Über gewisse Galoiscohomologiegruppen

Peter Schneider

Fachbereich Mathematik der Universität, Universitätsstraße 31, D-8400 Regensburg, Bundesrepublik Deutschland

Sei k ein endlicher Zahlkörper und p eine feste ungerade Primzahl. In dieser Arbeit wollen wir uns mit der Struktur der Galoiscohomologiegruppen $H^i(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$ für $i \geqq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ beschäftigen. Wie der Spezialfall $i=1$, $n=0$ zeigt, ist dies eine Verallgemeinerung der Fragestellung nach der Struktur der Galoisgruppe der maximalen abelschen Erweiterung von k (s. [12]). Was motiviert uns zu dieser Verallgemeinerung? Eines der interessantesten, noch ungelösten Probleme der Zahlentheorie ist das Problem der algebraischen Interpretation der Werte $\zeta_k(n)$ der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_k(s)$ von k an den ganzzahligen Stellen $n \in \mathbb{Z}$. Die dazu vorliegenden Vermutungen (z.B. die Lichtenbaum-Vermutung) setzen diese Werte in Beziehung zur Ordnung gewisser Etalcohomologiegruppen bzw. zur Ordnung der Cohomologiegruppen gewisser Iwasawa-Moduln von k. Wir wollen uns bei diesem Problem jedoch von der Analogie zur Vermutung von Birch/Swinnerton-Dyer über elliptische Kurven leiten lassen. Dies legt nahe, einen Zusammenhang zwischen den Werten $\zeta_k(n)$ und den Ordnungen der Kerne der natürlichen Abbildungen

$$\rho(n)\colon\ H^1(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \to \prod_{\mathfrak{p}} H^1(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$$

zu suchen. Die erste Frage, die sich dabei stellt, ist natürlich, ob diese Kerne überhaupt endlich sind. Wir werden sehen, daß die Beantwortung dieser Frage gleichbedeutend ist mit der Lösung des obigen Strukturproblemes. Weiterhin zeigt sich, daß sich im Falle der Endlichkeit dieser Kerne auch die Null- bzw. Polstellenordnung von $\zeta_k(n)$ aus der Struktur der obigen Cohomologiegruppen ablesen läßt. All dies scheint dem Autor mehr als genug Motivation für die eingangs genannte Problemstellung zu sein. Leider kann diese Arbeit vollständige Antworten nur in Spezialfällen geben. Danken möchte ich Prof. Neukirch und Dr. Bayer für viele hilfreiche Gespräche.

§0. Bezeichnungen

Es sei p im folgenden stets eine fest vorgegebene ungerade Primzahl. Für eine abelsche Torsionsgruppe A bezeichne $A(p)$ die p-primäre Komponente von A;

0025-5874/79/0168/0181/$05.00

$\operatorname{div} A$ bzw. $\operatorname{Div} A$ sei die Untergruppe aller divisiblen Elemente bzw. die maximale divisible Untergruppe von A; insbesondere gilt $\operatorname{Div} A \subseteq \operatorname{div} A$. Ist A p-primär, so heiße $\dim A := \dim_{\mathbb{F}_p} \{a \in \operatorname{Div} A : pa = 0\}$ die Dimension von A; es gilt dann $\operatorname{Div} A \cong (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\dim A}$. Ist B eine diskrete abelsche Torsionsgruppe oder eine proendliche abelsche Gruppe, so sei $B^* := \operatorname{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ das Pontrjagin-Dual von B; nach dem Pontrjagin'schen Dualitätssatz liefert der Funktor $B \rightsquigarrow B^*$ eine Kategorienäquivalenz. Der direkte Limes $\varinjlim$ ist exakt auf der Kategorie der diskreten abelschen Torsionsgruppen; folglich ist der projektive Limes $\varprojlim$ exakt auf der Kategorie der proendlichen abelschen Gruppen.

Es sei nun k ein endlicher Zahlkörper; G_k bezeichne die absolute Galoisgruppe von k. Für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k sei $k_\mathfrak{p}$ der zugehörige lokale Körper und $G_{k_\mathfrak{p}}$ seine absolute Galoisgruppe. Σ bezeichne die Menge aller unendlichen und aller über p liegenden Primstellen von k, k_Σ/k die maximale außerhalb von Σ unverzweigte algebraische Erweiterung von k und $G_\Sigma := \operatorname{Gal}(k_\Sigma/k)$ ihre Galoisgruppe. Der Körper k_Σ enthält die Gruppe μ_{p^∞} aller p-Potenz-Einheitswurzeln. Mit $G := \operatorname{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k)$ und $H_\Sigma := \operatorname{Gal}(k_\Sigma/k(\mu_{p^\infty}))$ besteht also die exakte Gruppenerweiterungssequenz $1 \to H_\Sigma \to G_\Sigma \to G \to 1$. Außerdem ist die cohomologische p-Dimension von G gleich 1. Für $j \geq 0$ bezeichne $\mu_{p^j} \subseteq \mu_{p^\infty}$ die Gruppe aller p^j-ten Einheitswurzeln. Weiterhin sei $r_1(k)$ bzw. $r_2(k)$ die Anzahl der reellen bzw. komplexen Primstellen von k. Schließlich sei $Br(k)$ bzw. $Br(k_\mathfrak{p})$ die Brauergruppe von k bzw. $k_\mathfrak{p}$.

Für jede endliche Teilerweiterung K/k von k_Σ/k bezeichne $E_\Sigma(K)$ die Σ-Einheitengruppe von K, d.h. die Gruppe aller $a \in K^\times$, welche Einheiten sind an allen nicht über p liegenden endlichen Primstellen von K; $Cl_\Sigma(K)$ bezeichne die Σ-Idealklassengruppe von K, d.h. die Faktorgruppe der Idealklassengruppe von K nach derjenigen Untergruppe, die von den Idealklassen erzeugt wird, die über p liegende Primideale von K enthalten. Für eine beliebige Teilerweiterung K/k von k_Σ/k sei $E_\Sigma(K) := \varinjlim E_\Sigma(K_i)$ bzw. $Cl_\Sigma(K) := \varinjlim Cl_\Sigma(K_i)$, wobei K_i sämtliche endlichen Teilerweiterungen von K/k durchläuft. $E_\Sigma(K)$ und $Cl_\Sigma(K)$ sind in natürlicher Weise diskrete $\operatorname{Gal}(K/k)$-Moduln.

Durch die Operation von G_k auf μ_{p^∞} ergibt sich ein natürlicher Homomorphismus $\kappa\colon G_k \to \mathbb{Z}_p^\times$; für $\sigma \in G_k$ und $\zeta \in \mu_{p^\infty}$ ist $\sigma\zeta = \zeta^{\kappa(\sigma)}$; weiterhin ist Kern $\kappa = G_{k(\mu_{p^\infty})}$. Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ und M ein beliebiger G_k-Modul, der zugleich ein $\mathbb{Z}_p$-Modul ist (z.B. wenn M eine p-primäre Torsionsgruppe ist). Die abelsche Gruppe M mit der neuen, durch $\sigma(a) := \kappa(\sigma)^n \cdot \sigma a$ $(\sigma \in G_k, a \in M)$ definierten Operation von G_k wird mit $M(n)$ bezeichnet und heißt die n-te Tate-Twistung von M. Ist M ein diskreter G_k-Modul, so auch $M(n)$; schließlich ist $M(0) = M$.

