Math. Ann. 260, 495–510 (1982)

Mathematische Annalen
© Springer-Verlag 1982

Zur Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer über globalen Funktionenkörpern

Peter Schneider

Fakultät für Mathematik der Universität, Universitätsstraße 31, D-8400 Regensburg, Bundesrepublik Deutschland

Ist A eine abelsche Varietät über dem globalen Körper K, so stellt die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer eine Verbindung her zwischen dem Verhalten der Hasse-Weil L-Funktion $L(A,s)$ bei $s=1$ und den wichtigsten arithmetischen Invarianten von A [Rang von $A(K)$, Ordnung der Tate-Šafarevič-Gruppe $Ш_K(A), \ldots$]; für die genaue Formulierung sei auf [15] verwiesen. Im Falle, daß K ein Zahlkörper ist, muß dieses Problem als eines der schwierigsten in der Zahlentheorie angesehen werden. Wesentlich zugänglicher ist der andere Fall, daß K ein Funktionenkörper der Charakteristik $p>0$ ist: Hier ist die Vermutung vollständig bewiesen, falls die abelsche Varietät A konstant ist [6]. Für elliptische Kurven haben Artin und Tate in [15] gezeigt, daß die Vermutung „bis auf den p-Anteil" richtig ist, falls nur $Ш_K(A)(l)$ endlich ist für eine Primzahl $l \neq p$. Nach Milne [7] ist dabei im Falle $p>2$ die Einschränkung „bis auf den p-Anteil" überflüssig. In [7] findet man auch Auskunft darüber, für welche elliptischen Kurven die Endlichkeit von $Ш_K(A)$ bisher bekannt ist. Das Ziel dieser Arbeit ist es, den Satz von Artin und Tate auf beliebige abelsche Varietäten A zu verallgemeinern.

In Abschn. 1 wird das Verhalten von $L(A,s)$ bei $s=1$ zunächst in rein cohomologischen Termen beschrieben. Dies beruht auf einer Analyse der Grothendieckschen Darstellung von $L(A,s)$ als (bis auf eine Variablensubstitution) rationale Funktion. Der Abschn. 2 dient der Berechnung der auftretenden cohomologischen Größen. Die dabei die wesentliche Rolle spielende Yoneda-Paarung wird schließlich in Abschn. 3 als die Néron-Tatesche Höhenpaarung identifiziert.

Notation

Sei K ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen mit genauem Konstantenkörper $\mathbb{F}_q$; ferner sei S die projektive glatte integre Kurve über $\mathbb{F}_q$, welche ein Modell von K ist. $\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q$ und $\bar{K}/K$ bezeichnen jeweils einen separabel-algebraischen Abschluß und $\varphi \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ den „arithmetischen" Frobenius; wir setzen $\bar{S} := S \underset{\mathbb{F}_q}{\times} \overline{\mathbb{F}}_q$. Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in S$ sei $k_x/\mathbb{F}_q$ der Restklassenkörper von x, $\deg x := [k_x : \mathbb{F}_q]$ und $I_x \leqq \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ eine (bis auf Konjugation bestimmte) Trägheitsgruppe.

Sei A eine abelsche Varietät der Dimension $d>0$ über K und $\bar{A} := A \times_K \bar{K}$; $\tilde{A}$ sei die duale abelsche Varietät über K, $\mathscr{A}$ bzw. $\tilde{\mathscr{A}}$ das Néron-Modell von A bzw. $\tilde{A}$ über S und $\mathscr{A}^0$ die Zusammenhangskomponente von $\mathscr{A}$ im Sinne von SGA 3 VI.B, Abschn. 3.

Noch einige allgemeinere Bezeichnungen: Für jede abelsche Gruppe M sei $\mathrm{Tor}\,M$ die Torsionsuntergruppe, $\mathrm{Div}\,M$ die maximale divisible Untergruppe und $M_{\mathrm{Tor}} := M/\mathrm{Tor}\,M$ bzw. $M_{\mathrm{Div}} := M/\mathrm{Div}\,M$. Ist G eine abelsche Gruppe oder ein kommutatives Gruppenschema, so setzen wir $G_n := \ker(G \xrightarrow{n} G)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $G(l) := \varprojlim G_{l^\nu}$ für jede Primzahl l. Eine Paarung von endlich-erzeugten $\mathbb{Z}$- bzw. $\mathbb{Z}_l$-Moduln heißt nicht-ausgeartet, wenn sie es modulo der Torsionsuntergruppen ist; in naheliegender Weise ist dann ihre Determinante bis auf eine Einheit in $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}_l$ definiert. Für den Begriff der Tate-Twistung von Garben bzw. Galoismoduln siehe [8], S. 163. Falls nicht anders gekennzeichnet sind alle Cohomologiegruppen bezüglich der etalen Topologie gebildet.

1. Die Hasse-Weil L-Funktion von A

Von nun an sei eine Primzahl $l \nmid q$ fest gewählt. Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in S$ sei

$$P_x(t) := \det(1 - \varphi^{-\deg x} \cdot t^{\deg x}; H^1(\bar{A}, \mathbb{Q}_l)^{I_x}).$$

Es ist bekannt, daß die Polynome $P_x(t)$ von l unabhängige Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ besitzen [13]. Wir setzen

$$L_A(t) := \prod_x P_x(t)^{-1} \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Grundlegend für alles Folgende ist, daß $L_A(t)$ eine explizite Darstellung als rationale Funktion von t besitzt. Dazu betrachten wir das projektive System $(\mathscr{A}^0_{l^\nu})_{\nu \geqq 0}$ von quasi-endlichen etalen S-Gruppenschemata, welches eine konstruierbare $\mathbb{Z}_l$-Garbe $T_l(\mathscr{A}^0)$ auf S definiert (siehe SGA 7 IX 2.2.1); mit $V_l(\mathscr{A}^0) := T_l(\mathscr{A}^0) \otimes \mathbb{Q}_l$ bezeichnen wir die zugehörige $\mathbb{Q}_l$-Garbe auf S.

Satz 1. $L_A(q^{-1}t) = \prod_{i=0}^{2} \det(1 - \varphi^{-1}t; H^i(\bar{S}, V_l(\mathscr{A}^0)))^{(-1)^{i+1}}$.

Beweis. Da A und $\tilde{A}$ isogen über K sind, gilt $L_A(t) = L_{\tilde{A}}(t)$. Sei nun $\bar{x}$ ein geometrischer Punkt über dem abgeschlossenen Punkt $x \in S$. Der Halm von $V_l(\mathscr{A}^0)$ in $\bar{x}$ berechnet sich zu

$$V_l(\mathscr{A}^0)_{\bar{x}} = (\varprojlim A(\bar{K})_{l^\nu} \otimes \mathbb{Q}_l)^{I_x}.$$

Andererseits ergibt sich aus der Cohomologiesequenz zur Kummersequenz über $\bar{\tilde{A}}$ leicht

$$H^1(\bar{\tilde{A}}, \mathbb{Q}_l(1)) = \varprojlim A(\bar{K})_{l^\nu} \otimes \mathbb{Q}_l.$$

Folglich ist

$$H^1(\bar{\tilde{A}}, \mathbb{Q}_l)^{I_x} = V_l(\mathscr{A}^0)_{\bar{x}}(-1)$$

und damit

$$L_A(q^{-1}t) = L_{\tilde{A}}(q^{-1}t) = \prod_x \det(1 - \varphi^{-\deg x} \cdot t^{\deg x}; V_l(\mathscr{A}^0)_{\bar{x}})^{-1}.$$

Daraus folgt die Behauptung nun mit Hilfe des bekannten Satzes von Grothendieck (siehe [8, VI 13.3]), wenn man noch berücksichtigt, daß die cohomologische l-Dimension von $\bar{S}$ gleich 2 ist.

