetigkeit bezüglich der $N$-Topologie folgt mit der universellen Eigenschaft der Produkttopologie und den Umgebungsbasen in Satz 3.1.5.ii daraus, daß $G_{K_0}$ auf $FrR$ stetig (sogar isometrisch nach 2.2.5) wirkt. Die $p$-adische Isometrie folgt schlicht daraus, daß die Abbildungen als Endomorphismen das Primelement $p = (0, 1, 0, 0, ...)$ fixieren und Einheiten auf Einheiten schicken. – Zur letzten Behauptung: Wegen Satz 2.2.5 ($G_{K_0}$ wirkt isometrisch auf $FrR$) folgt schon die Inklusion $\subseteq$, und nach Anwendung von $g^{-1}$ die umgekehrte Inklusion.

ii. Klar.

iii. Die erste Aussage sieht man wie in i. – natürlich ist der absolute Frobenius $\phi : x \mapsto x^p$ auf $FrR$ stetig. Die zweite Aussage ist klar.

iv. Klar, weil sie in jeder Komponente vertauschen.

v. Die erste Behauptung folgt daraus, daß $R$ unter den Wirkungen stabil ist; wenn die fortgesetzten Wirkungen wieder Ring-(Körper-)Endomorphismen definieren sollen, müssen wir $g(p^{-1}) = \sigma(p^{-1}) = p^{-1}$ setzen, und damit sind die Fortsetzungen eindeutig bestimmt.

vi. Auch dies folgt mit der universellen Eigenschaft und den Umgebungsbasen der $N$-Topologie daraus, daß die entsprechende Abbildung $G_{K_0} \times FrR \to FrR$ gemäß Satz 2.2.7 stetig ist.

□

**Bemerkung 3.2.11.** *Die in Teil vi des letzten Satzes betrachtete Abbildung ist* nicht *stetig, wenn wir $W(FrR)$ mit der $p$-adischen Metrik/Topologie versehen. Betrachte nämlich etwa den Punkt $(id, \tau(\epsilon)) \in G_{K_0} \times W(FrR)$. Wäre die Abbildung hierin stetig, so müßte es eine offene Untergruppe $H \leq G_{K_0}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $hx \in \tau(\epsilon) + V_1(FrR)$ für alle $h \in H, x \in \tau(\epsilon) + V_m(FrR)$. Solche $x$ haben aber als erste Komponente $\epsilon$, d. h. alle $h \in H$ müßten (bezüglich der Wirkung in 2.2.5) $\epsilon \in R$ fixieren, also (als Elemente von $G_{K_0}$) alle $p^n$-ten Einheitswurzeln. Das ist unmöglich, denn als offene Untergruppe muß $H$ endlichen Index in $G_{K_0}$ haben.*

**Satz 3.2.12.** *$\mathcal{E}_{K_0}$ und $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ sind stabil unter $G_{K_0}$ und $\sigma$.*

*Beweis.* Wegen der Isometrie der Operationen reicht es zu zeigen, daß $\mathcal{E}_{K_0}$ unter ihnen stabil ist. Aber $K_0 = \mathrm{Quot}(W(k))$ ist offenbar stabil ($G_{K_0}$ wirkt trivial und $\sigma$ über den Witt-Frobenius = Erheben der Einträge zur $p$-ten Potenz), und es gilt

$$g(\pi_\epsilon) = g(\tau(\epsilon)) - 1 = \tau(\epsilon)^{\chi(g)} - 1 = (1 + \pi_\epsilon)^{\chi(g)} - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\chi(g)}{i} \pi_\epsilon^i$$

$$\sigma(\pi_\epsilon) = \sigma(\tau(\epsilon)) - 1 = \tau(\epsilon)^p - 1 = (1 + \pi_\epsilon)^p - 1 = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} \pi_\epsilon^i$$

wobei $g \in G_{K_0}$ beliebig und $\chi$ der zyklotomische Charakter ist. Offenbar liegen beide Ausdrücke in $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$. Man kann abstrakt argumentieren, daß sie als Reihen keinen konstanten Term haben, also wieder selbst in eine Reihe eingesetzt werden können. Für die $G_{K_0}$-Wirkung können wir aber auch folgenden Trick benutzen: Wegen $\chi(g) \in \mathbb{Z}_p^\times$ ist $\epsilon_g := \epsilon^{\chi(g)}$ einfach eine andere Wahl von $\epsilon$ (Satz 2.2.10.ii), und wir haben

$$g\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \pi_\epsilon^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \pi_{\epsilon_g}^n$$

für $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\pi_\epsilon^n \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$; dies ist offenbar ein Element des Rings, denn dieser besteht genauso aus den (3.6) erfüllenden Reihen in $\pi_{\epsilon_g}$ mit Koeffizienten in $W$. – Für $\sigma$ kann man sich auch leicht überlegen, daß Reihen in $\tau(\epsilon)^p - 1$ wegen $v_{FrR}(\epsilon^p - 1) = \frac{1}{p-1}p^2$ „erst recht“ konvergieren und die Grenzwerte wegen dessen Abgeschlossenheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ liegen.

□

**Definition 3.2.13.** Setze
$(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}$ := maximale unverzweigte Erweiterung von $\mathcal{E}_{K_0}$ in $W(FrR)[1/p]$;
$\widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$ := Abschluß davon in der $p$-adischen (!) Topologie.

Da $W(FrR)$ $p$-adisch vollständig, ist der zweite Körper kanonisch isomorph zur Vervollständigung des ersten. Bezeichne die entsprechenden Ganzheitsringe mit $\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$ bzw. $\mathcal{O}_{\widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}}$; auch letzterer „ist“ die Vervollständigung des ersten. Beide sind DBR mit Primelement $p$; es ist $(\mathcal{E}_{K_0})_{nr} = \mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}[1/p]$ und $\widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}} = \mathcal{O}_{\widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}}[1/p]$.

**Satz 3.2.14.**

*i. Der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$, also auch von $\mathcal{O}_{\widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}}$, ist $E_{K_0}^{sep}$ (aus 2.3.14).*

*ii. $(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}$, also nach Satz 3.2.10.i und iii auch $\widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$, sowie die entsprechenden Ganzheitsringe sind stabil unter $G_{K_0}$ und $\sigma$. Die Wirkung von $G_{K_0}$ ist stetig bezüglich der von der $N$-Topologie induzierten Teilraumtopologie auf $\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$ bzw. $\mathcal{O}_{\widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}}$.*

*Beweis.* Man beachte für den ganzen Beweis, daß $p$ ein Primelement von $W(FrR)$ ist. Algebraische Erweiterungen von $\mathcal{E}_{K_0}$ in $W(FrR)[1/p]$ sind daher genau dann unverzweigt, wenn die zugehörige Restklassenkörpererweiterung separabel ist.

i. Die Aussage ist wörtlich zu verstehen: $\Phi_0(\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}) = E_{K_0}^{sep}$, so wie wir in Bemerkung 3.2.6 $\Phi_0(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}) = E_{K_0}$ notiert hatten.
Definitionsgemäß ist $\Phi_0(\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}})$ eine separable Erweiterung von $E_{K_0}$ in $FrR$, also in $E_{K_0}^{sep}$ enthalten. Sei nun $x_0 \in E_{K_0}^{sep}$ beliebig, $\bar{f} = \mathrm{Min}(x_0, E_{K_0}, X)$ und $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}[X]$ ein normierter Lift von $\bar{f}$ mit gleichem Grad. Da $\bar{f}$ separabel ist und in $FrR$ in Linearfaktoren zerfällt, tut dies nach dem Henselschen Lemma auch $f$ in $W(FrR)$. Jede von dessen Nullstellen erzeugt eine endliche unverzweigte Erweiterung von $\mathcal{E}_{K_0}$ (vgl. Vorbemerkung und Lemma 1.1.11), liegt also in $\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$, und eine davon erfüllt $\Phi_0(x) = x_0$. Dies zeigt $E_{K_0}^{sep} \subseteq \Phi_0(\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}})$.

ii. Es reicht zu zeigen, daß $\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$ stabil unter den Operationen ist. Sei $g \in G_{K_0}$ und $x \in \mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$ beliebig. $f := \mathrm{Min}(x, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}, X)$ habe Grad $n$; da $\mathcal{E}_{K_0}(x) \mid \mathcal{E}_{K_0}$ unverzweigt