§1. Die Cohomologie der Σ-Einheitengruppe

Wir wollen in diesem Paragraphen zunächst die Cohomologiegruppen $H^i(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))$ berechnen und daraus dann einige Folgerungen ziehen. Die Ergebnisse sind wohlbekannt; es mangelt jedoch an einer geeigneten Referenz.

Für eine beliebige endliche Teilerweiterung K/k von k_Σ/k bezeichne $I_\Sigma(K)$ die Gruppe aller zu p primen Ideale von K; weiterhin sei $I_\Sigma(k_\Sigma) := \varinjlim I_\Sigma(K)$.

Bemerkung 1. i) *Die Sequenz* $1 \to E_\Sigma(k_\Sigma) \xrightarrow{\subseteq} k_\Sigma^\times \xrightarrow{\alpha} I_\Sigma(k_\Sigma) \to 1$ *ist exakt, wobei* α *definiert ist durch* $\alpha(a) :=$ *die zu p prime Komponente des Hauptideals* (a);

ii) $Cl_\Sigma(k_\Sigma) = 0$.

Beweis. i) Bis auf die Surjektivität von α ist alles klar; sei also K/k eine endliche Teilerweiterung von k_Σ/k und $\mathfrak{a} \in I_\Sigma(K)$; $\mathfrak{a}$ wird im Hilbertschen Klassenkörper H/K von K zum Hauptideal (a); wegen $H \subseteq k_\Sigma$ ist also $\alpha(a) = \mathfrak{a}$.

ii) Dies folgt wegen $Cl_\Sigma(k_\Sigma) = I_\Sigma(k_\Sigma)/\alpha(k_\Sigma^\times)$ sofort aus i). q.e.d.

Satz 2. i) $H^0(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma)) = E_\Sigma(k)$;

ii) $H^1(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma)) = Cl_\Sigma(k)$;

iii) $H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))(p) = \operatorname{Kern}(Br(k)(p) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \nmid p} Br(k_\mathfrak{p}))$;

iv) $H^3(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))(p) = 0$.

Beweis. i) Dies ist klar. ii) Mit Hilbert 90 erhalten wir aus Bemerkung 1 i) die exakte Cohomologiesequenz $k^\times \to H^0(G_\Sigma, I_\Sigma(k_\Sigma)) \to H^1(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma)) \to 0$; wegen $H^0(G_\Sigma, I_\Sigma(k_\Sigma)) = I_\Sigma(k)$ ergibt sich also $H^1(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma)) = I_\Sigma(k)/\alpha(k^\times) = Cl_\Sigma(k)$.

iii) Für jede endliche Primstelle $\mathfrak{P} | p \nmid p$ ist $k_{\Sigma,\mathfrak{P}}/k_\mathfrak{p}$ unverzweigt; es besteht also das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & E_\Sigma(k_\Sigma) & \longrightarrow & k_\Sigma^\times & \longrightarrow & I_\Sigma(k_\Sigma) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & U_\mathfrak{P} & \longrightarrow & k_{\Sigma,\mathfrak{P}}^\times & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

wobei $U_\mathfrak{P}$ die Einheitengruppe von $k_{\Sigma,\mathfrak{P}}$ bezeichnet. Unter Beachtung von Hilbert 90 erhalten wir daraus das kommutative Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 = H^1(G_\Sigma, I_\Sigma(k_\Sigma)) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma} H^1(\operatorname{Gal}(k_{\Sigma,\mathfrak{P}}/k_\mathfrak{p}), \mathbb{Z}) = 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma)) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma} H^2(\operatorname{Gal}(k_{\Sigma,\mathfrak{P}}/k_\mathfrak{p}), U_\mathfrak{P}) = 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^2(G_\Sigma, k_\Sigma^\times) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma} H^2(\operatorname{Gal}(k_{\Sigma,\mathfrak{P}}/k_\mathfrak{p}), k_{\Sigma,\mathfrak{P}}^\times) \\
\| & & \| \\
Br(k_\Sigma/k) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma} Br(k_\mathfrak{p}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^2(G_\Sigma, I_\Sigma(k_\Sigma)) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma} H^2(\operatorname{Gal}(k_{\Sigma,\mathfrak{P}}/k_\mathfrak{p}), \mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^3(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma)) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma} H^3(\operatorname{Gal}(k_{\Sigma,\mathfrak{P}}/k_\mathfrak{p}), U_\mathfrak{P}) = 0 \\
\downarrow & & \\
H^3(G_\Sigma, k_\Sigma^\times), & &
\end{array}$$

wobei $Br(k_\Sigma/k)$ die Untergruppe aller von k_Σ zerfällten Algebrenklassen in $Br(k)$ bezeichnet. Es gilt nun:

1) Die Abbildungen in der ersten und vierten Zeile sind Isomorphismen (s. [11] Satz 13.1).

2) $H^i(\mathrm{Gal}(k_{\Sigma,\mathfrak{P}}/k_\mathfrak{p}), U_\mathfrak{P})=0$ für $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}\nmid p$ und $i>0$ nach der lokalen Klassenkörpertheorie.

Also ist insbesondere $H^1(G_\Sigma, I_\Sigma(k_\Sigma))=0$, und damit gilt

$$H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))=\mathrm{Kern}(Br(k_\Sigma/k)\to\bigoplus_{\mathfrak{p}\notin\Sigma} Br(k_\mathfrak{p})).$$

Wegen $\mu_{p^\infty}\leqq k_\Sigma$ ist aber $Br(k_\Sigma/k)(p)=Br(k)(p)$; das bedeutet gerade

$$H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))(p)=\mathrm{Kern}(Br(k)(p)\to\bigoplus_{\mathfrak{p}\notin\Sigma} Br(k_\mathfrak{p})).$$

iv) Mit dem Satz von Brauer-Hasse-Noether ergibt sich leicht die Surjektivität der Abbildung $Br(k)(p)\to\bigoplus_{\mathfrak{p}\nmid p} Br(k_\mathfrak{p})(p)$. Folglich ist in obigem Diagramm die Abbildung $H^2(G_\Sigma, k_\Sigma^\times)(p)\to H^2(G_\Sigma, I_\Sigma(k_\Sigma))(p)$ ebenfalls surjektiv, und damit $H^3(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))(p)\leqq H^3(G_\Sigma, k_\Sigma^\times)(p)$. Diese letztere Gruppe ist jedoch wegen $\mu_{p^\infty}\leqq k_\Sigma$ gleich 0 (s. [11] §8.10). q.e.d.

Lemma 3. i) $1\to\mu_p\xrightarrow{\leqq} E_\Sigma(k_\Sigma)\xrightarrow{p} E_\Sigma(k_\Sigma)\to 1$ *ist eine exakte* G_Σ*-Modulsequenz;*

ii) $H^3(G_\Sigma, \mu_p)=0$.