Bemerkungen. 1) $L_A(t) \in \mathbb{Q}(t)$ (vgl. [8, VI 12.5(a)]).

2) $L(A,s) := L_A(q^{-s})$ ist meromorph in der komplexen Ebene und heißt *Hasse-Weil L-Funktion* von A/K.

3) Mit Hilfe der Poincaré-Dualität über $\bar{S}$ und einer Polarisierung $A \to \tilde{A}$ läßt sich zeigen, daß $L(A,s)$ eine Funktionalgleichung bezüglich $s \mapsto 2-s$ besitzt.

4) Die Pole von $L(A,s)$ liegen auf den Geraden $\mathrm{Re}\,s = \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$, die Nullstellen auf der Geraden $\mathrm{Re}\,s = 1$ [13] und [3, 3.2.3].

Wir wollen in dieser Arbeit das Verhalten von $L(A,s)$ bei $s=1$ studieren. Dazu seien die Zahlen $c \in \mathbb{Q}^\times$ und $\varrho \geqq 0$ definiert durch

$$\begin{aligned} L(A,s) &\sim c \cdot (1 - q^{1-s})^\varrho \\ &\sim c \cdot (\log q)^\varrho \cdot (s-1)^\varrho \quad \text{für} \quad s \to 1. \end{aligned}$$

Erste Formeln für c und ϱ lassen sich mit Hilfe des cohomologischen Formalismus aus Satz 1 herleiten.

Dazu müssen wir zunächst die Garben $T_l(\mathscr{A}^0)$ und (analog definiert) $T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)$ etwas genauer betrachten. Sei $U \subseteq S$ eine nichtleere offene Teilmenge, so daß $\mathscr{A}/U$ und damit auch $\tilde{\mathscr{A}}/U$ ein abelsches Schema ist; insbesondere ist $\tilde{\mathscr{A}}/U$ dann das zu $\mathscr{A}/U$ duale abelsche Schema. Ferner ist $(\mathscr{A}/U)_{l^\nu}$ ein endliches etales U-Gruppenschema, dessen Cartier-Dual gerade $(\tilde{\mathscr{A}}/U)_{l^\nu}$ ist. Für die durch die projektiven Systeme $((\mathscr{A}/U)_{l^\nu})_{\nu \geqq 0}$ und $((\tilde{\mathscr{A}}/U)_{l^\nu})_{\nu \geqq 0}$ definierten konstruierbaren $\mathbb{Z}_l$-Garben $T_l(\mathscr{A}/U)$ und $T_l(\tilde{\mathscr{A}}/U)$ auf U gilt also:

a) $T_l(\mathscr{A}/U) = T_l(\mathscr{A}^0)/U$, $T_l(\tilde{\mathscr{A}}/U) = T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)/U$,

b) $T_l(\mathscr{A}/U)$ und $T_l(\tilde{\mathscr{A}}/U)$ sind tordiert konstant,

c) $\mathit{Hom}(T_l(\mathscr{A}/U), \mathbb{Z}_l(1)) = T_l(\tilde{\mathscr{A}}/U)$.

Bezeichnet $j: U \hookrightarrow S$ die natürliche offene Immersion, so ist

d) $j_*(\mathscr{A}/U)_{l^\nu} = \mathscr{A}_{l^\nu}$, $j_*(\tilde{\mathscr{A}}/U)_{l^\nu} = \tilde{\mathscr{A}}_{l^\nu}$

und damit

e) $\mathit{Hom}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(1)) = \tilde{\mathscr{A}}_{l^\nu}$.

Man überzeugt sich leicht davon, daß $(\mathscr{A}^0_{l^\nu})_{\nu \geqq 0}$ bzw. $(\tilde{\mathscr{A}}^0_{l^\nu})_{\nu \geqq 0}$ das projektive System der universellen Bilder von $(\mathscr{A}_{l^\nu})_{\nu \geqq 0}$ bzw. $(\tilde{\mathscr{A}}_{l^\nu})_{\nu \geqq 0}$ ist; daraus folgt:

f) $j_* T_l(\mathscr{A}/U) = T_l(\mathscr{A}^0)$, $j_* T_l(\tilde{\mathscr{A}}/U) = T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)$ (beachte hierzu SGA $4\frac{1}{2}$ [Th. finitude] und SGA 5 VI 2.2),

g) $H^i(S, T_l(\mathscr{A}^0)) = \varprojlim H^i(S, \mathscr{A}_{l^\nu})$, $H^i(S, T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)) = \varprojlim H^i(S, \tilde{\mathscr{A}}_{l^\nu})$.

Aufgrund dieser Vorbetrachtung stellen wir fest, daß das Cup-Produkt folgende Paarungen von endlich-erzeugten $\mathbb{Z}_l$-Moduln induziert:

$$\begin{array}{l} \langle\, ,\rangle_l : H^1(S, T_l(\mathscr{A}^0)) \times H^1(S, T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)) \xrightarrow{\cup} H^2(S, \mathbb{Z}_l(1)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^2(\bar{S}, \mathbb{Z}_l(1)) = \mathbb{Z}_l \end{array}$$

und

$$(\, ,)_l : H^2(S, T_l(\mathscr{A}^0)) \times H^1(S, T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)) \xrightarrow{\cup} H^3(S, \mathbb{Z}_l(1)) = \mathbb{Z}_l .$$

Dabei ist die letztere Paarung wegen der Poincaré-Dualität nicht-ausgeartet (siehe [8, V Abschn. 2]). Nun können wir unser erstes Resultat formulieren. Auf den Beweis sei verzichtet, da er in einer nahezu wörtlichen Übertragung des Beweises von Theorem 5 in [10] besteht.

Lemma 2. i) *$\varrho \geqq \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_l} H^1(S, T_l(\mathscr{A}^0))$;*
ii) *$\varrho = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_l} H^1(S, T_l(\mathscr{A}^0)) \Leftrightarrow \langle\, ,\rangle_l$ ist nicht-ausgeartet; in diesem Falle gilt*

$$|c|_l^{-1} = \left| \frac{\det\langle\, ,\rangle_l}{\det(\, ,)_l} \right|_l^{-1} \cdot \prod_{i \geqq 0} \# \operatorname{Tor} H^i(S, T_l(\mathscr{A}^0))^{(-1)^i} .$$

Bemerkung. Sei $j: U \hookrightarrow S$ eine offene Immersion ($U \neq \phi$) und $\mathscr{E}$ eine tordiert konstante konstruierbare lokal-freie $\mathbb{Z}_l$-Garbe auf U, welche punktuell rein vom Gewicht -1 ist (im Sinne von [3, 1.2.2]). Dann läßt sich für die L-Funktion der konstruierbaren $\mathbb{Z}_l$-Garbe $j_*\mathscr{E}$ an der Stelle $s=0$ ein Lemma 2 entsprechendes Resultat beweisen. In diesem Zusammenhang steht die Paarung

$$\begin{array}{l} H^1(S, j_*\mathscr{E}) \times H^1(S, j_* \mathcal{H}om(\mathscr{E}, \mathbb{Z}_l(1))) \xrightarrow{\cup} H^2(S, \mathbb{Z}_l(1)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^2(\bar{S}, \mathbb{Z}_l(1)) = \mathbb{Z}_l \end{array}$$

im Vordergrund des Interesses.