ist, hat die Projektion $\bar{f} \in E_{K_0}[X]$ ebenfalls Grad $n$ und ist separabel. Nach dem Henselschen Lemma ist sie folglich irreduzibel.
Wir haben nun auf dem Polynomring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}[X]$ per Wirkung auf den Koeffizienten ($\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ ist $G_{K_0}$-stabil, Satz 3.2.12) eine Operation von $G_{K_0}$ über Ringautomorphismen, die nach Reduktion eine ebensolche auf $E_{K_0}[X]$ induziert, die überdies auf den Koeffizienten genau die im zweiten Kapitel betrachtete ist. Folglich ist $g(\bar{f})$ ebenfalls separabel (die Wirkung setzt sich fort zu Automorphismen von $E_{K_0}^{sep}[X]$) und irreduzibel. Jeder normierte Lift von $g(\bar{f})$, insbesondere $g(f)$, ist folglich irreduzibel. Jede seiner Nullstellen erzeugt demnach erstens eine unverzweigte Erweiterung und ist zweitens ganz über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$, liegt also in $\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$. Eine dieser Nullstellen ist aber $gx$. – Für $\sigma$ können wir nicht genauso schließen, da $\sigma$ auf $E_{K_0}$ und damit auch auf $E_{K_0}[X]$ nicht als Automorphismus wirkt. Trotzdem muß für $x \in \mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$ mit $f := \mathrm{Min}(x, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}, X)$ wie oben auch $\sigma(x)$ eine Nullstelle von $\sigma(f)$ sein; überdies ist nach Satz 3.2.10.iii $\Phi_0(\sigma(x)) = (\Phi_0(x))^p$. Nun zerfällt $\bar{f}$ über $E_{K_0}^{sep}$ in unterschiedliche Linearfaktoren, und damit tut dies auch die Reduktion $\overline{\sigma(f)} \in E_{K_0}[X]$ von $\sigma(f)$ – deren Nullstellen in $E_{K_0}^{sep}$ sind gerade die paarweise unterschiedlichen $p$-ten Potenzen derer von $\bar{f}$. Das Henselsche Lemma liefert also genau eine Nullstelle $y$ von $\sigma(f)$ in $W(FrR)$, die gleich $\sigma(x)$ ist (vgl. soweit den Beweis von Satz 1.1.12). Zu zeigen bleibt, daß $y$ in $\mathcal{O}_{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}$ liegt. Nun ist das Minimalpolynom von dessen Reduktion $\Phi_0(y)$ über $E_{K_0}$ ein Teiler von $\overline{\sigma(f)}$, also separabel; und als Nullstelle von $\sigma(f)$ ist $y$ über $\mathcal{E}_{K_0}$ algebraisch; nach der Vorbemerkung ist also auch $\mathcal{E}_{K_0}(y)$ unverzweigt, d. h. $y \in (\mathcal{E}_{K_0})_{nr}$. – Die Stetigkeit folgt aus Satz 3.2.10.vi.
Alternative Beweisskizze für die erste Aussage: Wegen Satz 3.2.10 und 3.2.12 ist $\mathcal{E}_{K_0}(x) \simeq g(\mathcal{E}_{K_0}(x)) = \mathcal{E}_{K_0}(gx)$ für alle $x \in (\mathcal{E}_{K_0})_{nr}$ und somit auch dieser Körper eine unverzweigte Erweiterung von $\mathcal{E}_{K_0}$, d. h. $gx \in (\mathcal{E}_{K_0})_{nr}$.

□

**Satz 3.2.15.** *Die Wirkung von $H_{K_0} \leq G_{K_0}$ identifiziert diese mit $\mathrm{Gal}((\mathcal{E}_{K_0})_{nr} \mid \mathcal{E}_{K_0})$, und zwar derart, daß die über die Projektion $\Phi_0$ induzierte Wirkung genau die im zweiten Kapitel (Theorem 2.3.14) mit $\mathrm{Gal}(E_{K_0}^{sep} \mid E_{K_0})$ identifizierte ist.*

*Beweis.* Da $H_{K_0}$ der Kern des zyklotomischen Charakters ist, ist aus der Beschreibung der $G_{K_0}$-Wirkung in Satz 3.2.12 klar, daß $H_{K_0}$ $\mathcal{E}_{K_0}$ fixiert; also jedenfalls in der Galoisgruppe enthalten ist. Aber unter der Restklassenprojektion $\Phi_0$ induziert $H_{K_0}$ nach Satz 3.2.10.ii mit obigem Theorem bereits ganz $\mathrm{Gal}(E_{K_0}^{sep} \mid E_{K_0})$, muß also nach Bemerkung 1.1.10 der ganzen Galoisgruppe entsprechen. □

**Bemerkung 3.2.16.** *Wenn man, wie zu Anfang des zweiten Kapitels diskutiert, auf den Körper $FrR$ verzichten will, bekommt man hier Probleme. Für das bisherige läßt sich $E_{K_0}$ durch den abstrakten Normenkörper $X_{K_0}(K_0^\infty) = X_{K_0^\infty|K_0}(K_0^\infty)$ ersetzen und $E_{K_0}^{sep}$ durch $X_{K_0^\infty|K_0}(\bar{K})$, auf dem nach Wintenberger $G_{K_0}$ so wirkt, daß $H_{K_0}$ sich mit der Galoisgruppe identifiziert. Als Ersatz für $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$ kann man den Cohen-Ring in $W(X_{K_0}(K_0^\infty))$ zum Lift $\tau(\epsilon) - 1$ von $\epsilon - 1$ nehmen (vgl. [Schn07, Kapitel 7]), wobei $\epsilon$ jetzt als das entsprechende Element im Normenkörper zu verstehen ist; $\{\epsilon - 1\}$ ist offenbar eine p-Basis. Aber es scheint nicht möglich, einen vernünftigen Lift von $E_{K_0}^{sep}$, also einen Ersatz für unser hier definiertes $(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}$ zu erhalten. Wir wissen zwar, daß sich die Galoisgruppe auf „der“ nach 1.1.10 definierten abstrakten maximalen unverzweigten Erweiterung mit derjenigen der Restklassenkörperweiterung identifiziert und könnten sie so umgekehrt mit $H_{K_0}$ identifizieren. Aber wie soll die* ganze

Galoisgruppe $G_{K_0}$ *auf der maximalen unverzweigten Erweiterung operieren und zwar so, daß die Untergruppe* $H_{K_0}$ *gerade der Galoisgruppe entspricht? Versucht man es konkreter mit einem Cohen-Ring in* $W(X_{K_0^\infty|K_0}(\bar{K}))$*, so wirken immerhin per Funktorialität von* $W(\,\cdot\,)$ *die* $g \in G_{K_0}$ *auf die Elemente des Wittrings, und die induzierte Wirkung von* $H_{K_0}$ *leistet obiges, aber* es ist nicht klar, ob solch ein Cohen-Ring unter $G_{K_0}$ stabil ist – *nur der ganze Wittring ist es. Dazu müßte also ein* unter der Wirkung von $G_{K_0}$ auf $W(X_{K_0^\infty|K_0}(\bar{K}))$ invarianter Lift einer $p$-Basis von $X_{K_0^\infty|K_0}(\bar{K})$ *gefunden werden, was aus mehreren Gründen nicht konstruktiv möglich erscheint.*

Da wir aber nun eine Erweiterung $(\mathcal{E}_{K_0})_{nr} \mid \mathcal{E}_{K_0}$ mit passender $G_{K_0}$- und $H_{K_0}$-Wirkung haben, können wir auch die Körper $E_K$ vernünftig liften und dabei die Operation von $\Gamma_K$ behalten. Sei wieder $K$ ein vollständiger diskret bewerteter Körper der Charakteristik 0 mit perfektem Restklassenkörper $k$ der Charakteristik $p$; fasse $K_0 := \operatorname{Quot}(W(k))$ als Teilkörper von $K$ auf, und setze wieder $H_K := G_K \cap H_{K_0}$ – dies ist ein abgeschlossener Normalteiler von endlichem Index in $G_K$.

**Definition 3.2.17.** Setze $\mathcal{E}_K := \widehat{(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}}^{H_K}$.

Nach Satz 3.2.15 und Lemma 1.4.2.iii ist dies insbesondere für $K = K_0$ mit der vorherigen Notation verträglich.

**Satz 3.2.18.** *Es gilt* $\Phi_0(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) = E_K$*. Die Galoisgruppe* $\operatorname{Gal}((\mathcal{E}_{K_0})_{nr} \mid \mathcal{E}_K)$ *identifiziert sich mit* $H_K$*.* $\mathcal{E}_K$ *ist stabil unter* $\sigma$ *und* $G_K$*;* $G_K$ *wirkt über den Quotienten* $\Gamma_K = G_K/H_K$*. Die Wirkung ist stetig bezüglich der von der* $N$*-Topologie induzierten Teilraumtopologie auf* $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$*.*

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt aus der $G_{K_0}$-Äquivarianz der Projektion $\Phi_0$ (3.2.10.ii) und der eindeutigen Zuordnung zwischen unverzweigten Erweiterungen und Restklassenkörpererweiterung. Die weiteren Aussagen folgen nacheinander aus 3.2.15 mit üblicher Galoistheorie, Vertauschen von $\sigma$ und $G_K$ (3.2.10.iv) und Normalität von $H_K$ in $G_K$ (vgl. Beweis von Satz 2.3.31). Die letzte Aussage folgt aus der $N$-Stetigkeit der $G_{K_0}$-Wirkung auf $W(FrR)$ (3.2.10.vi). □

Übrigens ist $(\mathcal{E}_{K_0})_{nr}$ offenbar auch die maximale unverzweigte Erweiterung von jedem $\mathcal{E}_K$ in $W(FrR)[1/p]$, weswegen wir im folgenden einfach $\mathcal{E}_{nr}$ schreiben.

Wir haben damit eine Erweiterung diskret bewerteter Körper $\mathcal{E}_{nr} \mid \mathcal{E}_K$ mit Restklassenkörpererweiterung $E_K^{sep} \mid E_K$ konstruiert, die alle Bedingungen aus Kapitel 1, Abschnitt 4 erfüllt (mit $G_{E_K} = H_K$), und zusätzlich eine Operation von $\Gamma_K$ auf $\mathcal{E}_K$ und $E_K$ beschrieben. Wir wollen schließlich noch die Körper $\mathcal{E}_K$ etwas genauer bestimmen.