Beweis. i) Dies folgt mit [1] Chap. 6, Theorem 4.

ii) Aus i) erhalten wir die exakte Cohomologiesequenz

$$H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))\xrightarrow{p} H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))\to H^3(G_\Sigma, \mu_p)\to H^3(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))(p).$$

Nach Satz 1 ist aber $H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))$ p-divisibel und

$$H^3(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))(p)=0. \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 4. i) *Es besteht eine exakte Sequenz*

$$0\to E_\Sigma(k)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\to H^1(G_\Sigma, \mu_{p^\infty})\to Cl_\Sigma(k)(p)\to 0;$$

ii) $H^2(G_\Sigma, \mu_{p^\infty})=\mathrm{Kern}(Br(k)(p)\to\bigoplus_{\mathfrak{p}\nmid p} Br(k_\mathfrak{p})).$

Beweis. Aus der exakten Sequenz $1\to\mu_{p^j}\to E_\Sigma(k_\Sigma)\xrightarrow{p^j} E_\Sigma(k_\Sigma)\to 1$ erhalten wir mit Satz 2 die exakte Cohomologiesequenz

$$E_\Sigma(k)\xrightarrow{p^j} E_\Sigma(k)\to H^1(G_\Sigma, \mu_{p^j})\to Cl_\Sigma(k)\xrightarrow{p^j} Cl_\Sigma(k)$$
$$\to H^2(G_\Sigma, \mu_{p^j})\to H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))\xrightarrow{p^j} H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma)).$$

Der Übergang zum direkten Limes bezüglich j in dieser Sequenz liefert einerseits die exakte Sequenz in i) und andererseits $H^2(G_\Sigma, \mu_{p^\infty})=H^2(G_\Sigma, E_\Sigma(k_\Sigma))(p)$, woraus mit Satz 2iii) die Behauptung ii) folgt. q.e.d.

Allgemein gilt schließlich der

Satz 5. *Die cohomologische p-Dimension von* G_Σ, G_k *und* $G_{k_\mathfrak{p}}$ *ist jeweils* $\leqq 2$.

Beweis. Für G_k und $G_{k_\mathfrak{p}}$ siehe [CG] II-16; die Aussage über G_Σ folgt aus Lemma 3ii) analog wie in [CG] II-7. q.e.d.

§2. Die Dualitätssätze von Tate-Poitou in p-adischer Galoiscohomologie

Dieser Paragraph dient zur Bereitstellung der Dualitätssätze von Tate-Poitou in der Form, in der sie das hauptsächliche Hilfsmittel der späteren Untersuchungen sein werden. Zunächst führen wir jedoch zwei grundlegende Sätze an, die sich aus den Resultaten über die lokale bzw. globale Euler-Poincaré-Charakteristik ergeben.

Satz 1. *Für jede endliche Primstelle* $\mathfrak{p}$ *von* k *gilt:*

i) $H^i(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n))$ *ist endlich für alle* $n\in\mathbb{Z}$ *und* $i,j\geqq 0$;

ii) $\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\cdot\dim_{\mathbb{F}_p} H^i(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n))=\begin{cases}-[k_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_p] & \text{für } \mathfrak{p}|p,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ *für alle* $n\in\mathbb{Z}$.

Beweis. Siehe [CG].

Satz 2. i) $H^i(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n))$ *ist endlich für alle* $n\in\mathbb{Z}$ *und* $i,j\geqq 0$;

ii) $\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\cdot\dim_{\mathbb{F}_p} H^i(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n))=\begin{cases}-r_2(k) & \text{für } n\in\mathbb{Z} \text{ gerade},\\ -r_2(k)-r_1(k) & \text{für } n\in\mathbb{Z} \text{ ungerade}.\end{cases}$

Beweis. Siehe [23] oder [8].

Da wir die Dualitätssätze von Tate-Poitou auf Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)$ anwenden wollen, ist es klar, daß wir zunächst Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_p(1-n)$ zur Verfügung haben müssen. Die folgende kurze Schilderung der Konstruktion dieser Cohomologiegruppen beruht auf [27] §2: Bezeichne dazu $\mathfrak{G}$ eine der Gruppen G_Σ oder $G_{k_\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}$ endliche Primstelle von k); sei $n\in\mathbb{Z}$ und $i\geqq 0$. Für $j\geqq 0$ bestehen die natürlichen Abbildungen $H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}/p^{j+1}\mathbb{Z}(n))\to H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n))$. Wir können also definieren:

$$H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}_p(n)) := \varprojlim H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n)).$$

Nach den Sätzen 1i) und 2i) ist $H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}_p(n))$ ein endlich-erzeugter $\mathbb{Z}_p$-Modul; folglich können wir weiterhin setzen:

$$H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Q}_p(n)) := H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}_p(n))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p.$$

Die so gewonnenen „p-adischen" Galoiscohomologiegruppen lassen sich auch als die Cohomologiegruppen des üblichen Cokettenkomplexes auffassen, wenn nur stetige Coketten zugelassen werden, wobei $\mathbb{Z}_p(n)$ und $\mathbb{Q}_p(n)$ in ihrer p-adischen Topologie zu betrachten sind.

Satz 3. *Für* $n\in\mathbb{Z}$ *gilt:*

i) *Die zu der exakten Sequenz* $0\to\mathbb{Z}_p(n)\to\mathbb{Q}_p(n)\to\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)\to 0$ *von stetigen* $\mathfrak{G}$*-Moduln gehörige lange Cohomologiesequenz*

$$\to H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}_p(n))\to H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Q}_p(n))\to H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))\xrightarrow{\delta} H^{i+1}(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}_p(n))\to$$

ist exakt;

ii) *der Kern des Verbindungshomomorphismus*
$\delta\colon H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \to H^{i+1}(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}_p(n))$ *ist* $\mathrm{Div}\, H^i(\mathfrak{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$, *und sein Bild ist die Torsionsuntergruppe von* $H^{i+1}(\mathfrak{G}, \mathbb{Z}_p(n))$.

Beweis. Siehe [27] §2.

Durch Übergang zum direkten bzw. projektiven Limes erhalten wir nun aus den Dualitätssätzen von Tate-Poitou für endliche Galoismoduln (s. [CG] und [22] oder [8]) folgende auf unsere Zwecke zugeschnittene Sätze.

Satz 4. *Sei* $n\in\mathbb{Z}$ *und* $0\leqq i\leqq 2$; *für jede endliche Primstelle* $\mathfrak{p}$ *von* k *gilt:* $H^i(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$ *und* $H^{2-i}(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p(1-n))$ *sind kanonisch dual zueinander.*

Satz 5. *Für* $n\in\mathbb{Z}$ *gilt:*

i) *Die Kerne der natürlichen Abbildungen*

$$\rho_\Sigma(n)\colon\ H^1(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \to \prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^1(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$$

und

$$\hat\rho_\Sigma(1-n)\colon\ H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n)) \to \prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p(1-n))$$

sind kanonisch dual zueinander;

ii) *es besteht folgende kanonische exakte Sequenz*

$$0 \to H^0(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \to \prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^0(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \xrightarrow{\hat\rho_\Sigma(1-n)^*}$$

$$\to H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n))^* \to H^1(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \xrightarrow{\rho_\Sigma(n)} \prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^1(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$$

$$\to H^1(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n))^* \to H^2(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \to \prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$$

$$\to H^0(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n))^* \to 0.$$

Hervorgehoben sei außerdem folgendes

Lemma 6. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p(1-n))^* & \xrightarrow{\hat\rho_\Sigma(1-n)^*} & H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n))^* & & \\
\downarrow{\scriptstyle \delta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^*} & & \\
\prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^1(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-n))^* & \xrightarrow{\rho_\Sigma(1-n)^*} & H^1(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-n))^* & & \\
\longrightarrow H^1(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) & \xrightarrow{\rho_\Sigma(n)} & \prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^1(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \\
\longrightarrow H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(n)) & \xrightarrow{\hat\rho_\Sigma(n)} & \prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p(n)) & &
\end{array}$$

ist kommutativ mit exakten Zeilen.

Beweis. Die Exaktheit der Zeilen folgt aus den Sätzen 4 und 5. Die Kommutativität des Diagrammes erschließt sich aus den funktoriellen Eigenschaften der Sequenz in Satz 5ii). q.e.d.