2. Die Berechnung der Cohomologiegruppen

Mit $Ш_K(A)$ bezeichnen wir wie üblich die Tate-Šafarevič-Gruppe von A/K. Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in S$ sei ferner $\pi_x(A)$ das endliche etale k_x-Gruppenschema der Zusammenhangskomponenten der Reduktion $\mathscr{A} \underset{S}{\times} k_x$. Die Garbe $\mathscr{F}$ auf dem etalen Situs von S sei definiert durch die exakte Sequenz

$$0 \to \mathscr{A}^0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{F} \to 0 .$$

Ersichtlich ist $\mathscr{F}$ eine Wolkenkratzergarbe mit $H^i(S, \mathscr{F}) = \bigoplus_x H^i(k_x, \pi_x(A))$.

Lemma 3. i) *Es bestehen die exakten Sequenzen*

$$0 \to (\mathscr{A}(S)/\mathscr{A}^0(S))(l) \to \bigoplus_x H^0(k_x, \pi_x(A))(l) \to H^1(S, \mathscr{A}^0)(l) \to Ш_K(A)(l) \to 0$$

und

$$0 \to Ш_K(A)(l) \to H^1(S, \mathscr{A})(l) \to \bigoplus_x H^1(k_x, \pi_x(A))(l)$$
$$\to H^2(S, \mathscr{A}^0)(l) \to H^2(S, \mathscr{A})(l) \to 0 ;$$

ii) *$\# H^1(k_x, \pi_x(\tilde{A})) = \# H^0(k_x, \pi_x(A))$;*
iii) *$Ш_K(\tilde{A})(l)$ ist genau dann endlich, wenn $Ш_K(A)(l)$ es ist; es gilt dann $\# Ш_K(\tilde{A})(l) = \# Ш_K(A)(l)$.*

Beweis. i) Nach [4] appendix identifiziert sich $Ш_K(A)(l)$ in kanonischer Weise mit dem Bild unter dem Homomorphismus $H^1(S, \mathscr{A}^0)(l) \to H^1(S, \mathscr{A})(l)$. Die gesuchten Sequenzen ergeben sich nun durch Aufspaltung der zur obigen Garbensequenz gehörigen langen exakten Cohomologiesequenz. ii) Nach SGA 7 IX 1.3.1 sind $\pi_x(A)$ und $\pi_x(\tilde{A})$ dual zueinander. iii) Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Tatsache, daß A und $\tilde{A}$ über K isogen sind. Darüber hinaus ist $Ш_K(\tilde{A})(l)_{\mathrm{Div}}$ dual zu $Ш_K(A)(l)_{\mathrm{Div}}$ [14].

Lemma 4. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathscr{A}^0(S) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \to & H^1(S, \mathscr{A}^0(l)) & \to & H^1(S, \mathscr{A}^0)(l) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \mathscr{A}(S) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \to & H^1(S, \mathscr{A}(l)) & \to & H^1(S, \mathscr{A})(l) & \to 0 \end{array}$$

ist kommutativ und exakt.

Beweis. Das Diagramm entsteht durch Übergang zur Cohomologie und anschließende Bildung des direkten Limes (bezüglich ν) aus dem kommutativen exakten Garbendiagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathscr{A}^0_{l^\nu} & \to & \mathscr{A}^0 & \xrightarrow{l^\nu} & \mathscr{A}^0 & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \mathscr{A}_{l^\nu} & \to & \mathscr{A} & \xrightarrow{l^\nu} & \mathscr{A} . & \end{array}$$

Da der Morphismus $\mathscr{A} \xrightarrow{l^\nu} \mathscr{A}$ im allgemeinen nicht surjektiv ist, ist jedoch eine kleine Zusatzüberlegung erforderlich, für welche wir auf [11] (6.6) verweisen.

Lemma 5. i) *$H^i(S, T_l(\mathscr{A}^0)) = 0$ für $i \neq 1, 2, 3$;*
ii) *$\# H^i(S, \mathscr{A}(l))_{\mathrm{Div}} = \# \operatorname{Tor} H^{3-i}(S, T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)) = \# H^{2-i}(S, \tilde{\mathscr{A}}^0(l))_{\mathrm{Div}}$;*
iii) *Ist $Ш_K(A)(l)$ endlich, so gilt*

$$\prod_{i \geqq 0} \# \operatorname{Tor} H^i(S, T_l(\mathscr{A}^0))^{(-1)^i} = \frac{\# Ш_K(A)(l)}{\# A(K)(l) \cdot \# \tilde{A}(K)(l)}$$
$$\cdot \prod_x \# \pi_x(A)(k_x)(l) \cdot |[\mathscr{A}(S)_{\mathrm{Tor}} : \mathscr{A}^0(S)_{\mathrm{Tor}}]|_l ;$$

iv) *Die kanonische Injektion*

$$\mathscr{A}^0(S) \otimes \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\delta} H^1(S, T_l(\mathscr{A}^0))$$

ist surjektiv genau dann, wenn $Ш_K(A)(l)$ endlich ist.

Beweis. i) Dies folgt für $i=0$ aus der Endlichkeit von $\operatorname{Tor}\mathscr{A}(S)$ und für $i>3$ aus der Tatsache, daß die cohomologische l-Dimension von S gleich 3 ist. ii) Die erste Identität ergibt sich aus der Poincaré-Dualität über S [8, V Abschn. 2], die zweite aus der zur „Garbensequenz" $0\to T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)\to V_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)\to\tilde{\mathscr{A}}^0(l)\to 0$ gehörigen exakten Cohomologiesequenz. iii) Wegen ii) (angewendet auf $\tilde{\mathscr{A}}$ statt $\mathscr{A}$) haben wir $\#\operatorname{Tor}H^1(S,T_l(\mathscr{A}^0))=\#\tilde{\mathscr{A}}^0(S)(l)$ und $\#\operatorname{Tor}H^3(S,T_l(\mathscr{A}^0))=\#\tilde{\mathscr{A}}(S)(l)=\#\tilde{A}(K)(l)$. Unter Berücksichtigung von Lemma 4 und der ersten Sequenz in Lemma 3i) ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned}\#\operatorname{Tor}H^2(S,T_l(\mathscr{A}^0))&=\#H^1(S,\mathscr{A}^0(l))_{\mathrm{Div}}=\#H^1(S,\mathscr{A}^0)(l)\\&=\#\text{Ш}_K(A)(l)\cdot\prod_x\#\pi_x(A)(k_x)(l)\cdot|[\mathscr{A}(S):\mathscr{A}^0(S)]|_l.\end{aligned}$$

Die Behauptung erhalten wir nun durch Zusammenmultiplizieren. iv) Aus der exakten Garbensequenz $0\to\mathscr{A}^0_{l^\nu}\to\mathscr{A}^0\xrightarrow{l^\nu}\mathscr{A}^0\to 0$ leiten wir durch Übergang zur Cohomologie und anschließende Bildung des projektiven Limes (bezüglich ν) die exakte Sequenz

$$0\to\mathscr{A}^0(S)\otimes\mathbb{Z}_l\xrightarrow{\delta}H^1(S,T_l(\mathscr{A}^0))\to\varprojlim H^1(S,\mathscr{A}^0)_{l^\nu}\to 0$$

her. Aber es gilt $\varprojlim H^1(S,\mathscr{A}^0)_{l^\nu}=0$ genau dann, wenn $H^1(S,\mathscr{A}^0)(l)$ endlich ist, was wiederum nach der ersten Sequenz in Lemma 3i) genau dann der Fall ist, wenn $\text{Ш}_K(A)(l)$ endlich ist.