**Satz 3.2.19** („Lift“ von Satz 2.3.27)**.** *Sei* $E_K = k^\infty((\bar{\pi}_K))$ *gemäß Satz 2.3.27 mit einem* $\bar{\pi}_K \in E_{K_0}^{sep}$*. Sei* $F := \operatorname{Quot} W(k^\infty)$*, d. h. die maximale unverzweigte Teilerweiterung von* $K^\infty|K_0$*, und schreibe* $\mathcal{O}_F := W(k^\infty)$*. Dann gibt es in* $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ *einen Lift* $\pi_K$ *von* $\bar{\pi}_K$ *derart, daß* $\mathcal{E}_K$ *der Körper ist, der durch Einsetzen von* $\pi_K$ *in beidseitig unendliche Laurentreihen über* $F$ *entsteht, deren Koeffizienten die Bedingungen (3.5) und (3.6) erfüllen (also* $\mathcal{E}_F(TdA)$ *in der Notation von [Schn07]).*

*Beweis.* Zunächst ist klar, daß $F$ sich mit einem Teilkörper von $\mathcal{E}_K$ identifiziert, und folglich auch das Kompositum $F.\mathcal{E}_{K_0}$. Dieses besteht aus den Laurentreihen in $\pi_\epsilon$ mit Koeffizienten in $F$, welche den üblichen Bedingungen genügen (und ist gleich $\mathcal{E}_K$, wenn $k^\infty = k \Leftrightarrow F = K_0$).

Ein geeignetes $\pi_K$ finden wir wie folgt: Die Reduktion $\bar{\pi}_K$ erfüllt nach Satz 2.3.27 eine Eisensteingleichung

$$\bar{\pi}_K^e + \overline{a_{e-1}}\bar{\pi}_K^{e-1} + ... + \overline{a_1}\bar{\pi}_K + \overline{a_0} = 0$$

wobei $\overline{a_0} \in (\epsilon - 1) \cdot (k^\infty[[\epsilon - 1]])^\times$, $\overline{a_1}, ..., \overline{a_{e-1}} \in (\epsilon - 1) \cdot (k^\infty[[\epsilon - 1]])$ gilt. Wir liften diese Koeffizienten, aber nicht beliebig, sondern wählen als Lift zu einer Potenzreihe

$$\bar{a} = \sum_{i \geqslant 0} \alpha_i (\epsilon - 1)^i \in k^\infty[[\epsilon - 1]]$$

die Potenzreihe

$$a = \sum_{i \geqslant 0} \tau(\alpha_i) \pi_\epsilon^i \in \mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]] \subset \mathcal{O}_{\mathcal{E}_F}$$

Liften wir die Koeffizienten auf diese Weise, so erhalten wir insbesondere $a_0 \in \pi_\epsilon \cdot (\mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]])^\times$ und $a_1, ..., a_{e-1} \in \pi_\epsilon \cdot (\mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]])$. Nach dem Henselschen Lemma gibt es nun in $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ einen Lift $\pi_K$ von $\bar{\pi}_K$, der die Gleichung

$$P(\pi_K) = \pi_K^e + a_{e-1}\pi_K^{e-1} + ... + a_1\pi_K + a_0 = 0$$

erfüllt. Das Polynom $P$ ist zudem irreduzibel über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_F}$ und über $\mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]]$.
Wir können nun analog zu 3.2.3 jedenfalls den beschriebenen „Reihen in $\pi_K$“ einen Sinn geben – dazu ist letztlich nur nötig, daß $0 < v_{FrR}(\bar{\pi}_K) < \infty$ – und erhalten wieder einen zu $\mathcal{E}_F$(TdA) isometrisch isomorphen, also $p$-adisch vollständigen Körper in $W(FrR)[1/p]$. Der Restklassenkörper von dessen Ganzheitsring ist $k^\infty((\bar{\pi}_K)) \subset E_{K_0}^{sep}$, d. h. $E_K$, also schon einmal gleich dem Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$. Zeigen wir die behauptete Identität der Körper!
1. Reduktionsschritt: Es genügt offenbar, Identität der Ganzheitsringe

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \overset{!}{=} p\text{-adischer Abschluß von } \mathcal{O}_F((\pi_K))$$

zu zeigen.
2. Reduktionsschritt: Ist $A \subseteq B$ eine Inklusion von vollständigen DBR mit maximalem Ideal $(p)$, und haben beide modulo $p$ denselben Restklassenkörper, so gilt $A + pB = B$, iterativ $A + p^n B = B$ und wegen der Vollständigkeit $A = B$. Für obige Gleichheit reicht also eine der beiden Inklusionen. Wir zeigen $\supseteq$.
3. Reduktionsschritt: Es reicht, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \overset{!}{\supset} \mathcal{O}_F((\pi_K))$ zu zeigen, denn die linke Seite ist $p$-adisch vollständig.
4. Reduktionsschritt: Das Element $\pi_K$ ist jedenfalls in $\mathcal{E}_K$ invertierbar; da es aber als Element von $W(FrR)$ $p$-adischen Betrag 1 hat (die nullte Komponente ist $\bar{\pi}_K \neq 0$), gilt $\pi_K^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$. Daher genügt zu zeigen:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \overset{!}{\supset} \mathcal{O}_F[[\pi_K]]$$

5. Schritt: Sei $B := \mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]][\pi_K] \subset \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$, d. h. der Teilring von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$, der durch Adjunktion des Elements $\pi_K$ an $\mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]]$ erzeugt wird. Aus der Definition von $\pi_K$ folgert man, daß

$$B = \mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]] + \mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]]\pi_K + ... + \mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]]\pi_K^{e-1}$$

(sogar als direkte Summe), sowie

$$\pi_K^e \in \underbrace{\pi_\epsilon \cdot \mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]]}_{=:\mathfrak{m}} \cdot B$$

Damit ist für $j \in \mathbb{N}_0$:

$\pi_K^{ej} \in \mathfrak{m}^j B$, ..., $\pi_K^{e(j+1)-1} \in \mathfrak{m}^j B$;
$\pi_K^{e(j+1)} \in \mathfrak{m}^{j+1} B$, ..., $\pi_K^{e(j+2)-1} \in \mathfrak{m}^{j+1} B$
etc.
Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gibt es daher eindeutige Darstellungen

$$\pi_K^i = \sum_{k=0}^{e-1} r_{i,k} \pi_K^k$$

mit

$$r_{i,k} \in \mathfrak{m}^{\lfloor i/e \rfloor} \subset \mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]] \tag{3.10}$$

$\mathfrak{m}^j$ ist die Menge aller Reihen in $\mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]]$, deren Koeffizienten bis zur $j$-ten Potenz von $\pi_\epsilon$ verschwinden. Es folgt $r_{i,k} \xrightarrow{i \to \infty} 0$ in der $N$-Topologie. Wir zeigen nun, daß $\mathcal{O}_F[[\pi_K]]$ schon in $B$, also auch in $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ enthalten ist. Sei nämlich eine Reihe $f = \sum_{i \geqslant 0} c_i \pi_K^i \in \mathcal{O}_F[[X]]$ gegeben, so ist also wegen (3.10) (und Satz 3.1.8.i) die Reihe

$$f_k := \sum_{i \geqslant 0} c_i \, r_{i,k}$$

$N$-konvergent mit Grenzwert in $\mathcal{O}_F[[\pi_\epsilon]]$ (dieser Ring ist $N$-abgeschlossen, wie sich analog zum Beweis von Lemma 3.2.4 zeigen läßt), und in der $N$-Topologie läßt sich umordnen:

$$f = \sum_{i \geqslant 0} (\sum_{k=0}^{e-1} r_{i,k} \pi_K^k) c_i = \sum_{k=0}^{e-1} f_k \pi_K^k \in B$$

□

Natürlich ist es unschön, daß wir im allgemeinen zwar abstrakt um die Existenz eines Lifts $\pi_K$ von $\bar{\pi}_K$ in $\mathcal{E}_K$ wissen, der diesen Körper dann beschreibt, ihn aber i. a. nicht konkret angeben können. Es sei aber festgehalten, daß es nicht nur der im letzten Beweis mit dem Henselschen Lemma erhaltene Lift täte:

**Bemerkung 3.2.20.**

i. *$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ ist $N$-abgeschlossen in $W(FrR)$.*

ii. *Ist $\pi_K \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ ein beliebiger (!) Lift des uniformisierenden Elements $\bar{\pi}_K \in E_K$, so ist $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ gleich der $p$-adischen Vervollständigung von $\mathcal{O}_F((\pi_K))$.*

*Beweis.*

i. folgt aus dem letzten Satz analog zum Beweis von Lemma 3.2.4.

ii. Wegen i. ist mit $\mathcal{O}_F(\pi_K)$ auch $\mathcal{O}_F((\pi_K))$ und schließlich dessen $p$-adischer Abschluß in $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ enthalten. Aber beide sind vollständige DBR mit Primelement $p$ und gleichem Restklassenkörper, also – vgl. Schritt 2 im vorigen Beweis – identisch.

□

Unser $\mathcal{E}_K$ ist folglich als bewerteter Körper isomorph zu $\mathcal{E}_F(\mathrm{TdA})$. Wir haben also bei anfänglich gegebenem Körper $K$ Laurentreihen zu betrachten, deren Koeffizienten zwar i. a. nicht aus $K$ selbst, aber aus dem davon nicht allzu verschiedenen Körper $F$, der maximalen unverzweigten Teilerweiterung von $K^\infty|K$, stammen. Für absolut unverzweigtes $K$, insbesondere $\mathbb{Q}_p$ selbst, ist ohnehin $F = K = K_0$.

Nachdem wir nun gewissermaßen die algebraische Struktur der $\mathcal{E}_K$ beschrieben haben, wollen wir noch die Topologie etwas anschaulicher darstellen. Die folgende Proposition liefert den Schlüssel dazu und wird auch im nächsten Kapitel noch einmal von entscheidender Bedeutung sein.