Schließlich fügen wir hier noch zwei Lemmata an, die wir später benötigen werden.

Lemma 7. *Für* $n\in\mathbb{Z}$ *und* $j\geqq 0$ *gilt:*

i) *Die natürliche Abbildung* $H^2(G_k, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n)) \to \prod_{\mathfrak{p}} H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n))$ *ist injektiv;*

ii) *die natürliche Abbildung* $H^1(G_k, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n)) \to \prod_{\mathfrak{p}\in P} H^1(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n))$ *ist surjektiv für jede endliche Primstellenmenge* P *von* k.

Beweis. Dies ergibt sich leicht mit Hilfe von [17] Satz 4.5 und Corollar 6.4. q.e.d.

Lemma 8. *Sei* A *ein diskreter* G*-Modul; dann ist*

$$H^1(G, A\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = 0 \quad \text{für alle } 0\neq n\in\mathbb{Z}.$$

Beweis. Siehe [26], wo die Behauptung für den Fall $n=1$ bewiesen ist; der allgemeine Fall erledigt sich völlig analog. q.e.d.

§3. Die lokalen Cohomologiegruppen $\mathsf{H}^{i,n}_\mathfrak{p}$

Sei $\mathfrak{p}$ eine endliche Primstelle von k; sei $n\in\mathbb{Z}$ und $i\geqq 0$. Wir beginnen nun die Untersuchung damit, daß wir in diesem Paragraphen die Struktur der lokalen Cohomologiegruppen

$$\mathsf{H}^{i,n}_\mathfrak{p} := H^i(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))\ ^1$$

als abelsche Torsionsgruppen aufklären.

Zunächst gilt $\mathsf{H}^{i,n}_\mathfrak{p} = 0$ für $i>2$ aufgrund von (1.5). Weiterhin ist sofort klar, daß $\mathsf{H}^{0,0}_\mathfrak{p} \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ und $\mathsf{H}^{0,n}_\mathfrak{p}$ für $n\neq 0$ endlich zyklisch ist. Wir setzen:

$$w_0(k_\mathfrak{p}) := 1, \qquad w_n(k_\mathfrak{p}) := \#\,\mathsf{H}^{0,n}_\mathfrak{p} \quad \text{für } n\neq 0.$$

Bemerkung 1. Für $n\neq 0$ *ist* $w_n(k_\mathfrak{p}) = \max\{p^j\colon [k_\mathfrak{p}(\mu_{p^j})\colon k_\mathfrak{p}] \mid n\}$; *insbesondere ist* $w_{-n}(k_\mathfrak{p}) = w_n(k_\mathfrak{p})$.

Beweis. Sei $n\neq 0$; dann ist $\mathsf{H}^{0,n}_\mathfrak{p} = \{\zeta\in\mu_{p^\infty}\colon \zeta^{\kappa(\sigma)^n} = \zeta \text{ für } \sigma\in G_{k_\mathfrak{p}}\} = \{\zeta\in\mu_{p^\infty}\colon \sigma^n\zeta = \zeta \text{ für } \sigma\in G_{k_\mathfrak{p}}\} = \{\zeta\in\mu_{p^\infty}\colon \sigma^n\zeta = \zeta \text{ für } \sigma\in \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}(\mu_{p^\infty})/k_\mathfrak{p})\} = \{\zeta\in\mu_{p^\infty}\colon [k_\mathfrak{p}(\zeta)\colon k_\mathfrak{p}] \mid n\}$. q.e.d.

Als nächstes betrachten wir den Fall $i=2$.

Satz 2. i) $\mathsf{H}^{2,1}_\mathfrak{p} = Br(k_\mathfrak{p})(p) \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$;

ii) $\mathsf{H}^{2,n}_\mathfrak{p} = 0$ *für* $n\neq 1$.

Beweis. i) Dies ist ein wohlbekanntes Ergebnis der lokalen Klassenkörpertheorie.

[1] In späteren Paragraphen werden wir diese Bezeichnungsweise auch für die unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von k verwenden. Wegen $p\neq 2$ ist in diesem Falle jedoch $\mathsf{H}^{i,n}_\mathfrak{p} = 0$ für $i>0$

ii) Sei $K_\mathfrak{p} := k_\mathfrak{p}(\mu_{p^\infty})$; wir betrachten die Spektralsequenz

$$E_2^{r,s} = H^r(\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}), H^s(G_{K_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))) \Rightarrow \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{r+s,n}.$$

Nun ist aber die cohomologische p-Dimension von $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p})$ und $G_{K_\mathfrak{p}}$ jeweils $\leqq 1$ (s. [CG] II-11). Folglich ist $E_2^{r,s}=0$ für $r>1$ oder $s>1$; das bedeutet jedoch $E_2^{1,1} = \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{2,n}$. Nach der Kummertheorie ist

$$H^1(G_{K_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = H^1(G_{K_\mathfrak{p}}, \mu_{p^\infty})(n-1) = K_\mathfrak{p}^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n-1).$$

Wir haben also $\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{2,n} = E_2^{1,1} = H^1(\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}), K_\mathfrak{p}^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n-1))$, welch letztere Gruppe nach (2.8) für $n \neq 1$ gleich 0 ist. q.e.d.

Schließlich kommen wir zu dem interessantesten Fall $i=1$.

Lemma 3. $H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p(n)) = \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n}/\mathrm{Div}\,\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n}$ *für* $n \neq 1$.

Beweis. Nach (2.3) besteht die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Div}\,\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n} \to \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n} \to H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p(n)) \to H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p(n)) \to \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{2,n}.$$

Aufgrund von Satz 2ii) ist aber $H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p(n)) = \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{2,n} = 0$ für $n \neq 1$, woraus dann die Behauptung sofort folgt. q.e.d.

Satz 4.

i) $$\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n}/\mathrm{Div}\,\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n} = \begin{cases} \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{0,1-n*} & \text{für } n \neq 1, \\ 0 & \text{für } n = 1; \end{cases}$$

insbesondere ist $\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n}/\mathrm{Div}\,\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n}$ *zyklisch von der Ordnung* $w_{1-n}(k_\mathfrak{p})$;

ii) $$\dim \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n} = \begin{cases} [k_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_p]+1 & \text{für } \mathfrak{p}\mid p \text{ und } n=0,1, \\ [k_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_p] & \text{für } \mathfrak{p}\mid p \text{ und } n\neq 0,1, \\ 1 & \text{für } \mathfrak{p}\nmid p \text{ und } n=0,1, \\ 0 & \text{für } \mathfrak{p}\nmid p \text{ und } n\neq 0,1. \end{cases}$$

Beweis. i) Für $n \neq 1$ folgt dies mit (2.4) aus Lemma 3. Andererseits ist nach der Kummertheorie $\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,1} = k_\mathfrak{p}^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, also insbesondere divisibel.

ii) Aus der exakten Sequenz $0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \xrightarrow{p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \to 0$ erhalten wir die lange exakte Cohomologiesequenz

$$0 \to H^0(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{0,n} \xrightarrow{p} \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{0,n} \to H^1(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n))$$
$$\to \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n} \xrightarrow{p} \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n} \to H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{2,n} \xrightarrow{p} \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{2,n}.$$

Mit Satz 2 ergibt sich daraus

$$\dim \mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,n} = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{i+1} \cdot \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) + \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon = 1$ ist für $n = 0, 1$ und $\varepsilon = 0$ sonst. Unter Beachtung von (2.1) folgt aus dieser Formel die Behauptung. q.e.d.