Lemma 6. *Ist $\text{Ш}_K(A)(l)$ endlich, so gilt:*

i) *Die natürliche Abbildung* $\operatorname{Div}H^2(S,\mathscr{A}^0(l))\to\operatorname{Div}H^2(S,\mathscr{A}(l))$ *ist surjektiv mit endlichem Kern von der Ordnung*

$$|[\tilde{\mathscr{A}}(S)_{\mathrm{Tor}}:\tilde{\mathscr{A}}^0(S)_{\mathrm{Tor}}]|_l^{-1}\,;$$

ii) $|\det(\,,\,)_l|_l^{-1}=|[\tilde{\mathscr{A}}(S)_{\mathrm{Tor}}:\tilde{\mathscr{A}}^0(S)_{\mathrm{Tor}}]|_l^{-1}$.

Beweis. i) Es besteht die exakte Sequenz

$$\begin{aligned}&H^1(S,\mathscr{A}^0(l))\to H^1(S,\mathscr{A}(l))\to\bigoplus_x H^1(k_x,\pi_x(A))(l)\\&\to H^2(S,\mathscr{A}^0(l))\xrightarrow{\alpha}H^2(S,\mathscr{A}(l))\to 0.\end{aligned}$$

Wegen der Endlichkeit des mittleren Termes können wir die beiden ersten Terme durch ihre maximalen divisiblen Untergruppen dividieren und erhalten unter Berücksichtigung von Lemma 4 die exakte Sequenz

$$\begin{aligned}&H^1(S,\mathscr{A}^0)(l)_{\mathrm{Div}}\to H^1(S,\mathscr{A})(l)_{\mathrm{Div}}=H^1(S,\mathscr{A}(l))_{\mathrm{Div}}\\&\to\bigoplus_x H^1(k_x,\pi_x(A))(l)\to\ker\alpha\to 0.\end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 3 bedeutet dies

$$\#\ker\alpha=\frac{\#\text{Ш}_K(A)(l)}{\#H^1(S,\mathscr{A}(l))_{\mathrm{Div}}}\cdot\prod_x\#H^0(k_x,\pi_x(\tilde{A}))(l).$$

Die Kombination von Lemma 3, Lemma 4 und Lemma 5ii) liefert andererseits

$$\begin{aligned}\#H^1(S,\mathscr{A}(l))_{\mathrm{Div}}&=\#H^1(S,\tilde{\mathscr{A}}^0(l))_{\mathrm{Div}}=\#H^1(S,\tilde{\mathscr{A}}^0)(l)\\&=\#\text{Ш}_K(A)(l)\cdot\prod_x\#H^0(k_x,\pi_x(\tilde{A}))(l)\cdot|[\tilde{\mathscr{A}}(S):\tilde{\mathscr{A}}^0(S)]|_l.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\#\ker\alpha=|[\tilde{\mathscr{A}}(S):\tilde{\mathscr{A}}^0(S)]|_l^{-1},$$

woraus wegen

$$\#H^2(S,\mathscr{A}^0(l))_{\mathrm{Div}}/\#H^2(S,\mathscr{A}(l))_{\mathrm{Div}}=\#\tilde{\mathscr{A}}(S)(l)/\#\tilde{\mathscr{A}}^0(S)(l)$$

(Lemma 5ii)) die Behauptung folgt.

ii) Zunächst haben wir das kommutative exakte Diagramm

$$\begin{array}{ccc}0 & & 0\\ \downarrow & & \downarrow\\ (\tilde{\mathscr{A}}^0(S)\otimes\mathbb{Z}_l)_{\mathrm{Tor}} & \xrightarrow{\cong} & H^1(S,T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0))_{\mathrm{Tor}}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \tilde{\mathscr{A}}^0(S)\otimes\mathbb{Q}_l & \xrightarrow{\cong} & H^1(S,V_l(\tilde{\mathscr{A}}^0))\\ \downarrow & & \downarrow\\ \tilde{\mathscr{A}}^0(S)\otimes\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Div}H^1(S,\tilde{\mathscr{A}}^0(l))\\ \downarrow & & \downarrow\\ 0 & & 0\end{array},$$

wobei die Abbildungen in den Zeilen durch Verbindungshomomorphismen induziert sind. Da mit $\text{Ш}_K(A)(l)$ auch $\text{Ш}_K(\tilde{A})(l)$ endlich ist, ist die Abbildung in der ersten Zeile nach Lemma 5iv) (angewendet auf $\tilde{A}$ statt A) ein Isomorphismus, also auch diejenige in der letzten Zeile. Folglich sind in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}\operatorname{Hom}(H^1(S,T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)),\mathbb{Z}_l) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Hom}(\tilde{\mathscr{A}}^0(S)\otimes\mathbb{Z}_l,\mathbb{Z}_l)\\ \uparrow & & \|\\ H^2(S,T_l(\mathscr{A}^0))_{\mathrm{Tor}} & & \|\\ \downarrow\cong & & \|\\ \operatorname{Hom}(\operatorname{Div}H^1(S,\tilde{\mathscr{A}}(l)),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) & & \|\\ \downarrow & & \|\\ \operatorname{Hom}(\operatorname{Div}H^1(S,\tilde{\mathscr{A}}^0(l)),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Hom}(\tilde{\mathscr{A}}^0(S)\otimes\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)\end{array}$$

die durch Dualisieren gewonnenen Abbildungen in den Zeilen ebenfalls Isomorphismen. Die obere und die mittlere Abbildung in der linken Spalte sind beide durch das Cup-Produkt induziert. Aufgrund der Poincaré-Dualität ist die obere injektiv mit endlichem Cokern der Ordnung $|\det(\,,\,)_l|_l^{-1}$ und die mittlere bijektiv.

Wir erhalten also aus diesem Diagramm, daß $|\det(\ ,\ )_l|_l^{-1}$ gleich der Ordnung des Kerns der surjektiven Abbildung

$$\operatorname{Div} H^1(S, \tilde{\mathscr{A}}^0(l)) \to \operatorname{Div} H^1(S, \tilde{\mathscr{A}}(l))$$

ist. Aus Lemma 4 (für $\tilde{A}$ statt A) folgt aber wegen der Endlichkeit von $Ш_K(\tilde{A})(l)$, daß es sich dabei gerade um den Homomorphismus

$$\tilde{\mathscr{A}}^0(S) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to \tilde{\mathscr{A}}(S) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$$

handelt, dessen Kern ersichtlich die Ordnung $|[\tilde{\mathscr{A}}(S)_{\mathrm{Tor}} : \tilde{\mathscr{A}}^0(S)_{\mathrm{Tor}}]|_l^{-1}$ besitzt.

Nun haben wir uns mit der Paarung $\langle\ ,\ \rangle_l$ zu beschäftigen. In einem ersten Schritt wollen wir sie mit der (von l unabhängigen) Paarung

$$\langle\ ,\ \rangle : H^0(S, \mathscr{A}^0) \times \operatorname{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\vee} H^1(S, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic} S \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

vergleichen. Hierbei steht „$\vee$" für das Yoneda-Produkt, und $\deg : \operatorname{Pic} S \to \mathbb{Z}$ bezeichnet die übliche Gradabbildung. Zuerst machen wir jedoch einige Bemerkungen, die später stillschweigend benutzt werden:

1) Für die Cohomologie von Garben, die von glatten Gruppenschemata repräsentiert werden, ist es nach einem Satz von Grothendieck [8, III 3.11(b)] gleichgültig, ob die Cohomologiegruppen bezüglich der *fppf*- oder der etalen Topologie gebildet werden.

2) Für eine Garbe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln ist es gleichgültig, ob ihre Cohomologiegruppen bezüglich der Kategorie aller abelschen Garben oder der Kategorie der Garben von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln (auf dem jeweiligen Situs) gebildet werden [8, III 2.25].