Aus Bemerkung 3.2.20.ii erhält man für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus

$$\kappa : (\mathcal{O}_F/p^n)((T)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/p^n$$

welcher die abstrakte Variable $T$ auf die Restklasse $\overline{\pi_K}$ schickt. Links steht also ein üblicher Laurentreihenring mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_F/p^n$: Denn Bedingung (3.6) sichert, daß links nur endlich viele negative Koeffizienten stehen bleiben. Diesen Ring versehen wir mit der $T$-adischen Topologie, das heißt: Die Mengen

$$T^r \cdot (\mathcal{O}_F/p^n)[[T]]$$

für $r \in \mathbb{Z}$ bilden eine Umgebungsbasis der Null.

**Proposition 3.2.21.** *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

*i. Die Inklusion $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \hookrightarrow W(FrR)$ und die davon induzierte Injektion*

$$\iota : \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/p^n \hookrightarrow W(FrR)/p^n = W_n(FrR)$$

*sind topologische Einbettungen, wobei $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ mit der $N$-Teilraumtopologie, $W(FrR)$ mit der $N$-Topologie und die Quotienten mit der jeweiligen Quotiententopologie versehen sind.*

*ii. Der oben definierte Isomorphismus*

$$\kappa : (\mathcal{O}_F/p^n)((T)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/p^n$$

*ist ein* topologischer *Isomorphismus für die $T$-adische Topologie links und die Quotiententopologie der $N$-Teilraumtopologie rechts.*

*Beweis.* Für die Inklusion ist die Aussage i. trivial nach Definition der Teilraumtopologie. Für die Quotienten zeigen wir i. und ii. gleichzeitig. Dazu betrachten wir die komponierte Abbildung

$$j : (\mathcal{O}_F/p^n)((T)) \xrightarrow{\kappa} \mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}/p^n \xrightarrow{\iota} W_n(FrR) \overset{\text{top.}}{\cong} (FrR)^n$$

mit der $T$-adischen Topologie links, der Quotiententopologie der $N$-Teilraumtopologie in der Mitte und der Quotiententopologie der $N$-Topologie rechts, welche wie angedeutet mit der Produkttopologie auf $(FrR)^n$ übereinstimmt.
Zwischenbehauptung: Die Abbildung $j$ ist offen auf ihr Bild.
Beweis: Es reicht zu zeigen, daß die Bilder der Mengen $T^r \cdot (\mathcal{O}_F/p^n)[[T]]$, $r \in \mathbb{Z}$, relativ offen sind.

Betrachte in $W_n(FrR)$ den von $W_n(R) \subset W_n(FrR)$ und $\overline{\pi_K}$ erzeugten Teilring. Wegen Satz 3.1.10 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\overline{\pi_K}^s \in W_n(R)$ für alle $s \geqslant N$, so daß dieser Ring die Gestalt

$$U := W_n(R) + \overline{\pi_K} \cdot W_n(R) + ... + \overline{\pi_K}^{N-1} \cdot W_n(R)$$

hat. Man beachte weiter: $W_n(R)$ ist offene Untergruppe von $W_n(FrR)$, so daß auch die Untergruppe $U$, die ja $W_n(R)$ enthält, offen (und damit abgeschlossen) ist. Wir zeigen nun, daß $U \cap \mathrm{im}(j)$ enthalten ist in $j(T^{-M} \cdot (\mathcal{O}_F/p^n)[[T]]) = (\overline{\pi_K})^{-M} \cdot (\mathcal{O}_F/p^n)[[\overline{\pi_K}]]$ für ein genügend großes $M \in \mathbb{N}$.
Wäre dem nicht so, dann gäbe es mindestens ein $0 \leq k < n$ sowie eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $m_1 < m_2 < ...$, so daß

$$p^k \cdot (\overline{\pi_K})^{-m_i} \in U$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. (Die abgeschlossene Menge $U$ enthält alle Potenzreihen in $\overline{\pi_K}$; und solche, deren konstanter Term nicht durch $p$ teilbar ist, sind sogar in $U$ invertierbar.) Da insbesondere alle nichtnegativen Potenzen von $\overline{\pi_K}$ in $U$ liegen, gilt also sogar für alle $i \in \mathbb{N}$

$$p^k \cdot (\overline{\pi_K})^{-iN} \in U$$

und wir finden für alle $i$ Darstellungen

$$p^k \cdot (\overline{\pi_K})^{-iN} = c_{i,0} + c_{i,1}\overline{\pi_K} + ... + c_{i,N-1}\overline{\pi_K}^{N-1}$$

mit $c_{i,j} \in W_n(R)$. Schreibe abkürzend $a := \overline{\pi_K}^N \in W_n(R)$, dann haben wir

$$p^k = a^i c_{i,0} + a^i c_{i,1}\overline{\pi_K} + ... + a^i c_{i,N-1}\overline{\pi_K}^{N-1}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Das ist unmöglich, denn in Wittvektoren-Schreibweise konvergieren für $i \to \infty$ auf der rechten Seite die 0-te bis (N-1)-te Komponente gegen 0, während links konstant der Wittvektor $(0, ..., 0, 1, 0, ...)$ (mit der 1 an der k-ten Stelle) steht.
Mit $U$ ist also die Untergruppe $j(T^{-M} \cdot (\mathcal{O}_F/p^n)[[T]])$ relativ offen in $\mathrm{im}(j)$, und folglich auch alle Bilder der Mengen $T^r \cdot (\mathcal{O}_F/p^n)[[T]]$, $r \in \mathbb{Z}$, denn die Multiplikation mit $(\overline{\pi_K})^i$ $(i \in \mathbb{Z})$ ist ein Homöomorphismus. Die Zwischenbehauptung ist gezeigt.
Betrachten wir nun die Bestandteile von $j$. Die Abbildung $\iota$ ist jedenfalls injektiv. Sie ist auch stetig, was ganz abstrakt folgt: Betrachte

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & W(FrR) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/p^n \arrow[r, "\iota"] & W_n(FrR) \end{tikzcd}$$

und benutze, daß alle anderen Pfeile stetig sind, sowie die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie links unten.
Die bijektive Abbildung $\kappa$ ist ebenfalls stetig: Dies folgt daraus, daß in der $N$-Topologie $(\pi_K)^i \xrightarrow{i \to \infty} 0$ gilt.
Starte nun mit einer offenen Menge $O$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/p^n$, dann ist $\kappa^{-1}(O)$ offen. Wegen der Zwischenbehauptung ist also $j(\kappa^{-1}(O)$ offen in $\mathrm{im}(j)$. Da $\kappa$ bijektiv ist, ist aber $j(\kappa^{-1}(O) = \iota(O)$ und $\mathrm{im}(j) = \mathrm{im}(\iota)$, folglich ist die Abbildung $\iota$ offen auf ihr Bild und Teil i. gezeigt. Ist andererseits $O'$ eine offene Menge in $(\mathcal{O}_F/p^n)((T))$, so ist wegen der Zwischenbehauptung $j(O')$ offen in $\mathrm{im}(j)$. Da $\iota$ stetig ist, ist $\iota^{-1}(j(O'))$ offen in $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/p^n$, aber wegen der Injektivität von $\iota$ ist $\iota^{-1}(j(O')) = \kappa(O')$. Mithin ist die Abbildung $\kappa$ offen, und auch Teil ii. ist gezeigt. $\square$

**Satz 3.2.22.** *Sei $\pi_K$ wie in Bemerkung 3.2.20. Die $N$-Teilraumtopologie auf $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ ist die Topologie, welche durch die Mengen*

$$(\pi_K^r \cdot \mathcal{O}_F[[\pi_K]] + p^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})_{r\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}}$$

*als Umgebungsbasis der Null definiert wird.*

*Beweis.* Ein „Ball“ $B_{k,\delta_0,\dots,\delta_k}(0)$ wie in Satz 3.1.5.ii (bzw. dessen Schnitt mit $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$) enthält wegen Satz 3.1.10 für genügend großes $r$ die Menge $\pi_K^r \cdot \mathcal{O}_F[[\pi_K]] + p^{k+1}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$. Offene Mengen in der $N$-Teilraumtopologie sind folglich auch bezüglich der neu definierten Topologie offen. Umgekehrt ist für $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\pi_K^r \cdot \mathcal{O}_F[[\pi_K]] + p^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$$

genau das Urbild (bezüglich der kanonischen Projektion) der gleich geschriebenen Menge

$$\pi_K^r \cdot \mathcal{O}_F[[\pi_K]] + p^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/p^n$$

welche gemäß Proposition 3.2.21.ii offen in $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/p^n$ bezüglich der Quotiententopologie der $N$-Teilraumtopologie ist. Da die kanonische Projektion bezüglich der $N$-Teilraumtopologie und deren Quotiententopologie definitionsgemäß stetig ist, sind also auch die Nullumgebungen der neu definierten Toplogie offen in der $N$-Teilraumtopologie, und folglich sind beide Topologien gleich. $\square$

### 3.2.3 Die Körper $\mathcal{E}(K)$

Will man stattdessen die nach Fontaine konstruierten Körper $E(K)$ liften, so kann man (für $p \neq 2$) analog zum Vorgehen im zweiten Kapitel von $\mathcal{E}_{K_0}$ ($\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}$, $\mathcal{S}_{K_0}$) zu den Fixobjekten unter der zyklischen Gruppe $\mathbb{F}_p^\times \leq \mathbb{Z}_p^\times \cong \Gamma_{K_0}$

$$\mathcal{E}(K_0) := \mathcal{E}_{K_0}^{\mathbb{F}_p^\times}$$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K_0)} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_0}}^{\mathbb{F}_p^\times}$$

$$(\mathcal{S}(K_0) := \mathcal{S}_{K_0}^{\mathbb{F}_p^\times})$$

übergehen. Die maximale unverzweigte Erweiterung in $W(FrR)$ bleibt $\mathcal{E}_{nr}$, man setzt wieder $H(K_0) := \mathrm{Gal}(\bar{K}|K_\infty)$ mit der zyklotomischen $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung $K_\infty$ von $K_0$, $H(K) := G_K \cap H(K_0)$, $r(K) = r(K|K_0)$ wie in 2.4.8 und (vgl. 2.4.9):

$$\mathcal{E}(K) := \sigma^{-r(K)}\left(\mathcal{E}_{nr}^{H(K)}\right) \subset W(FrR)$$

Dann gelten analoge Aussagen zu den obigen für die Erweiterungen $\mathcal{E}_{nr}|\mathcal{E}(K)$ und $E_{K_0}^{sep}|E(K)$ sowie Operation von $\Gamma(K) := G_K/H(K) \simeq (\mathbb{Z}_p, +)$.