Damit ist die eingangs gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Für spätere Zwecke beweisen wir noch das folgende

Lemma 5. *Für* $\mathfrak{p}\nmid p$ *ist*

$$H^1_{nr}(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = \begin{cases} \mathrm{Div}\,\mathrm{H}_\mathfrak{p}^{1,0} & \text{für } n=0, \\ 0 & \text{für } n\neq 0. \end{cases}$$

Beweis. Der Fall $n=0$ ergibt sich sofort aus der lokalen Klassenkörpertheorie. Sei also $n \neq 0$. Es bezeichne $K/k_\mathfrak{p}$ die maximale unverzweigte Erweiterung von $k_\mathfrak{p}$. Dann ist $\mathrm{Gal}(K/k_\mathfrak{p})$ pro-zyklisch; sei etwa γ der Frobeniusautomorphismus von $K/k_\mathfrak{p}$ – insbesondere ist $\langle\gamma\rangle = \mathrm{Gal}(K/k_\mathfrak{p})$. Auf $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)$ operiert γ durch $\zeta \to \zeta^{q^n}$ ($\zeta \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)$), wobei q die Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers von $k_\mathfrak{p}$ ist. Nun gilt:

$$H^1_{nr}(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = H^1(\mathrm{Gal}(K/k_\mathfrak{p}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$$
$$= \mathrm{Cokern}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \xrightarrow{\gamma-1} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$$
$$= \mathrm{Cokern}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \xrightarrow{q^n-1} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0.$$

(Für $n \neq 0$ läßt sich die Behauptung auch leicht mit Hilfe von (2.8) erschließen.) q.e.d.

§4. Die globalen Cohomologiegruppen $\mathrm{H}^{i,n}$ und $\mathrm{H}_\Sigma^{i,n}$

Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $i \geqq 0$. Wir stehen nun vor der naturgemäß wesentlich schwierigeren Aufgabe, die Struktur der globalen Cohomologiegruppen

$$\mathrm{H}^{i,n} := H^i(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_\Sigma^{i,n} := H^i(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$$

als abelsche Torsionsgruppen zu bestimmen.

Aufgrund von (1.5) ist zunächst $\mathrm{H}^{i,n} = \mathrm{H}_\Sigma^{i,n} = 0$ für $i > 2$. Weiterhin ist $\mathrm{H}^{0,0} = \mathrm{H}_\Sigma^{0,0} \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ und $\mathrm{H}^{0,n} = \mathrm{H}_\Sigma^{0,n}$ endlich zyklisch für $n \neq 0$. Wir setzen wieder:

$$w_0(k) := 1, \quad w_n(k) := \#\,\mathrm{H}^{0,n} = \#\,\mathrm{H}_\Sigma^{0,n} \quad \text{für } n \neq 0.$$

Analog wie im lokalen Fall (s. (3.1)) ergibt sich

$$w_n(k) = \max\{p^j : [k(\mu_{p^j}) : k] \mid n\} \quad \text{für } n \neq 0.$$

Satz 1. i) $\mathrm{H}^{2,1} = Br(k)(p)$; *insbesondere ist* $\mathrm{H}^{2,1}$ *divisibel von unendlicher Dimension;*

ii) $\mathrm{H}^{2,n} = 0$ *für* $n \neq 1$.

Beweis. i) $\mathrm{H}^{2,1} = Br(k)(p)$ ergibt sich mit Hilbert 90 aus der zur Kummersequenz von k gehörigen langen exakten Cohomologiesequenz. Die zweite Aussage folgt dann mit dem Satz von Brauer-Hasse-Noether.

ii) Der Beweis hierfür ist völlig analog dem im lokalen Fall (s. (3.2)). q.e.d.

Lemma 2. i) $H^{2,n}_\Sigma$ *ist divisibel von endlicher Dimension;*
ii) $H^{2,1}_\Sigma = \mathrm{Kern}(Br(k)(p) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\nmid p} Br(k_\mathfrak{p}))$ *und* $\dim H^{2,1}_\Sigma = \#\{\mathfrak{p}|p\} - 1$.

Beweis. i) Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \xrightarrow{p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \to 0$$

erhalten wir mit (1.5) die exakte Cohomologiesequenz

$$H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) \to H^{2,n}_\Sigma \xrightarrow{p} H^{2,n}_\Sigma \to 0.$$

An dieser Sequenz lesen wir zum einen die Divisibilität von $H^{2,n}_\Sigma$ ab und zum anderen die Ungleichung $\dim H^{2,n}_\Sigma \leqq \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n))$. Nach (2.2) ist letzteres aber endlich.

ii) Dies folgt aus (1.4) und dem Satz von Brauer-Hasse-Noether. q.e.d.

Für das Folgende setzen wir

$$i_n(k) := \dim H^{2,n}_\Sigma.$$

Es wird sich zeigen, daß die Frage, ob diese Zahlen gleich 0 sind für $n \neq 1$, von fundamentaler Bedeutung ist. Wir kommen nun zur Betrachtung des Falles $i = 1$. Dazu vereinbaren wir folgende Notation: Ist $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von k und $\chi \in H^{1,n}$, so bezeichne $\chi_\mathfrak{p}$ die Restriktion von χ auf $G_{k_\mathfrak{p}}$. Weiterhin fassen wir $H^{1,n}_\Sigma$ über die Inflationsabbildung als Untergruppe von $H^{1,n}$ auf. Läßt sich diese Untergruppe durch lokale Eigenschaften charakterisieren?

Lemma 3. i) $H^{1,0}_\Sigma = \{\chi \in H^{1,0}: \chi_\mathfrak{p}$ *unverzweigt für* $\mathfrak{p}\nmid p\}$,
ii) $H^{1,n}_\Sigma = \{\chi \in H^{1,n}: \chi_\mathfrak{p} = 0$ *für* $\mathfrak{p}\nmid p\}$ *für* $n \neq 0$.

Beweis. i) Definiert der Charakter $\chi \in H^{1,0} = \mathrm{Hom}(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ die Körpererweiterung K/k, so ist $\chi \in H^{1,0}_\Sigma = \mathrm{Hom}(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ genau dann, wenn alle $\mathfrak{p} \notin \Sigma$ in K/k unverzweigt sind, d.h. wenn $\chi_\mathfrak{p} \in H^{1,0}_\mathfrak{p} = \mathrm{Hom}(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ unverzweigt ist für $\mathfrak{p} \notin \Sigma$. Für die unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von k ist aber stets $\chi_\mathfrak{p} = 0$ wegen $p \neq 2$.

ii) Nach (3.5) haben wir für $n \neq 0$ das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & H^{1,n}_\Sigma & \xrightarrow{\inf} & H^{1,n} \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} \\
0 & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p}\nmid p} H^{1,n}_\mathfrak{p} & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}\nmid p} H^1(G_{k_{\Sigma,\mathfrak{P}}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)).
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\xrightarrow{\mathrm{res}} & H^1(G_{k_\Sigma}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \\
 & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} \\
 & \\
 &
\end{array}$$

Die letzte Spalte in diesem Diagramm ist aber injektiv; dies folgt für $n = 0$ aus der Maximalitätseigenschaft von k_Σ und dann wegen $\mu_{p^\infty} \leqq k_\Sigma$ auch sofort für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$. Daraus ergibt sich

$$H^{1,n}_\Sigma = \mathrm{Kern}(H^{1,n} \xrightarrow{\mathrm{res}} \prod_{\mathfrak{p}\nmid p} H^{1,n}_\mathfrak{p}) \quad \text{für } n \neq 0,$$

was nichts anderes als die Behauptung ist. q.e.d.