3) Das eben Gesagte trifft beides für die Ext-Funktoren nicht zu. Hier unterscheiden wir durch den Index S_{fppf} bzw. S_{et} bzw. $(n) - S_{et}$, ob die entsprechende Bildung bezüglich der Kategorie der abelschen Garben auf dem *fppf*-Situs bzw. dem etalen Situs von S bzw. bezüglich der Kategorie der Garben von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln auf dem etalen Situs von S vorgenommen wurde.

4) Sei $\mathfrak{U}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten. Seien A und B Objekte in $\mathfrak{U}$, und bezeichne $\operatorname{Ext}_{\mathfrak{U}}(A, B)$ die Gruppe der Isomorphieklassen von Erweiterungen von A mit B. Dann besteht ein Isomorphismus

$$\varepsilon : \operatorname{Ext}_{\mathfrak{U}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{U}}(A, B),$$

welcher sich folgendermaßen beschreiben läßt:

Für $(0 \to B \to C \to A \to 0) = e \in \operatorname{Ext}_{\mathfrak{U}}(A, B)$ sei $\delta_e : \operatorname{Hom}_{\mathfrak{U}}(B, B) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{U}}(A, B)$ der zugehörige Verbindungshomomorphismus; dann ist

$$\varepsilon(e) = \delta_e(\mathrm{id}_B).$$

Wir fassen ε stets als Identifikation auf. Sei nun F ein linksexakter additiver Funktor von $\mathfrak{U}$ in eine weitere abelsche Kategorie mit den Rechtsableitungen R^iF. Dann besitzt die Yoneda-Paarung

$$R^iF(A) \times \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{U}}(A, B) \xrightarrow{\vee} R^{i+1}F(B)$$

folgende explizite Beschreibung:

Für $(0 \to B \to C \to A \to 0) = e \in \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{U}}(A, B)$ sei $\delta_e : R^iF(A) \to R^{i+1}F(B)$ der zugehörige Verbindungshomomorphismus; dann gilt

$$a \vee e = -\delta_e(a) \quad \text{für} \quad a \in R^iF(A).$$

Siehe hierzu [2].

Zu dem angekündigten Vergleich betrachten wir das Diagramm [wie üblich ist $\mu_{l^\nu} := (\mathbb{G}_m)_{l^\nu}$]

$$\begin{tikzcd}
H^0(S, \mathscr{A}^0) \arrow[d, "-\delta"'] & \times \operatorname{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\vee"] \arrow[d, "r_\nu"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & H^1(S, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic} S \arrow[r, "\deg"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[ddd, phantom, "(4)"] & \mathbb{Z} \arrow[ddd] \\
H^1(S, \mathscr{A}^0_{l^\nu}) \arrow[d] & \times \operatorname{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}) \arrow[r, "\vee"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & H^2(S, \mu_{l^\nu}) \arrow[d, equal] & \\
H^1(S, \mathscr{A}_{l^\nu}) \arrow[d, equal] & \times \operatorname{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}) \arrow[r, "\vee"] \arrow[u] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & H^2(S, \mu_{l^\nu}) \arrow[d, equal] & \\
H^1(S, \mathscr{A}_{l^\nu}) \times & H^1(S, \tilde{\mathscr{A}}_{l^\nu}) \arrow[r, "\cup"] \arrow[u, "\cong"] & H^2(S, \mu_{l^\nu}) \arrow[r] & H^2(\bar{S}, \mu_{l^\nu}) = \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung r_ν ist definiert durch

$$(0 \to \mathbb{G}_m \to \mathscr{X} \to \mathscr{A}^0 \to 0) \mapsto (0 \to \mu_{l^\nu} \to \mathscr{X}_{l^\nu} \to \mathscr{A}^0_{l^\nu} \to 0);$$

man beachte hierzu, daß die linke Sequenz bei Restriktion auf den etalen Situs exakt bleibt ($\mathbb{G}_{m/S}$ ist glatt!), und daß $\mathbb{G}_{m/S} \xrightarrow{l^\nu} \mathbb{G}_{m/S}$ etal und surjektiv ist. Die Kommutativität von (1) ergibt sich mit Hilfe der obigen expliziten Beschreibung der Yoneda-Paarung aus der Antikommutativität der Verbindungshomomorphismen. (2) ist kommutativ aus Gründen der Funktorialität. Die mittlere Spalte in (3) ist der Eckenmorphismus aus der Spektralsequenz

$$H^i(S, \mathcal{E}xt^j_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mu_{l^\nu})) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{i+j}_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mu_{l^\nu});$$

aber diese Spektralsequenz zerfällt. Dazu und zur Kommutativität von (3) und (4) siehe [8] Beweis von V 2.2(b) bzw. V 1.20 bzw. Beweis von V 2.1.

Lemma 7. *Sei $Ш_K(A)(l)$ endlich. Die Paarung $\langle\ ,\ \rangle_l$ ist nicht-ausgeartet genau dann, wenn die Paarung $\langle\ ,\ \rangle$ es ist; in diesem Falle gilt*

$$|\det\langle\ ,\ \rangle|_l = \left|\frac{\det\langle\ ,\ \rangle_l}{\det(\ ,\ )_l}\right|_l.$$

Beweis. Aus unserem obigen Diagramm erhalten wir durch Übergang zum projektiven Limes das kommutative Diagramm von Paarungen

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}^0(S) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[d, "-\delta"'] & \times \operatorname{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r, "\langle\,,\,\rangle"] \arrow[d, "\lim r_\nu"] & \mathbb{Z}_l \arrow[d, equal] \\
H^1(S, T_l(\mathscr{A}^0)) \arrow[dd, equal] & \times \varprojlim \operatorname{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}) \arrow[r] & \mathbb{Z}_l \arrow[dd, equal] \\
& \varprojlim \operatorname{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}) \arrow[u] \arrow[d, equal] & \\
H^1(S, T_l(\mathscr{A}^0)) \times & H^1(S, T_l(\tilde{\mathscr{A}}^0)) \arrow[r, "\langle\,,\,\rangle_l"] & \mathbb{Z}_l.
\end{tikzcd}$$

[Man beachte, daß $\mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)$ nach Lemma 9iii) endlich-erzeugt ist.] Die Behauptung folgt nun aus den nachstehenden drei Tatsachen:

(1) δ ist ein Isomorphismus;

(2) $\varprojlim r_\nu$ ist ein Isomorphismus;

(3) $(\varprojlim \mathrm{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}))_{\mathrm{Tor}} \to (\varprojlim \mathrm{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}))_{\mathrm{Tor}}$ ist injektiv mit endlichem Cokern von der Ordnung $|\det(\,,\,)_l|_l^{-1}$.