Mit $\mathcal{E}_{K_0}$ ist auch $\mathcal{E}(K_0) = \bigcap_{a\in\mathbb{F}_p^\times} \ker(id_{\mathcal{E}_{K_0}} - (g_a)_{|\mathcal{E}_{K_0}})$ $N$-abgeschlossen. Setzen wir

$$\pi_0 := -p + \sum_{a\in\mathbb{F}_p} \tau(\epsilon)^{[a]}$$

so ist offenbar $\pi_0 = Tr_{\mathcal{E}_{K_0}|\mathcal{E}(K_0)}(\pi_\epsilon)$ ein Lift von $\tilde{\pi}_0 \in E(K_0)$ (aus 2.4.5). Wegen der $N$-Abgeschlossenheit liegen analog zu Satz 3.2.3 alle die Bedingungen (3.5) und (3.6) erfüllenden Laurentreihen nach Einsetzen von $\pi_0$ in $\mathcal{E}(K_0)$. Da aber $\mathcal{E}_{K_0}$ über diesem Laurentreihenkörper ebenfalls Grad $p-1$ hat – Adjunktion von $\pi_\epsilon$ liefert $\mathcal{E}_{K_0}$ –, muß er schon ganz $\mathcal{E}(K_0)$ sein. Wir könnten daher $\mathcal{E}(K_0)$ und die entsprechenden Unterstrukturen auch analog zu 3.2.2 mit $\pi_0$ statt $\pi_\epsilon$ definieren. $\mathcal{E}(K)$ besteht aus den Laurentreihen in einer Variable $\pi'_K := \sigma^{-r(K)}(\pi_K)$, deren Koeffizienten in $F := \mathrm{Quot}(W(k_\infty))$ liegen und (3.5) und (3.6) erfüllen, wobei $\pi_K$ ein geeigneter Lift des $\tilde{\pi}_K$ aus Satz 2.4.12 ist. Auf diese Weise und mit diesem $F$ ist also $\mathcal{E}(K)$ als bewerteter Körper isomorph zu $\mathcal{E}_F(\mathrm{TdA})$. Auch bezüglich der „schwachen“ Topologien gelten dann analoge Ergebnisse zu 3.2.21 und 3.2.22.

# 4 Die Kategorienäquivalenz $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_K) \sim \Gamma(K)\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)},\,\sigma)}$

Wie gegen Ende des vorigen Kapitels notiert, haben wir zu unserem vollständigen, diskret bewerteten Körper $K$ in Charakteristik 0 (mit perfektem Restklassenkörper $k$ der Charakteristik $p$) Körper $E(K)$ und $\mathcal{E}(K)$ konstruiert, die die Voraussetzungen für Kapitel 1, Abschnitt 4 erfüllen, wobei $G_{E(K)} = H(K)$ ist. Um die Notation nicht völlig zu überfrachten, betrachten wir jetzt in dortiger Notation nur noch den Spezialfall $r = 1$, also $\mathbb{Z}_p$-/$\mathbb{Q}_p$-Darstellungen. Wir haben also Äquivalenzen

$$Rep_{\mathbb{Z}_p}(H(K)) \sim \Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)},\,\sigma)}$$

bzw.

$$Rep_{\mathbb{Q}_p}(H(K)) \sim \Phi M^{0}_{(\mathcal{E}(K),\,\sigma)}$$

Wir möchten aber Darstellungen der ganzen Gruppe $G_K$ klassifizieren und haben in der Operation von $\Gamma(K)$ auf $E(K)$ und $\mathcal{E}(K)$ zusätzliche Information behalten. Diese sollte nicht verloren gehen, wenn wir ins Gebiet der $\varphi$-Moduln übersetzen. Dafür definieren wir eine weitere Kategorie.

## 4.1 Die abelsche Kategorie $\Gamma\Phi M^{et}_{(A,\,\sigma)}$

Als technisches Hilfsmittel müssen wir für diesen Abschnitt zunächst eine „kanonische Topologie“ auf endlich erzeugten Moduln $M$ über einem gegebenen topologischen Ring $A$ erklären. (Man beachte, daß die topologischen Konstruktionen am Anfang von Abschnitt 1.2 ein Spezialfall des folgenden sind.)

Zu einem endlich erzeugten $A$-Modul $M$ existiert stets eine „Auflösung“: ein $r \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus von $A$-Moduln $A^r \twoheadrightarrow M$. Wir versehen nun $A^r$ mit der Produkttopologie und $M$ mit der Quotiententopologie. Dies ist unabhängig von der Wahl der Auflösung, wie folgende Überlegung zeigt:

Seien für $M$ zwei solcher Epimorphismen $A^r \twoheadrightarrow M$ und $A^s \twoheadrightarrow M$ gegeben. Dann existiert ein $A$-Modulhomomorphismus $A^r \to A^s$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A^r \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\
& M \\
A^s \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dies kann man direkt nachrechnen, wenn man nicht weiß, daß freie Moduln projektiv sind. Nun behaupten wir $(*)$: Der senkrechte Pfeil ist stetig bezüglich der beiden Produkttopologien.

Dies angenommen, und da der untere Pfeil nach Definition stetig ist bezüglich der Produkttopologie und der über die untere Auflösung definierten Topologie, ist auch der obere Pfeil stetig bezüglich der Topologie der unteren Auflösung. Da die Topologie der oberen Auflösung definitionsgemäß die feinste ist, die den oberen Pfeil stetig macht, ist sie also gröber als die der unteren Auflösung. Nach Vertauschung von $r$ und $s$ folgt, daß die Topologien übereinstimmen. Wir zeigen noch $(*)$: Sei

$$f : A^r \to A^s$$

$$(a_j)_{1\leqslant j\leqslant r} \mapsto (f_1((a_j)_{1\leqslant j\leqslant r}), ..., f_s((a_j)_{1\leqslant j\leqslant r}))$$

ein Modulhomomorphismus. Nach universeller Eigenschaft der Produkttopologie genügt es, die Stetigkeit jeder Komponentenabbildung $f_i$ zu zeigen. Definieren wir nun für $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant r$ wie in der linearen Algebra den Skalar $a_{ij} := f_i(e_j)$ (mit $e_j := (\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant r} \in A^r$), so gilt $f_i((a_j)_{1\leqslant j\leqslant r}) = \sum_{j=1}^r a'_j a_{ij}$. Aus der Definition eines topologischen Rings folgt, daß die Abbildungen $m_{a_{ij}} : A \to A$, $a \mapsto aa_{ij}$ stetig sind; aus der Definition der Produkttopologie folgt weiter, daß auch

$$m_{j,a_{ij}} : A^r \to A^s$$

$$(a_j)_{1\leqslant j\leqslant r} \mapsto a'_j a_{ij}$$

stetig ist; und damit schließlich auch $f_j = \sum_{j=1}^r m_{j,a_{ij}}$.

Man kann weiter nachrechnen oder sehr abstrakt mit ähnlichen Diagrammen wie oben folgern, daß diese Topologie mit der Modulstruktur verträglich ist und Modulhomomorphismen immer stetig, Epimorphismen auch offen sind. In der Theorie der normierten Vektorräume zeigt man übrigens mit einiger Mühe den Satz: Ist speziell $A$ ein vollständiger bewerteter Körper, so induziert jede Norm auf einem endlichdimensionalen Vektorraum obige Topologie, die in diesem Fall natürlich die Produkttopologie auf $M \simeq A^d$ ist – d. h. man zeigt die Äquivalenz der Norm zur Maximumsnorm zu einer beliebigen Basis.
Folgende Beschreibung der Topologie im Spezialfall eines DBR, die ebenfalls leicht einzusehen ist, wird sich als praktisch erweisen:

**Bemerkung 4.1.1.** *Sei $A$ ein DBR mit Primelement $\pi$. Wählen wir zu einem endlich erzeugten $A$-Modul $M$ Erzeuger $m_1, ..., m_r$, und ist $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Umgebungsbasis der 0 im Ring $A$, so ist zu einem beliebigen Element $a_1m_1 + ... + a_rm_r \in M$ eine Umgebungsbasis durch die Mengen*

$$\sum_{j=1}^r (a_j + U_{i_j})m_j$$

*mit $i_1, ..., i_r \in I$ gegeben. (Eine andere Darstellung des Elements liefert natürlich i. a. eine andere Umgebungsbasis.)*

Kommen wir nun zu den $\varphi$-$\Gamma$-Moduln. Wir behalten die Notationen und Bezeichnungen aus Abschnitt 1.3. bei. Gegeben sei ein Tripel $(A, \sigma, \Gamma)$, wobei $(A, \sigma)$ ein Paar wie dort sei und $\Gamma$ eine Gruppe, die auf $A$ über Ringendomorphismen wirkt, welche allesamt mit $\sigma$ kommutieren.