Auf ähnliche Weise können wir die Untergruppe $\mathrm{div}\, H^{1,n}$ charakterisieren:

Lemma 4. *Für* $n \neq 1$ *ist* $\mathrm{div}\, H^{1,n} \leqq H^{1,n}_\Sigma$ *und zwar*

$$\mathrm{div}\, H^{1,n} = \{\chi \in H^{1,n}_\Sigma: \chi_\mathfrak{p} \in \mathrm{Div}\, H^{1,n}_\mathfrak{p} \text{ für } \mathfrak{p}|p\}.$$

Beweis. Für beliebiges $j \geqq 0$ erhalten wir aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \xrightarrow{p^j} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \to 0$$

das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & H^{1,n}/p^j H^{1,n} & \longrightarrow & H^2(G_k, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n)) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \prod_\mathfrak{p} H^{1,n}_\mathfrak{p}/p^j H^{1,n}_\mathfrak{p} & \longrightarrow & \prod_\mathfrak{p} H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n)).
\end{array}$$

Nach (2.7) ist nun die rechte Spalte injektiv, folglich ist es auch die linke. Das bedeutet

$$\mathrm{div}\, H^{1,n} = \{\chi \in H^{1,n}: \chi_\mathfrak{p} \in \mathrm{div}\, H^{1,n}_\mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p}\}.$$

Aufgrund von (3.4) ist zunächst $\mathrm{div}\, H^{1,n}_\mathfrak{p} = \mathrm{Div}\, H^{1,n}_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$, also $\mathrm{div}\, H^{1,n} = \{\chi \in H^{1,n}: \chi_\mathfrak{p} \in \mathrm{Div}\, H^{1,n}_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}\}$. Für $n = 0$ und $\mathfrak{p}\nmid p$ ist nun nach der lokalen Klassenkörpertheorie $\chi_\mathfrak{p} \in \mathrm{Div}\, H^{1,0}_\mathfrak{p}$ genau dann, wenn $\chi_\mathfrak{p}$ unverzweigt ist. In diesem Falle folgt die Behauptung also mit Lemma 3i). Andererseits ist $\mathrm{Div}\, H^{1,n}_\mathfrak{p} = 0$ für $\mathfrak{p}\nmid p$ und $n \neq 0, 1$ nach (3.4), woraus die Behauptung mit Lemma 3ii) folgt. q.e.d.

Was die Struktur von $H^{1,n}$ anbelangt, so können wir nun folgendes zeigen.

Lemma 5. i) $H^{1,1}$ *ist divisibel von unendlicher Dimension;*
ii) $\dim H^{1,1}_\Sigma = \#\Sigma - 1$ *und* $H^{1,1}_\Sigma/\mathrm{Div}\, H^{1,1}_\Sigma = Cl_\Sigma(k)(p)$;
iii) $\dim H^{1,n} = \dim H^{1,n}_\Sigma$ *ist endlich für* $n \neq 1$;
iv) $\mathrm{div}\, H^{1,n}/\mathrm{Div}\, H^{1,n} \leqq H^{1,n}_\Sigma/\mathrm{Div}\, H^{1,n}_\Sigma$ *sind endlich für* $n \neq 1$.

Beweis. i) Aus der Kummersequenz erhalten wir $H^{1,1} = k^x \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, woraus die Behauptung sofort folgt. ii) Dies folgt aus (1.4) und dem Dirichletschen Einheitensatz.

iii)/iv) Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \xrightarrow{p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \to 0$$

erhalten wir die exakte Cohomologiesequenz

$$H^1(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) \to H^{1,n}_\Sigma \xrightarrow{p} H^{1,n}_\Sigma.$$

Nach (2.2) ist aber $\dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n))$ endlich. Daraus ergibt sich nun sofort die Endlichkeit von $\dim H^{1,n}_\Sigma$ und $H^{1,n}_\Sigma/\mathrm{Div}\, H^{1,n}_\Sigma$. Der Rest der Behauptung folgt dann mit Lemma 4. q.e.d.

Wir setzen nun

$$d_n(k) := \dim \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma$$

und

$$\mathrm{D}_n(k) := \begin{cases} Cl_\Sigma(k)(p) & \text{für } n=1, \\ \operatorname{div} \mathrm{H}^{1,n}/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n} & \text{für } n \neq 1. \end{cases}$$

Im weiteren haben wir uns also mit diesen Größen zu beschäftigen.

Satz 6.

$$d_n(k) = \begin{cases} i_n(k)+r_2(k)+1 & \textit{für } n=0, \\ i_n(k)+r_2(k) & \textit{für } n\neq 0 \textit{ gerade}, \\ i_n(k)+r_2(k)+r_1(k) & \textit{für } n \textit{ ungerade}. \end{cases}$$

Beweis. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \xrightarrow{p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n) \to 0$$

erhalten wir die lange exakte Cohomologiesequenz

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{H}^{0,n}_\Sigma \xrightarrow{p} \mathrm{H}^{0,n}_\Sigma \\ &\to H^1(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma \xrightarrow{p} \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma \\ &\to H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{H}^{2,n}_\Sigma \xrightarrow{p} \mathrm{H}^{2,n}_\Sigma. \end{aligned}$$

Wir lesen ab

$$d_n(k) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{i+1} \cdot \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(G_\Sigma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(n)) + i_n(k) + \varepsilon$$

mit $\varepsilon = 1$ für $n=0$ und $\varepsilon = 0$ sonst. Unter Beachtung von (2.2) folgt nun aus dieser Formel die Behauptung. q.e.d.

Die grundlegende Vermutung des Autors ist, daß $i_n(k)=0$ für alle $n \neq 1$ gilt. Wir werden dies später in Spezialfällen teils beweisen, teils auf bekannte Vermutungen aus der algebraischen Zahlentheorie zurückführen. Als ein erstes, schwaches Indiz mag folgendes Resultat gelten.

Lemma 7. $H^2(H_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = 0$ *für* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach (1.2) ist $H^2(H_\Sigma, \mu_{p^\infty}) \leqq Br(k(\mu_{p^\infty}))(p)$. Nun ist aber die cohomologische p-Dimension von $G_{k(\mu_{p^\infty})}$ gleich 1 (s. [CG] II-11), folglich ist $Br(k(\mu_{p^\infty}))(p) = 0$. Da H_Σ trivial auf μ_{p^∞} operiert, ist also $H^2(H_\Sigma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = H^2(H_\Sigma, \mu_{p^\infty}) = 0$. q.e.d.

Nun wollen wir eine interessante Folgerung aus der obigen Vermutung ziehen.