Die Aussage (1) wurde in Lemma 5iv) bewiesen. Für den Beweis von (3) nutzen wir aus, daß die Poincaré-Dualität über S das kommutative Diagramm von nicht-ausgearteten Paarungen zwischen endlichen Gruppen

$$\begin{tikzcd}
H^2(S, \mathscr{A}^0_{l^\nu}) \times \mathrm{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
H^2(S, \mathscr{A}_{l^\nu}) \times \mathrm{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}) \arrow[r] \arrow[u, shift left=20ex] & \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

liefert [8, V Abschn. 2]. Wir erkennen also, daß es per Dualität genügt zu zeigen, daß die Abbildung

$$\mathrm{Div}\, H^2(S, \mathscr{A}^0(l)) \to \mathrm{Div}\, H^2(S, \mathscr{A}(l))$$

surjektiv ist mit endlichem Kern von der Ordnung $|\det(\,,\,)_l|_l^{-1}$. Genau dies haben wir aber in Lemma 6 getan. Zum Beweis von (2) gehen wir aus von dem kommutativen exakten Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) \arrow[dl, "r_\nu"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}) & \mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mathbb{G}_m) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d] \\
 & \mathrm{Ext}^2_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)_{l^\nu} \arrow[d] \\
 & 0\,;
\end{tikzcd}$$

hierbei ist die Abbildung in der Zeile in völlig analoger Weise wie r_ν definiert. Es handelt sich um einen Isomorphismus, da wir eine inverse Abbildung angeben können: Sei $(0 \to \mu_{l^\nu} \to \mathscr{Y} \to \mathscr{A}^0_{l^\nu} \to 0) \in \mathrm{Ext}^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mu_{l^\nu})$. Aus der Descent-Theorie folgt, daß $\mathscr{Y}$ dann ebenfalls ein etales S-Gruppenschema „ist" (vgl. [8, III Abschn. 4]). Wir können also diese Sequenz auch als exakte Garbensequenz über dem $fppf$-Situs von S lesen. Das zugehörige Bildelement in $\mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mathbb{G}_m)$ sei nun definiert durch das kommutative exakte Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_{l^\nu} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathscr{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{A}^0_{l^\nu} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0/S_{fppf} \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & \mathscr{X} \arrow[r] & \mathscr{A}^0_{l^\nu} \arrow[r] & 0/S_{fppf}\,.
\end{tikzcd}$$

Die Aussage (2) ist somit zurückgeführt auf die Behauptung:

(4) $\mathrm{Ext}^2_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)(l)$ ist endlich.

Für den Nachweis von (4) benötigen wir eine Reihe von Lemmata. Dabei ist es zweckmäßig, den glatten Situs S_{glatt} von S als Hilfsmittel einzuführen. Es seien

$$S_{fppf} \xrightarrow{\sigma} S_{\mathrm{glatt}} \xrightarrow{\pi} S_{et}$$

die kanonischen Morphismen von Siten.

Lemma 8. i) $\mathrm{Ext}^i_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Ext}^i_{S_{\mathrm{glatt}}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)$;

ii) $\mathcal{E}xt^i_{S_{\mathrm{glatt}}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mathbb{G}_m)/S_{et} = \mathcal{E}xt^i_{S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mathbb{G}_m)$.

Beweis. Einerseits ist $R^i\sigma_*\mathbb{G}_m = 0$ für $i > 0$, und andererseits ist π_* exakt. Folglich gilt

$$\mathrm{Ext}^i_{S_{fppf}}(\sigma^*(\mathscr{A}^0/S_{\mathrm{glatt}}), \mathbb{G}_m) = \mathrm{Ext}^i_{S_{\mathrm{glatt}}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)$$

und

$$\mathcal{E}xt^i_{S_{\mathrm{glatt}}}(\pi^*(\mathscr{A}^0_{l^\nu}/S_{et}), \mathbb{G}_m)/S_{et} = \mathcal{E}xt^i_{S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mathbb{G}_m).$$

Aber wir haben $\sigma^*(\mathscr{A}^0/S_{\mathrm{glatt}}) = \mathscr{A}^0/S_{fppf}$ und $\pi^*(\mathscr{A}^0_{l^\nu}/S_{et}) = \mathscr{A}^0_{l^\nu}/S_{\mathrm{glatt}}$, da $\mathscr{A}^0$ bzw. $\mathscr{A}^0_{l^\nu}$ glatt bzw. etal über S ist.

Lemma 9. i) $\mathcal{H}om_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) = 0$;

ii) $\tilde{\mathscr{A}}/S_{\mathrm{glatt}} = \mathcal{E}xt^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)/S_{\mathrm{glatt}} = \mathcal{E}xt^1_{S_{\mathrm{glatt}}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)$;

iii) $\tilde{\mathscr{A}}(S) = \mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)$;

iv) $\mathcal{E}xt^1_{S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mathbb{G}_m) = 0$.

Beweis. i) Siehe SGA 7 VII 1.3.8. ii) Für die erste Identität siehe [5] (5.1). Darüber hinaus beachten wir, daß wegen $R^i\sigma_*\mathbb{G}_m = 0$ für $i > 0$ und $\sigma^*(\mathscr{A}^0/S_{\mathrm{glatt}}) = \mathscr{A}^0/S_{fppf}$ die Spektralsequenz

$$R^i\sigma_*\, \mathcal{E}xt^j_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) \Rightarrow \mathcal{E}xt^{i+j}_{S_{\mathrm{glatt}}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)$$

besteht. Die zweite Identität ergibt sich mit Hilfe von i) aus der zugehörigen exakten Sequenz der niederen Terme. iii) Dies wiederum folgt mit Hilfe von i) und ii) aus der exakten Sequenz der niederen Terme zur Spektralsequenz

$$H^i(S_{fppf}, \mathcal{E}xt^j_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m).$$

iv) Wie wir oben schon gesehen haben, gilt $\mathcal{E}xt^1_{S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mathbb{G}_m) = \mathcal{E}xt^1_{(l^\nu)-S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mu_{l^\nu}) = 0$.

Lemma 10. *Die l-primären Komponenten der Halme der Garbe $\mathcal{E}xt^2_{S_{\mathrm{glatt}}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)/S_{et}$ sind endlich und fast alle $= 0$. Insbesondere ist die Gruppe $H^0(S, \mathcal{E}xt^2_{S_{\mathrm{glatt}}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m))(l)$ endlich.*

Beweis. Ist ν groß genug (was wir im folgenden stets annehmen), so haben wir die exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathscr{A}^0_{l^\nu} \to \mathscr{A}_{l^\nu} \to \mathscr{F}(l) \to 0,$$

wobei $\mathscr{F}(l)$ die l-primäre Komponente der eingangs definierten Wolkenkratzergarbe $\mathscr{F}$ ist. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
Ext^1_{S_{et}}(\mathscr{A}_{l^\nu}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & Ext^1_{S_{et}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & Ext^2_{S_{et}}(\mathscr{F}(l), \mathbb{G}_m) \\
\| & & \| & & \\
0 & & Ext^1_{S_{glatt}}(\mathscr{A}^0_{l^\nu}, \mathbb{G}_m)/S_{et} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & Ext^2_{S_{glatt}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)/S_{et} & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle l^\nu} & & \\
 & & Ext^2_{S_{glatt}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)/S_{et} & &
\end{array}$$

ist also die Zeile exakt. Das Verschwinden des linken Termes wurde schon in Lemma 9iv) festgehalten. Die Exaktheit der Spalte folgt aus Lemma 8ii) und der Exaktheit von π_*. Ersichtlich genügt es somit, unsere Behauptung für die Garbe $Ext^2_{S_{et}}(\mathscr{F}, \mathbb{G}_m)$ zu zeigen. Sei dazu $j: U \longrightarrow S$ eine offene nicht-leere Teilmenge von S mit $\mathscr{F}/U_{et}=0$. Wegen $R^i j_* \mathbb{G}_m = 0$ für $i>0$ (Hilbert 90 und [12, II 3.3]) gilt dann

$$Ext^i_{S_{et}}(\mathscr{F}, j_*\mathbb{G}_m)=0 \quad \text{für} \quad i \geqq 0.$$

Bezeichnet $i_x: \{x\} \to S$ die abgeschlossene Immersion des Punktes $x \in S \backslash U$, so erhalten wir aus der exakten Garbensequenz

$$0 \to \mathbb{G}_m \to j_* \mathbb{G}_m \to \bigoplus_{x \in S \backslash U} (i_x)_* \mathbb{Z} \to 0$$

über S_{et} und der Tatsache, daß die $(i_x)_*$ exakt sind (bezüglich der etalen Topologie), die Identitäten

$$\begin{aligned} Ext^2_{S_{et}}(\mathscr{F}, \mathbb{G}_m) &= \bigoplus_{x \in S \backslash U} Ext^1_{S_{et}}(\mathscr{F}, (i_x)_* \mathbb{Z}) \\ &= \bigoplus_{x \in S \backslash U} (i_x)_* Ext^1_{\{x\}_{et}}(i_x^* \mathscr{F}, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Hieraus lesen wir aber unsere Behauptung ab, da die Garben $i_x^* \mathscr{F}$ endlich sind.