**Definition 4.1.2.** Ein $\varphi$-$\Gamma$-Modul (über $(A, \sigma, \Gamma)$) ist ein $\varphi$-Modul $M$ über $(A, \sigma)$ versehen mit einer Operation von $\Gamma$ auf $M$, die semilinear ist (bezüglich derjenigen auf $A$), das heißt

$$g(am + n) = ga \cdot gm + gn \text{ für alle } a \in A,\ m, n \in M,\ g \in \Gamma$$

und so, daß $\varphi$ und $\Gamma$ kommutieren, das heißt $\varphi(gm) = g(\varphi(m))$ für alle $g \in \Gamma, m \in M$.

Wenn man als Morphismen zwischen diesen Objekten, wie billig, Modulhomomorphismen nimmt, welche mit $\sigma$ und $\Gamma$ vertauschen, sowie z.B. Unterobjekte, direkte Summen und Tensorprodukte in nächstliegender Weise definiert, glaubt man ohne Beweis:

**Satz 4.1.3.** *Die $\varphi$-$\Gamma$-Moduln über gegebenem $(A, \sigma, \Gamma)$ bilden eine abelsche Kategorie, die abgeschlossen ist unter Bildung des Tensorprodukts. Wir bezeichnen sie mit $\Gamma\Phi M_{(A,\sigma)}$.*

**Bemerkung 4.1.4.** *Zu einem Gruppenhomomorphismus $\alpha : \Gamma' \to \Gamma$ erhalten wir einen kovarianten Funktor*

$$_*\alpha : \Gamma\Phi M_{(A,\sigma)} \to \Gamma'\Phi M_{(A,\sigma)}$$

*indem wir auf einem $\varphi$-$\Gamma$-Modul $M$ die Gruppe $\Gamma'$ per $g'(m) := \alpha(g')m$ operieren lassen. Dieser Funktor ist treu, exakt und vertauscht mit dem Tensorprodukt.*
*Ist speziell $\iota : \{1\} \hookrightarrow \Gamma$ die Inklusion der trivialen Gruppe, identifiziert sich $_*\iota$ offenbar mit dem Vergißfunktor $\Gamma\Phi M_{(A,\sigma)} \to \Phi M_{(A,\sigma)}$.*

Diejenigen $\varphi$-Moduln, die wir durch den Funktor $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ aus Darstellungen erhalten, sind jedenfalls *etal.* Außerdem haben wir nicht irgendeine Operation irgendeiner Gruppe, sondern die einer *topologischen* Gruppe, welche *stetig* bezüglich einer *Topologie auf den Moduln* ist.

Seien dafür ab jetzt zusätzlich
– $A$ ein topologischer Ring, $\Gamma$ eine topologische Gruppe, und beide seien vollständig und hausdorffsch;
– die Wirkung $\Gamma \times A \to A$ $((g, a) \mapsto ga)$ stetig;
– $A$ noethersch und $\sigma : A \to A$ flach.
Dann fassen wir alle Zusatzbedingungen großzügig unter den Begriff *etal*:

**Definition 4.1.5.** Ein $\varphi$-$\Gamma$-Modul $M$ heißt <u>etal</u>, falls
– der unterliegende (durch den Vergißfunktor erhaltene) $\varphi$-Modul etal ist im Sinne von 1.3.5 und
– die Wirkung $\Gamma \times M \to M$ $((g, m) \mapsto gm)$ stetig ist.
Dabei ist $M$ mit der kanonischen Topologie als endlich erzeugter $A$-Modul versehen.

Indem wir als Morphismen die zwischen den unterliegenden $\varphi$-$\Gamma$-Moduln behalten – die wie erwähnt automatisch stetig sind –, erhalten wir die <u>Kategorie der etalen $\varphi$-$\Gamma$-Moduln</u> $\Gamma\Phi M^{et}_{(A,\sigma)}$.

**Satz 4.1.6.** $\Gamma\Phi M^{et}_{(A,\sigma)}$ *ist eine abelsche Kategorie und abgeschlossen unter Tensorprodukten.*

Wir verzichten auf einen Beweis, wobei das meiste ohnehin aus den Sätzen 1.3.6 und 1.3.7 folgt.

**Bemerkung 4.1.7.** *Ist $\alpha : \Gamma' \to \Gamma$ ein Morphismus* topologischer *Gruppen, welche die obigen Eigenschaften erfüllen, so schränkt sich der Funktor $_*\alpha$ ein zu einem gleich bezeichneten Funktor*

$$_*\alpha : \Gamma\Phi M^{et}_{(A,\sigma)} \to \Gamma'\Phi M^{et}_{(A,\sigma)}$$

## 4.2 Beweis der Kategorienäquivalenz

Wir haben die Kategorienäquivalenz

$$Rep_{\mathbb{Z}_p}(H(K)) \sim \Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)},\sigma)}$$

Die Kategorie $\Gamma(K)\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)},\sigma)}$ erweist sich nun als die richtige, um Darstellungen der ganzen Galoisgruppe $G_K$ – die offenbar „besondere“ Darstellungen von $H(K)$ sind – zu übersetzen. Dabei trägt $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ gemäß Satz 3.2.18 eine bezüglich der $N$-(Teilraum-)Topologie stetige Wirkung von $\Gamma(K)$. Zusätzlich ist für eine $G_K$-Darstellung $V$ bzw. einen etalen $\varphi$-$\Gamma(K)$-Modul $M$

– $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}(K)}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V)^{H(K)}$ mit einer stetigen Operation von $\Gamma(K)$ zu versehen;
– $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)$ mit einer stetigen Operation von $G_K$ (also einer Struktur als $G_K$-Darstellung) zu versehen;
– zu zeigen, daß diese Zusatzinformationen sich miteinander vertragen, d. h. die natürlichen Isomorphismen $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)) \cong V$ und $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M)) \cong M$ aus Theorem 1.4.11 sind $G_K$- bzw. $\Gamma(K)$-äquivariant.

All dies ist möglich, was letztlich darauf basiert, daß $G_K$ gemäß den Sätzen 3.2.10.vi und 3.2.14.ii stetig auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ operiert. Zur Erinnerung: „Stetige Wirkung“ (von $G$ auf $X$) heißt, daß die Abbildung

$$G \times X \to X\ , (g, x) \mapsto gx$$

stetig ist. Wir setzen zur Abkürzung $G = G_K$ und zeigen zunächst die allgemeine

**Proposition 4.2.1.** *Sei $B \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ der Unterring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ oder $\mathbb{Z}_p$, versehen mit der von der $N$-Topologie induzierten Teilraumtopologie von $W(FrR)$ (für $B = \mathbb{Z}_p = W(\mathbb{F}_p)$ ist dies die übliche $p$-adische). Sei $M$ ein endlich erzeugter $B$-Modul, auf dem $G$ semilinear (d. h. $g(bm+m') = gb \cdot gm + gm'$) sowie stetig bezüglich der zu Anfang des Kapitels definierten Topologie wirkt (für $B = \mathbb{Z}_p$ ist auch dies die $p$-adische). Dann ist die durch $[a \otimes m \mapsto ga \otimes gm]$ auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{B}{\otimes} M$ definierte $G$-Wirkung stetig bezüglich der Topologie von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{B}{\otimes} M$ als endlich erzeugtem $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Modul.*

*Beweis.* Fixiere wie in Bemerkung 4.1.1 Erzeuger $m_1, ..., m_r$ von $M$ als $B$-Modul und die zugehörigen Erzeuger $1 \otimes m_1, ..., 1 \otimes m_r$ von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{B}{\otimes} M$ als $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-Modul. Damit die Wirkung im Punkt $(g, x) \in G \times \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{B}{\otimes} M$ stetig ist, ist gemäß Bemerkung 4.1.1 folgendes zu zeigen:
Für beliebige Nullumgebungen $U_1, ..., U_r$ in $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ existieren eine offene Untergruppe $H \leq G$ sowie Nullumgebungen $\tilde{U}_1, ..., \tilde{U}_r$ in $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$, so daß

$$hg(x + \sum_{i=1}^{r} \tilde{u}_i \otimes m_i) \subseteq gx + \sum_{i=1}^{r} U_i \otimes m_i \tag{4.1}$$

für alle $h \in H, \tilde{u}_i \in \tilde{U}_i, a_i \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ gilt. Wir können dabei nach Satz 3.1.5.ii und iii ohne Einschränkung annehmen, daß alle hier und im folgenden betrachteten Nullumgebungen $U$ in $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ (oder $B$) von der Form $B_{k,\delta,...,\delta} \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ (oder $B_{k,\delta,...,\delta} \cap B$) mit einem „Ball“ $B_{k,\delta,...,\delta} \subset W(FrR)$ sind, wobei außerdem $\delta < 1$ angenommen werden kann (sonst verkleinere). Dies sichert nach Satz 3.1.8.i, daß die Nullumgebungen additiv und multiplikativ abgeschlossen

sind: $U + U \subseteq U$ und $U \cdot U \subseteq U$. Nach Satz 3.2.10.i gilt zudem $gU = U$ für alle $g \in G$.
Die additive Abgeschlossenheit der Nullumgebungen erlaubt uns, uns in Gleichung (4.1) auf Elementartensoren $x = a \otimes m$ zu beschränken. Wir konstruieren nun zunächst eine offene Untergruppe $H_1 \leq G$, so daß

$$hga \otimes hgm - ga \otimes gm \in \sum_{i=1}^{r} U_i \otimes m_i \tag{4.2}$$

für alle $h \in H_1$ gilt; sodann eine offene Untergruppe $H_2 \leq G$ und Nullumgebungen $\tilde{U}_1, ..., \tilde{U}_r$ in $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$, so daß

$$hg\left(\sum_{i=1}^{r} \tilde{u}_i \otimes m_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{r} U_i \otimes m_i \tag{4.3}$$

für alle $h \in H_2$ und $\tilde{u}_i \in \tilde{U}_i$ gilt. Wegen der additiven Abgeschlossenheit der Nullumgebungen liefern diese Gleichungen zusammen (4.1), wobei natürlich $H := H_1 \cap H_2$ zu setzen ist.
Zu (4.2): Schreibe

$$gm = \sum_{i=1}^{r} b_i^m(g) m_i$$

mit (nicht eindeutigen, aber ab jetzt fixierten) $b_i^m(g) \in B$. Wähle zu den $U_i$ Nullumgebungen $U_i'$ in $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$, die folgende (endlich viele!) Bedingungen erfüllen:

$$ga \cdot U_i' \subseteq U_i$$
$$b_i^m(g) \cdot U_i' \subseteq U_i \text{ , insb. } \left(\bigcap_{i=1}^{r} U_i'\right) \otimes gm \subseteq \sum_{i=1}^{r} U_i \otimes m_i$$
$$U_i' \subseteq U_i$$