Satz 8. *Es gelte* $i_n(k)=0$ *für ein* $n \neq 1$; *dann bestehen die exakten Sequenzen*

$$0 \to \mathrm{D}_n(k) \to \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n} \to \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p}/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p} \to \mathrm{H}^{0,1-n*} \to 0$$

und

$$0 \to \mathrm{D}_n(k) \to \mathrm{H}^{1,n}/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n} \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p}/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p} \to \mathrm{H}^{0,1-n*} \to 0.$$

Weiterhin ist $\mathrm{D}_n(k)^* = \operatorname{Kern} \rho_\Sigma(1-n)$ *und*

$$[\mathrm{H}^{1,n}_\Sigma : \operatorname{div} \mathrm{H}^{1,n}] = w_{1-n}(k)^{-1} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|p} w_{1-n}(k_\mathfrak{p}).$$

Beweis. Wegen $i_n(k)=0$ gilt das Analogon von (3.3) im globalen Fall, d.h. es besteht das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma & \xrightarrow{\cong} & H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(n)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\rho}_\Sigma(n)} \\ \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p}/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p} & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\mathfrak{p}|p} H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p(n)) \end{array}$$

mit Isomorphismen in den Zeilen. Nach Lemma 4 ist $\mathrm{D}_n(k)$ gerade der Kern der linken Spalte, also auch $\mathrm{D}_n(k) = \operatorname{Kern} \hat{\rho}_\Sigma(n)$ und somit $\mathrm{D}_n(k)^* = \operatorname{Kern} \rho_\Sigma(1-n)$ aufgrund von (2.5). Weiterhin besteht nach (2.4) und (2.5) die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{H}^{0,1-n}_\Sigma \to \prod_{\mathfrak{p}|p} H^2(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p(n))^* \xrightarrow{\hat{\rho}_\Sigma(n)^*} H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(n))^*;$$

folglich ist $\mathrm{H}^{0,1-n*} = \mathrm{H}^{0,1-n*}_\Sigma = \operatorname{Cokern} \hat{\rho}_\Sigma(n)$. Insgesamt erhalten wir also die exakte Sequenz von endlichen Gruppen

$$(*) \quad 0 \to \mathrm{D}_n(k) \to \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n} \to \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p}/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p} \to \mathrm{H}^{0,1-n*} \to 0.$$

Mit (3.4) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} [\mathrm{H}^{1,n}_\Sigma : \operatorname{div} \mathrm{H}^{1,n}] &= [\mathrm{H}^{1,n}_\Sigma : \operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n}] \cdot \# \mathrm{D}_n(k)^{-1} \\ &= \prod_{\mathfrak{p}|p} w_{1-n}(k_\mathfrak{p}) \cdot w_{1-n}(k)^{-1}. \end{aligned}$$

Sei nun $S \supseteqq \Sigma$ eine beliebige endliche Primstellenmenge von k, die Σ enthält; sei k_S/k die maximale außerhalb von S unverzweigte Erweiterung von k, $G_S := \operatorname{Gal}(k_S/k)$ und $\mathrm{H}^{i,n}_S := H^i(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$. Es besteht dann das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{D}_n(k) & \to & \mathrm{H}^{1,n}_S/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n} & \to & \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p}/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p} & \to & \mathrm{H}^{0,1-n*} \to 0 \\ & & \| & & \uparrow{\scriptstyle \inf} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{VII}} & & \| \\ 0 & \to & \mathrm{D}_n(k) & \to & \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n} & \to & \prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p}/\operatorname{Div} \mathrm{H}^{1,n}_\mathfrak{p} & \to & \mathrm{H}^{0,1-n*} \to 0. \end{array}$$

Die untere Zeile ist dabei gerade die exakte Sequenz (*); die Exaktheit der oberen Zeile folgt völlig analog wie die von (*). Die Kommutativität des linken

bzw. rechten Quadrates ergibt sich aus der Konstruktion der Zeilen, die des mittleren Quadrates erhalten wir aus Lemma 3. Da nun $H^{1,n}=\varinjlim H_S^{1,n}$ ist, wobei der direkte Limes bezüglich der Inflationsabbildungen über alle endlichen $S\supseteq\Sigma$ gebildet wird, liefert der Übergang zum direkten Limes in obigem Diagramm gerade die gewünschte exakte Sequenz

$$0\to D_n(k)\to H^{1,n}/\mathrm{Div}\,H^{1,n}\to\bigoplus_{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{p}}^{1,n}/\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}}^{1,n}\to H^{0,1-n*}\to 0.$$

q.e.d.

Mit Hilfe der zweiten exakten Sequenz in Satz 8 ließe sich leicht die Struktur von $H^{1,n}/\mathrm{div}\,H^{1,n}$ bestimmen, wenn die Voraussetzung $i_n(k)=0$ erfüllt ist. Durch ein etwas anderes Vorgehen können wir dies jedoch auch tun, ohne diese Voraussetzung zu benötigen. Für $n\neq 1$ seien dazu

$$u_j^{(n)}:=\dim_{\mathbb{F}_p}\{\chi\in p^{j-1}H^{1,n}: p\chi=0\}/\{\chi\in p^jH^{1,n}: p\chi=0\}\in\mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$$

($j\geqq 1$) die „endlichen" Ulm-Invarianten von $H^{1,n}$. Der Ulm-Theorie zufolge (s. [10]) ist der Isomorphietyp von $H^{1,n}$ dann eindeutig bestimmt durch die Größen $u_j^{(n)}$ ($j\geqq 1$) und $d_n(k)$ und den Isomorphietyp von $D_n(k)$. Im folgenden wollen wir die $u_j^{(n)}$ berechnen.

Bemerkung 9. Sei $n\neq 0$. Ist $\mathfrak{p}$ eine endliche Primstelle von k, so ist $w_n(k_{\mathfrak{p}})=1$ oder $\geqq w_n(k(\mu_p))$; ist umgekehrt $p^r\geqq w_n(k(\mu_p))$, so existieren unendlich viele endliche Primstellen $\mathfrak{p}$ von k mit $w_n(k_{\mathfrak{p}})=p^r$.

Beweis. Sei zuerst $\mathfrak{p}$ eine endliche Primstelle von k mit $w_n(k_{\mathfrak{p}})\neq 1$. Nach (3.1) gilt dann $[k_{\mathfrak{p}}(\mu_p):k_{\mathfrak{p}}]\mid n$; nun ist aber $[k_{\mathfrak{p}}(\mu_p):k_{\mathfrak{p}}]$ teilerfremd zu p. Folglich haben wir

$$\begin{aligned}w_n(k_{\mathfrak{p}})&=\max\{p^j:[k_{\mathfrak{p}}(\mu_{p^j}):k_{\mathfrak{p}}]\mid n\}=\max\{p^j:[k_{\mathfrak{p}}(\mu_{p^j}):k_{\mathfrak{p}}(\mu_p)]\mid n\}\\&\geqq\max\{p^j:[k(\mu_{p^j}):k(\mu_p)]\mid n\}=w_n(k(\mu_p)).\end{aligned}$$

Sei nun ein $p^r\geqq w_n(k(\mu_p))$ gegeben. Wir betrachten zunächst den Fall $n=1$. Es ist dann $k(\mu_{p^r})\subsetneqq k(\mu_{p^{r+1}})$; nach dem Satz von Bauer existiert folglich eine unendliche Menge P von endlichen Primstellen von k, die in $k(\mu_{p^r})$ voll zerlegt sind, aber nicht in $k(\mu_{p^{r+1}})$. Für $\mathfrak{p}\in P$ ist also $k_{\mathfrak{p}}=k_{\mathfrak{p}}(\mu_{p^r})\subsetneqq k_{\mathfrak{p}}(\mu_{p^{r+1}})$, d.h. $w_1(k_{\mathfrak{p}})=p^r$. Der allgemeine Fall ergibt sich aus folgender Bemerkung: Ist $n=m\cdot p^s$ mit $(m,p)=1$, so ist $w_n(k(\mu_p))=p^s\cdot w_1(k(\mu_p))$ und $w_n(k_{\mathfrak{p}}(\mu_p))=p^s\cdot w_1(k_{\mathfrak{p}}(\mu_p))$ für jede endliche Primstelle $\mathfrak{p}$ von k. Es ist dann nämlich $p^{r-s}\geqq w_1(k(\mu_p))$. Also existieren unendlich viele endliche Primstellen $\mathfrak{p}$ von k mit $w_1(k_{\mathfrak{p}})=p^{r-s}$. Wegen $r-s\geqq 1$ ist für diese Primstellen aber $k_{\mathfrak{p}}=k_{\mathfrak{p}}(\mu_p)$, folglich

$$w_n(k_{\mathfrak{p}})=w_n(k_{\mathfrak{p}}(\mu_p))=p^s\cdot w_1(k_{\mathfrak{p}}(\mu_p))=p^s\cdot w_1(k_{\mathfrak{p}})=p^s\cdot p^{r-s}=p^r.\quad\text{q.e.d.}$$