Wir kehren nun zum Beweis der Behauptung (4) zurück. Aufgrund von Lemma 8i) ist also die Endlichkeit von $\mathrm{Ext}^2_{S_{glatt}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)(l)$ zu zeigen. Dazu betrachten wir die Spektralsequenz

$$H^i(S_{glatt}, Ext^j_{S_{glatt}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{S_{glatt}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m).$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß zu jeder cohomologischen Spektralsequenz $E_2^{i,j} \Rightarrow E^{i+j}$ eine exakte Sequenz

$$0 \to \ker(E^2 \to E_2^{0,2})/im(E_2^{2,0} \to E^2) \to E_2^{1,1} \to E_2^{3,0}$$

besteht. In unserem Falle gilt $E_2^{i,0}=0$ für $i \geqq 0$ und $E_2^{1,1} = H^1(S, \tilde{\mathscr{A}})$ (Lemma 9i) und ii)). Wir erhalten also eine exakte Sequenz

$$0 \to H^1(S, \tilde{\mathscr{A}})(l) \to \mathrm{Ext}^2_{S_{glatt}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)(l) \to H^0(S, Ext^2_{S_{glatt}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m))(l).$$

Nach Lemma 10 ist der rechte Term endlich. Aus der vorausgesetzten Endlichkeit von $Ш_K(A)(l)$ ergibt sich schließlich diejenige von $H^1(S, \tilde{\mathscr{A}})(l)$ mit Hilfe von Lemma 3. Somit ist Lemma 7 vollständig bewiesen.

Die Lemmata 2, 5 und 7 lassen sich zu folgendem Zwischenresultat zusammenfassen, das dem gewünschten Ziele schon recht nahe ist. Der Klarheit halber sei dabei darauf hingewiesen, daß der Beweis von Lemma 5iv) auch zeigt, daß δ bijektiv ist, falls nur $\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} A(K) = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}_l} H^1(S, T_l(\mathscr{A}^0))$ gilt.

Satz 11. i) $\varrho \geqq \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} A(K)$;

ii) $\varrho = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} A(K) \Leftrightarrow Ш_K(A)(l)$ *ist endlich und* $\langle\,,\rangle$ *nicht-ausgeartet; in diesem Falle gilt*

$$|c|_l^{-1} = \left| \frac{\det\langle\,,\rangle}{[\mathscr{A}(S)_{\mathrm{Tor}} : \mathscr{A}^0(S)_{\mathrm{Tor}}]} \right|_l^{-1} \cdot \frac{\# Ш_K(A)(l)}{\# A(K)(l) \cdot \# \tilde{A}(K)(l)} \cdot \prod_x \# \pi_x(A)(k_x)(l).$$

3. Die Höhenpaarung

Nach Néron und Tate [9] existiert eine kanonische nicht-ausgeartete Paarung

$$h: A(K) \times \tilde{A}(K) \to \mathbb{R},$$

welche üblicherweise als Höhenpaarung bezeichnet wird. Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, daß unsere Paarung

$$\langle\,,\rangle: \mathscr{A}^0(S) \times \mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\vee} H^1(S, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

bis auf einen Normierungsfaktor mit der Höhenpaarung h übereinstimmt. Dabei nehmen wir aufgrund von Lemma 9iii) stets die Identifikation

$$\tilde{A}(K) = \mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m)$$

vor. Zunächst rekapitulieren wir die Beschreibung von h, welche Bloch in [1] gegeben hat:

Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in S$ bezeichne K_x die Komplettierung von K in x, $\mathfrak{O}_x$ den Ring der ganzen Zahlen in K_x, $v_x: K_x^\times \to \mathbb{Z}$ die normalisierte diskrete Bewertung und $|\ |_x := q^{-\deg x \cdot v_x(\ )}$ die zugehörige Betragsfunktion. Ist $\mathscr{G}$ ein S-Gruppenschema, so sei $\mathscr{G}(\mathbb{A})$ die Adelgruppe von $\mathscr{G}$ über K. Wir haben den natürlichen Homomorphismus

$$\begin{aligned} l: \mathbb{G}_m(\mathbb{A}) &\to \mathbb{R} \\ (\alpha_x) &\mapsto \sum_x \log|\alpha_x|_x = -\log q \cdot \sum_x \deg x \cdot v_x(\alpha_x), \end{aligned}$$

welcher aufgrund der Produktformel für K auf $\mathbb{G}_m(K) = K^\times$ verschwindet.

Nun seien $a \in A(K)$ und $\tilde{a} = (0 \to \mathbb{G}_m \to \mathscr{X} \to \mathscr{A}^0 \to 0) \in \tilde{A}(K)$. Nach der Descent-Theorie „ist" dann $\mathscr{X}$ ebenfalls ein glattes kommutatives S-Gruppenschema, und wegen Hilbert 90 sind die Sequenzen

$$0 \to \mathbb{G}_m(K) \to \mathscr{X}(K) \to A(K) \to 0$$

und

$$0 \to \mathbb{G}_m(\mathbb{A}) \to \mathscr{X}(\mathbb{A}) \to \mathscr{A}^0(\mathbb{A}) \to 0$$

exakt. Bloch zeigt zum einen, daß der Homomorphismus l eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $l_{\tilde{a}}: \mathscr{X}(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}$ besitzt, welche dann durch Einschränkung auf $\mathscr{X}(K)$ einen Homomorphismus

$$l_{\tilde{a}}: A(K) \to \mathbb{R}$$

induziert, und zum anderen, daß gilt

$$h(a, \tilde{a}) = l_{\tilde{a}}(a).$$

Wir nehmen jetzt an, daß a schon in der Untergruppe $\mathscr{A}^0(S)$ von $A(K)$ enthalten ist. Mit Hilfe der natürlichen Identifizierungen $\mathscr{A}^0(S) = \mathrm{Hom}_{S_{fppf}}(\mathbb{Z}, \mathscr{A}^0)$ und $H^1(S, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ sehen wir, daß das Yoneda-Produkt $a \vee \tilde{a}$ gerade die durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} a \vee \tilde{a}: 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \\ \tilde{a}: 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & \mathscr{X} \arrow[r] & \mathscr{A}^0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

definierte Erweiterung ist. Durch Hintereinanderschaltung ergibt sich eine Fortsetzung

$$l_{a \vee \tilde{a}}: \mathscr{Y}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathscr{X}(\mathbb{A}) \xrightarrow{l_{\tilde{a}}} \mathbb{R}$$

von l auf $\mathscr{Y}(\mathbb{A})$, welche wiederum durch Einschränkung auf $\mathscr{Y}(K)$ einen Homomorphismus

$$l_{a \vee \tilde{a}}: \mathbb{Z} \xrightarrow{a} A(K) \xrightarrow{l_{\tilde{a}}} \mathbb{R}$$

induziert. Ersichtlich gilt

$$h(a, \tilde{a}) = l_{\tilde{a}}(a) = l_{a \vee \tilde{a}}(1).$$

Um nachfolgendes Lemma anwenden zu können, halten wir noch fest, daß die Blochsche Konstruktion von $l_{\tilde{a}}$ zeigt:

$$l_{\tilde{a}}\Big(\prod_x \mathscr{X}(\mathfrak{O}_x)\Big) = 0, \quad \text{d.h.} \quad l_{a \vee \tilde{a}}\Big(\prod_x \mathscr{Y}(\mathfrak{O}_x)\Big) = 0.$$