Da die $G$-Wirkung auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ stetig ist, gibt es eine offene Untergruppe $H_{1,1} \leq G$, so daß

$$u(h) := hga - ga \in \bigcap_{i=1}^{r} U_i'$$

für alle $h \in H_{1,1}$. Da die $G$-Wirkung auf $M$ stetig ist, existiert eine offene Untergruppe $H_{1,2} \leq G$, so daß für alle $h \in H_{1,2}$

$$hgm - gm \in \sum_{i=1}^{r} (U_i' \cap B) m_i$$

gilt. Mithin ist für alle $h \in H_1 := H_{1,1} \cap H_{1,2}$:

$$\begin{aligned} hga \otimes hgm - ga \otimes gm &= (hga \otimes (hgm - gm)) + ((hga - ga) \otimes gm) \\ &\in (hga \otimes (hgm - gm)) + \sum_{i=1}^{r} U_i \otimes m_i \end{aligned}$$

Der erste Summand ist enthalten in

$$\left(ga + \bigcap_{i=1}^{r} U_i'\right) \otimes \left(\sum_{i=1}^{r} (U_i' \cap B) \otimes m_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{r} (ga \cdot U_i' + U_i') \otimes m_i \subseteq \sum_{i=1}^{r} U_i \otimes m_i$$

Wegen der additiven Abgeschlossenheit der $U_i$ folgt (4.2).
Zu (4.3): Schreibe für $k = 1, ..., r$

$$gm_k = \sum_{i=1}^{r} b_i^{m_k}(g)m_i \tag{4.4}$$

wiederum mit ab jetzt fixierten $b_i^{m_k}(g) \in B$. Wähle Nullumgebungen $\tilde{U}_i$ in $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$, die die Bedingungen

$$\tilde{U}_k \subseteq U_i$$

$$b_i^{m_k}(g)\tilde{U}_k \subseteq U_i$$

für alle $i, k \in \{1, ..., r\}$ erfüllen. Da $G$ stetig auf $M$ wirkt, gibt es für jedes $1 \leqslant k \leqslant r$ eine offene Untergruppe $H(k) \leq G$, so daß für alle $h \in H(k)$

$$hgm_k - gm_k = \sum_{i=1}^{r} (\tilde{U}_i \cap B)m_i \tag{4.5}$$

gilt. Aus (4.4) und (4.5) erhalten wir für $h \in H_2 := \bigcap_{k=1}^{r} H(k)$

$$hgm_k \in \sum_{i=1}^{r} (b_i^{m_k}(g) + \tilde{U}_i \cap B)m_i$$

und damit für beliebige $\tilde{u}_i \in \tilde{U}_i$

$$\begin{aligned}
hg\left(\sum_{k=1}^{r} \tilde{u}_k \otimes m_k\right) &= \sum_{k=1}^{r} hg(\tilde{u}_k) \otimes hgm_k \\
&\in \sum_{k=1}^{r} hg(\tilde{u}_k) \otimes \left(\sum_{i=1}^{r} (b_i^{m_k}(g) + \tilde{U}_i \cap B)m_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{r} hg(\tilde{u}_k) \cdot (b_i^{m_k}(g) + \tilde{U}_i \cap B)\right) \otimes m_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{r} hg(\tilde{u}_k) b_i^{m_k}(g) + hg(\tilde{u}_k)(\tilde{U}_i \cap B)\right) \otimes m_i
\end{aligned}$$

Die ersten Summanden liegen in $hg(\tilde{U}_k) \cdot b_i^{m_k}(g) = \tilde{U}_k \cdot b_i^{m_k}(g) \subseteq U_i$ und die zweiten in $hg(\tilde{U}_k) \cdot \tilde{U}_i = \tilde{U}_k \cdot \tilde{U}_i \subseteq U_i \cdot U_i \subseteq U_i$, womit (4.3) gezeigt ist. $\square$

**Definition und Lemma 4.2.2.**

*i. Sei* $V \in \mathrm{ob}(Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_K))$. *Die Vorschrift*

$$\sum_i a_i \otimes v_i \mapsto \sum_i ga_i \otimes gv_i$$

*definiert eine stetige* $G_K$*-Wirkung auf* $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$, *die eine stetige Wirkung von* $\Gamma(K) = G_K/H(K)$ *auf dem* $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$*-Modul* $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) := (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V)^{H(K)}$ *induziert.*

*ii. Sei* $M \in \mathrm{ob}(\Gamma(K)\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)},\sigma)})$. *Die Vorschrift*

$$\sum_i a_i \otimes m_i \mapsto \sum_i ga_i \otimes \gamma m_i$$

*wobei* $\gamma \in \Gamma(K)$ *die Restklasse von* $g$ *ist, definiert eine stetige* $G_K$*-Wirkung auf* $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}}{\otimes} M$, *die sich zu einer stetigen Wirkung auf* $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) := (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}}{\otimes} M)^{\varphi=id}$ *einschränkt.*

*Beweis.* Bis auf die Stetigkeitsaussagen ist dies klar. Indem wir die vorige Proposition in i. auf $B = \mathbb{Z}_p$ mit der durch die Darstellung definierten $G_K$-Wirkung auf $V$ (und der trivialen auf $\mathbb{Z}_p$) anwenden, in ii. auf $B = \mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ und $M$ mit der Wirkung von $G_K$ über den Faktor $\Gamma(K)$, erhalten wir jeweils die Stetigkeit der Wirkung auf dem ganzen Tensorprodukt $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$ bzw. $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}}{\otimes} M$ als $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$-Modul.
Wir brauchen aber die Stetigkeit auf den jeweiligen Fixmengen, wobei diese als endlich erzeugte $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$- bzw. $\mathbb{Z}_p$-Moduln aufgefaßt werden.

<u>1. Zwischenbehauptung</u>: Die kanonischen Abbildungen

$$B \hookrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}}{\otimes} B$$

für $B = \mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}/p^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sowie

$$B \hookrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} B$$

für $B = \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p/p^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sind topologische Einbettungen.
<u>Beweis</u>: Im ersten und dritten Fall können wir die Menge rechts als $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$-Modul mit $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}$ identifizieren, im zweiten und vierten mit $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}/p^n$, und zwar jeweils algebraisch *und topologisch* (weil lineare Abbildungen automatisch stetig sind). Betrachten wir für die ersten beiden Fälle die Ketten von Injektionen

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}} \overset{\beta}{\hookrightarrow} W(FrR)$$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}/p^n \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{nr}}}/p^n \overset{\beta}{\hookrightarrow} W_n(FrR)$$

Das Kompositum $\beta \circ \alpha$ ist nach Proposition 3.2.21.i. jeweils eine topologische Einbettung. $\alpha$ und $\beta$ sind jeweils injektiv und stetig (im Fall der Quotienten vergleiche zur Stetigkeit das abstrakte Argument mit dem Diagramm im Beweis von 3.2.21). Dann folgt ebenfalls ganz abstrakt, daß auch $\alpha$ offen auf sein Bild ist: Starten wir nämlich mit einer offenen Menge $U$ links, so existiert rechts eine offene Menge $U''$ mit $(\beta \circ \alpha)(U) = U'' \cap \mathrm{im}(\beta \circ \alpha)$. Da $\beta$ stetig ist, ist $U' := \beta^{-1}(U'')$ offen, und wegen der Injektivität von $\beta$ gilt

$$\alpha(U) = U' \cap \mathrm{im}(\alpha)$$

d. h. $\alpha$ ist offen auf sein Bild.
Die beiden $\mathbb{Z}_p$-Fälle funktionieren genauso; als Ersatz für die oben zitierte Proposition muß nur gezeigt werden, daß die Inklusion $\mathbb{Z}_p \subset W(FrR)$ und die induzierte Injektion $\mathbb{Z}_p/p^n \hookrightarrow W_n(FrR)$ topologische Einbettungen sind. Ersteres ist trivial, Injektivität und Stetigkeit bei zweiterem sieht man wie vorher, und zur Offenheit aufs Bild ist zu bemerken, daß $\mathbb{Z}_p/p^n$ kompakt (sogar endlich) und $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}/p^n$ hausdorffsch ist (die Ideale $(p^n)$ sind abgeschlossen), so daß eine stetige Abbildung automatisch offen ist.

2. Zwischenbehauptung: Die Inklusionen

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V$$

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}}(M) \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}}{\otimes} M$$

sind topologische Einbettungen.
Beweis: Nach Satz 1.1.1 und den im letzten Abschnitt erwähnten Eigenschaften der „kanonischen“ Topologien auf endlich erzeugten Moduln läßt sich die Aussage der 1. Zwischenbehauptung auf beliebige endlich erzeugte $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$- bzw. $\mathbb{Z}_p$-Moduln $B$ verallgemeinern. Dann betrachte aber zum Beispiel für $B = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \arrow[r] \arrow[dr, "\subset"'] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \arrow[d, "\cong"] \\
& \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V
\end{tikzcd}$$

wobei der senkrechte Pfeil aus Proposition 1.4.9 stammt. Dieser ist wiederum automatisch ein topologischer Isomorphismus, der waagerechte Pfeil ist nach der 1. Zwischenbehauptung eine topologische Einbettung, also auch der diagonale.

Damit können wir nun das Gewünschte zeigen. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \times (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} V \\
G \times \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \arrow[u, "id\times\iota"] \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(V) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

$\alpha$ soll stetig sein. Die senkrechten Pfeile ($\iota$ ist einfach die Inklusion) konnten wir als topologische Einbettungen bestimmen. Der obere waagerechte Pfeil ist nach Proposition 4.2.1 stetig. Wir können nun wiederum ganz abstrakt folgern: Sei $U$ eine offene Menge unten rechts. Dann existiert oben rechts eine offene Menge $U'$ mit $\iota(U) = U' \cap \mathrm{im}(\iota)$. Offenbar gilt $\iota^{-1}(U') = U$ und somit

$$\alpha^{-1}(U) = \alpha^{-1}(\iota^{-1}(U')) = (\iota \circ \alpha)^{-1}(U')$$

und $\iota \circ \alpha$ ist wegen der Kommutativität des Diagramms stetig, also $\alpha^{-1}(U)$ offen und somit $\alpha$ stetig. $\square$

Wir können damit die ersten beiden Punkte abhaken: $\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)$ ist ein etaler $\varphi$-$\Gamma$-Modul, $\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)$ eine $G$-Darstellung. Es bleibt zu zeigen:

**Lemma 4.2.3.** *Die natürlichen Isomorphismen $\mathcal{V}_\mathcal{E}(\mathcal{D}_\mathcal{E}(V)) \cong V$ und $\mathcal{D}_\mathcal{E}(\mathcal{V}_\mathcal{E}(M)) \cong M$ aus Theorem 1.4.11 sind $G_K$- bzw. $\Gamma(K)$-äquivariant.*

*Beweis.* Dies folgt sofort daraus, daß die Abbildungen $\xi_*$ und $T_*$ (bzw. $\zeta_*$ und $U_*$) äquivariant sind, wie sich aus deren Definition in Lemma 1.4.7.ii und Satz 1.4.8 und den obigen Definitionen der $G_K$-Wirkungen ergibt. $\square$

Es folgt:

**Theorem 4.2.4.** *Die Funktoren $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ und $\mathcal{V}_\mathcal{E}$ liefern eine Kategorienäquivalenz*

$$Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_K) \sim \Gamma(K)\Phi M^{et}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)},\sigma)}$$

*und vertauschen mit dem Tensorprodukt.*

Schließlich kann man analoge Überlegungen zu denen am Schluß von Kapitel 1 anstellen und die Kategorie $\Gamma(K)\Phi M^0_{(\mathcal{E}(K),\sigma)}$ definieren als die Kategorie endlichdimensionaler $\mathcal{E}(K)$-Vektorräume mit semilinearen und miteinander kommutierenden Operationen von $\Gamma(K)$ und $\varphi$, welche ein unter $\Gamma(K)$ und $\varphi$ stabiles $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$-Gitter enthalten derart, daß dieses Gitter ein etaler $\varphi, \Gamma(K)$-Modul (über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$) ist. Man hat dann:

**Theorem 4.2.5.** *Die Kategorien $Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ und $\Gamma(K)\Phi M^0_{(\mathcal{E}(K),\sigma)}$ sind $\otimes$-äquivalent.*

# Literaturverzeichnis


[A] Bourbaki, N.: *Algèbre.* Springer-Verlag, Berlin et al. (2007).

[AC] Bourbaki, N.: *Algèbre commutative.* Springer-Verlag, Berlin et al. (2006).

[Ax70] Ax, J.: *Zeros of polynomials over local fields. The Galois action.* Journal of Algebra 15 (1970), S. 417-428.

[Bos03] Bosch, S.: *Lineare Algebra.* (2. Auflage). Springer-Verlag, Berlin et al. (2003).

[CC98] Cherbonnier, F.; Colmez, P.: *Représentations $p$-adiques surconvergentes.* Inventiones mathematicae 133 (1998), S. 581-611.

[CC99] Cherbonnier, F.; Colmez, P.: *Théorie d'Iwasawa des représentations $p$-adiques d'un corps local.* Journal of the American Math. Society 12 (1999), S. 241-268.

[Fon83] Fontaine, J.-M.: *Représentations $p$-adiques.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians August 16-24 1983 Warszawa, vol. 1, S. 475-486.

[Fon90] Fontaine, J.-M.: *Représentations $p$-adiques des corps locaux.* The Grothendieck Festschrift, vol. II (= Progress in Mathematics 87), S. 249-309. Birkhäuser, Boston (1990).

[Her98] Herr, L.: *Sur la cohomologie galoisienne des corps $p$-adiques.* Bulletin de la Société mathématique de France 126 (1998), S. 563-600.

[Lan02] Lang, S.: *Algebra.* (Revised 3rd edition). Springer-Verlag, Berlin et al. (2002).

[NSW00] Neukirch, J.; Schmidt, A.; Wingberg, K.: *Cohomology of number fields.* Springer-Verlag, Berlin et al. (2000).

[SuS88] Scheja, G.; Storch, U.: *Lehrbuch der Algebra. Teil 2.* Teubner, Stuttgart (1988).

[Schi84] Schikhof, W. H.: *Ultrametric Calculus. An Introduction to $p$-adic Analysis.* Cambridge University Press (1984).

[Schn07] Schneider, P.: *Die Theorie des Anstiegs.* Vorlesung an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (Wintersemester 2006/07). Skript erhältlich unter `wwwmath.uni-muenster.de/u/schneider/publ/lectnotes/index.html`

[Ser68] Serre, J.-P.: *Corps locaux.* (2ème édition). Hermann, Paris (1968).

[TG] Bourbaki, N.: *Topologie générale.* Springer-Verlag, Berlin et al. (2007).

[Win83] Wintenberger, J.-P.: *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications.* Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure 16 (1983), S. 59-89. Erhältlich unter `www.numdam.org/numdam-bin/fitem?id=ASENS_1983_4_16_1_59_0`

# Anhang: Konkordanz der Bezeichnungen

Gelegentlich wird der Fall $p = 2$ gesondert behandelt.
Für diese Tabelle sei im Zweifelsfall $p \neq 2$.

| diese Arbeit | [Fon90] | [CC98] / [CC99] | [Her98] |
|---|---|---|---|
| $K_0$ | $K_0$ | $F$ (meistens) | $K_0$ |
| $K_0^n$ | $K_n$ | – | – |
| $K^n$ | – | $K_n$ | – |
| $K^\infty$ | – | $K_\infty$ | |
| $K_\infty$ | $K_\infty$ | – | $K_\infty$ |
| $G_K$ | $G_K$ | $\mathcal{G}_K$ | $G_K$ |
| $H_K$ | – | $\mathcal{H}_K$ | – |
| $H(K)$ | $H_K$ | – | – |
| $\Gamma_K$ | – | $\Gamma_K$ | – |
| $\Gamma(K)$ | $\Gamma_K$ | – | $\Gamma_K$ |
| $R$ | $R$ | $\tilde{\mathbf{E}}^+$ | $R$ |
| $FrR$ | $FrR$ | $\tilde{\mathbf{E}}$ | $FrR$ |
| $E_{K_0}$ | $E(K_0')$ | $\mathbf{E}_F$ | – |
| $E(K_0)$ | $E_0$ | – | $E_0$ |
| $E_K$ | – | $\mathbf{E}_K$ | |
| $E(K)$ | $E(K)$ | – | $E_K$ |
| $E^{sep}$ | $E_0^{sep}$ | $\mathbf{E}$ | $E^{sep}$ |
| $W(FrR)$ | $W(FrR)$ | $\tilde{\mathbf{A}}$ | $W(FrR)$ |
| $W(FrR)[1/p]$ | $W(FrR)[1/p]$ | $\tilde{\mathbf{B}}$ | $W(FrR)[1/p]$ |
| $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ | – | $\mathbf{A}_K$ | – |
| $\mathcal{E}_K$ | – | $\mathbf{B}_K$ | – |
| $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ | $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ | – | $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ |
| $\mathcal{E}(K)$ | $\mathcal{E}(K)$ | – | $\mathcal{E}(K)$ |
| $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$ | $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$ | – | $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$ |
| $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ | $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ | $\mathbf{A}$ | – |
| $\mathcal{E}_{nr}$ | $\mathcal{E}_{nr}$ | – | $\mathcal{E}_{nr}$ |
| $\widehat{\mathcal{E}_{nr}}$ | $\widehat{\mathcal{E}_{nr}}$ | $\mathbf{B}$ | – |

Zur zweiten Zeile ist anzumerken, daß im ganzen Abschnitt [Fon90, A.3.1.7.] $K$ durch $K_0$ ersetzt werden sollte.