Lemma 12. *Sei* $(0 \to \mathbb{G}_m \to \mathscr{Y} \to \mathbb{Z} \to 0) = e \in \mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) = H^1(S, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}\, S$, *und sei* $l_e: \mathscr{Y}(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}$ *eine Fortsetzung von* l, *welche auf* $\prod_x \mathscr{Y}(\mathfrak{O}_x)$ *verschwindet. Für den durch Einschränkung auf* $\mathscr{Y}(K)$ *induzierten Homomorphismus* $l_e: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *gilt dann*

$$l_e(1) = -\log q \cdot \deg e.$$

Beweis. (Man kann sich überlegen, daß für jedes e eine eindeutig bestimmte Fortsetzung l_e von der verlangten Art existiert.) Als Element von $\mathrm{Pic}\, S$ aufgefaßt ist e die Isomorphieklasse eines Geradenbündels $\mathscr{L}$ von S; bezeichnet

$Y(\mathscr{L}) := V(\mathscr{L}) \setminus \{0\text{-Schnitt}\}$ den durch $\mathscr{L}$ definierten $\mathbb{G}_m$-Torseur über S, so ist e isomorph zu der Erweiterung

$$0 \to \mathbb{G}_m \to \coprod_{\mathbb{Z}} Y(\mathscr{L}^{\otimes n}) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in S$ wählen wir nun eine offene Umgebung $U_x \subseteq S$ derart, daß $1 \in \mathbb{Z}$ ein Urbild $s_x \in \mathscr{Y}(U_x)$ besitzt. Weiter sei auch $s \in \mathscr{Y}(K)$ ein Urbild von $1 \in \mathbb{Z}$. Offensichtlich ist $s_x^{-1} \cdot s \in K^\times$. Aufgrund unserer Voraussetzung an l_e gilt dann

$$\begin{aligned} l_e(1) &= l_e(s) = l_e((s_x^{-1} \cdot s)) = l((s_x^{-1} \cdot s)) \\ &= -\log q \cdot \sum_x \deg x \cdot v_x(s_x^{-1} \cdot s). \end{aligned}$$

Andererseits entnehmen wir der obigen Beschreibung von e, daß die Familie $((U_x, s_x^{-1} \cdot s))$ einen Cartier-Divisor auf S definiert, dessen zugehöriges Geradenbündel isomorph zu $\mathscr{L}$ ist. Folglich gilt

$$\deg e = \deg \mathscr{L} = \sum_x \deg x \cdot v_x(s_x^{-1} \cdot s).$$

Beide Formeln zusammen ergeben die Behauptung.

Die Anwendung dieses Lemmas auf die zuvor betrachtete Situation ($a \in \mathscr{A}^0(S)$, $\tilde{a} \in \tilde{A}(K)$) liefert

$$h(a, \tilde{a}) = l_{a \vee \tilde{a}}(1) = -\log q \cdot \deg(a \vee \tilde{a}) = -\log q \cdot \langle a, \tilde{a} \rangle.$$

Es besteht also das kommutative Diagramm von Paarungen

$$\begin{tikzcd} A(K) \times & \tilde{A}(K) \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & \mathbb{R} \\ \cup & & \\ \mathscr{A}^0(S) \times \mathrm{Ext}^1_{S_{fppf}}(\mathscr{A}^0, \mathbb{G}_m) \arrow[rr, "\langle , \rangle"] & & \mathbb{Z}. \arrow[uu, "\cdot(-\log q)"'] \end{tikzcd}$$

Da h nicht-ausgeartet ist, ist es somit auch $\langle , \rangle$, und es gilt

$$\det h = \pm \frac{(\log q)^{\mathrm{rang}\, A(K)}}{[A(K)_{\mathrm{Tor}} : \mathscr{A}^0(S)_{\mathrm{Tor}}]} \cdot \det \langle , \rangle.$$

Setzen wir dies in Satz 11 ein, so erhalten wir unser Hauptresultat.

Theorem. *Sei* l *eine zu* $p := \mathrm{char}\, K$ *teilerfremde Primzahl, sei* $Ш_K(A)(\text{non-}p) := Ш_K(A)/Ш_K(A)(p)$ *und bezeichne* ϱ *die Multiplizität der Nullstelle von* $L(A, s)$ *bei* $s = 1$. *Dann gilt:*

i) $\varrho \geqq \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} A(K)$;

ii) $\varrho = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} A(K) \Leftrightarrow Ш_K(A)(l)$ *ist endlich; in diesem Falle ist auch* $Ш_K(A)(\text{non-}p)$ *endlich, und es gilt*

$$\Big| \lim_{s \to 1} L(A, s) \cdot (s-1)^{-\varrho} \Big| = p^\mu \cdot \frac{\# Ш_K(A)(\text{non-}p) \cdot |\det h|}{\# \mathrm{Tor}\, A(K) \cdot \# \mathrm{Tor}\, \tilde{A}(K)} \cdot \prod_x \# \pi_x(A)(k_x)$$

für ein geeignetes $\mu \in \mathbb{Z}$.

Literatur

1. Bloch, S.: A note on height pairings, Tamagawa numbers and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. Invent. Math. **58**, 65–76 (1980)
2. Cartier, P.: Les groupes $\mathrm{Ext}^s(A, B)$. Sém. Grothendieck 1956/57, exp. 3
3. Deligne, P.: La conjecture de Weil II. Publ. Math. IHES **52**, 137–252 (1980)
4. Mazur, B.: Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields. Invent. Math. **18**, 183–266 (1972)
5. Mazur, B., Messing, W.: Universal Extensions and one dimensional crystalline cohomology. Lecture Notes in Mathematics 370. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1974
6. Milne, J.S.: The Tate-Šafarevič group of a constant Abelian variety. Invent. Math. **6**, 91–105 (1968)
7. Milne, J.S.: On a conjecture of Artin and Tate. Ann. Math. **102**, 517–533 (1975)
8. Milne, J.S.: Etale cohomology. Princeton: Princeton University Press 1980
9. Néron, A.: Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes. Ann. Math. **82**, 249–331 (1965)
10. Schneider, P.: On the values of the zeta function of a variety over a finite field. 1981. Compositio math. **46**, 133–143 (1982)
11. Schneider, P.: Iwasawa *L*-functions of varieties over algebraic number fields. A first approach. Erscheint in Invent. Math.
12. Serre, J.-P.: Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Mathematics 5. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1964
13. Serre, J.-P.: Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures). Sém. Delange-Pisot-Poitou 19, 1969/70
14. Tate, J.: Duality theorems in Galois cohomology over number fields. Proc. Int. Congress Math. pp. 288–295. Stockholm 1962
15. Tate, J.: On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. Sém. Bourbaki 1965/66, exp. 306

SGA 3, $4\frac{1}{2}$, 5, 7: Lecture Notes in Mathematics 151 (1970), 569 (1977), 589 (1977), 288 (1972). Berlin, Heidelberg, New York: Springer

Eingegangen am 24. Februar 1982