Lemma 10. *Sei $n\neq 1$ und $\chi\in H^{1,n}$ mit $p\chi=0$; dann ist $\chi\in p^{-1}\cdot w_{1-n}(k(\mu_p))\cdot H^{1,n}$.*

Beweis. Sei $p^s:=p^{-1}\cdot w_{1-n}(k(\mu_p))$. Nach dem Beweis von (4.4) ist die Abbildung $H^{1,n}/p^sH^{1,n}\to\prod_{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{p}}^{1,n}/p^sH_{\mathfrak{p}}^{1,n}$ injektiv. Wir haben also nur zu zeigen, daß $\chi_{\mathfrak{p}}\in p^sH_{\mathfrak{p}}^{1,n}$ gilt für jede endliche Primstelle $\mathfrak{p}$ von k. Dies ist klar, falls $H_{\mathfrak{p}}^{1,n}$ divisibel ist. Sei also

$H_{\mathfrak{p}}^{1,n}$ nicht divisibel; nach (3.4) gilt dann $H_{\mathfrak{p}}^{1,n}\cong\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}}^{1,n}\times V$, wobei V eine zyklische Gruppe der Ordnung $w_{1-n}(k_{\mathfrak{p}})>1$ ist. Aufgrund von Bemerkung 9 ist sogar $\#V\geqq w_{1-n}(k(\mu_p))$. Wegen $p\chi_{\mathfrak{p}}=0$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\chi_{\mathfrak{p}}&\in\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}}^{1,n}\times\{\psi\in V: p\psi=0\}=\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}}^{1,n}\times p^{-1}\cdot\#V\cdot V\\&\subseteqq p^s\cdot\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}}^{1,n}\times p^s\cdot V=p^sH_{\mathfrak{p}}^{1,n}.\quad\text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Satz 11. *Sei $n\neq 1$; dann ist*

$$u_j^{(n)}=\begin{cases}0 & \text{für } p^j<w_{1-n}(k(\mu_p)),\\ \infty & \text{für } p^j\geqq w_{1-n}(k(\mu_p)).\end{cases}$$

Beweis. Für $p^j\leqq p^{-1}\cdot w_{1-n}(k(\mu_p))$ folgt die Behauptung sofort aus Lemma 10. Sei also $p^j\geqq w_{1-n}(k(\mu_p))$. Nach Bemerkung 9 existiert eine unendliche Menge P von endlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von k mit $w_{1-n}(k_{\mathfrak{p}})=p^j$; wegen (3.4) ist insbesondere $p^jH_{\mathfrak{p}}^{1,n}=\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}}^{1,n}$ für $\mathfrak{p}\in P$. Wir konstruieren nun eine Folge $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\ldots\in H^{1,n}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\chi_a\in p^{j-1}H^{1,n}$ und $p\chi_a=0$;
ii) es existiert ein $\mathfrak{p}_a\in P$ mit $\chi_{a,\mathfrak{p}_a}\notin\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}_a}^{1,n}$;
iii) $\chi_{a,\mathfrak{p}_b}=0$ für alle $1\leqq b<a$.

Zuerst wollen wir sehen, wie sich aus der Existenz einer solchen Folge die Behauptung ergibt. Seien dazu $a>b\geqq 1$; wäre $\chi_a-\chi_b\in p^jH^{1,n}$, so wäre einerseits aufgrund von ii) und iii) $\chi_{a,\mathfrak{p}_b}-\chi_{b,\mathfrak{p}_b}=-\chi_{b,\mathfrak{p}_b}\notin\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}_b}^{1,n}$, andererseits aber $\chi_{a,\mathfrak{p}_b}-\chi_{b,\mathfrak{p}_b}\in p^jH_{\mathfrak{p}_b}^{1,n}=\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}_b}^{1,n}$. Dies ist ein Widerspruch; folglich repräsentieren χ_a und χ_b verschiedene Nebenklassen modulo $p^jH^{1,n}$. Zusammen mit i) bedeutet dies $u_j^{(n)}=\infty$.

Nehmen wir jetzt an, wir hätten schon $\chi_1,\ldots,\chi_{a-1}\in H^{1,n}$ mit den Eigenschaften i)–iii) konstruiert. Wir wählen eine Primstelle $\mathfrak{p}_a\in P\setminus\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_{a-1}\}$ und setzen $P(a):=\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_a\}$. Nach (3.4) ist $H_{\mathfrak{p}_a}^{1,n}/\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}_a}^{1,n}$ zyklisch von der Ordnung p^j; es existiert also ein $\psi\in H_{\mathfrak{p}_a}^{1,n}\setminus\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}_a}^{1,n}$ von der Ordnung p^j mit $p^{j-1}\psi\notin\mathrm{Div}\,H_{\mathfrak{p}_a}^{1,n}$. Aus der exakten Sequenz

$$0\to\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n)\to\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)\xrightarrow{p^j}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)\to 0$$

erhalten wir nun das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}H^1(G_k,\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & \{\chi\in H^{1,n}: p^j\chi=0\} & \longrightarrow & 0\\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod_{\mathfrak{p}\in P(a)}H^1(G_{k_{\mathfrak{p}}},\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p}\in P(a)}\{\varphi\in H_{\mathfrak{p}}^{1,n}: p^j\varphi=0\} & \longrightarrow & 0.\end{array}$$

Aufgrund von (2.7) ist die linke Spalte surjektiv, also ist es auch die rechte. Dies bedeutet jedoch, daß ein $\chi\in H^{1,n}$ existiert mit $p^j\chi=0$ und

$$\chi_{\mathfrak{p}}=\begin{cases}\psi & \text{für } \mathfrak{p}=\mathfrak{p}_a,\\ 0 & \text{für } \mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_{a-1}.\end{cases}$$

Sei dann $\chi_a := p^{j-1}\chi$. Offensichtlich ist $\chi_a \in p^{j-1}\mathrm{H}^{1,n}$ und $p\chi_a = 0$, d.h. i) ist erfüllt. Weiterhin ist $\chi_{a,\mathfrak{p}_a} = p^{j-1}\psi \notin \mathrm{Div}\,\mathrm{H}^{1,n}_{\mathfrak{p}_a}$ und $\chi_{a,\mathfrak{p}_b} = p^{j-1}\chi_{\mathfrak{p}_b} = 0$ für $1 \leqq b < a$; somit gilt auch ii) und iii) für χ_a. q.e.d.

Beispiel. $\mathrm{Hom}(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \oplus (\bigoplus_{\mathbb{N}} (\bigoplus_{j \geqq 1} \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}))$; denn: in §5 bzw. §6 werden wir sehen, daß $d_0(\mathbb{Q}) = 1$ bzw. $\mathrm{D}_0(\mathbb{Q}) = 0$ ist; nach Satz 11 ist $u_j^{(0)} = \infty$ für alle $j \geqq 1$ im Falle $k = \mathbb{Q}$; durch diese Größen ist aber gerade die rechts stehende Gruppe gekennzeichnet.

Schließlich wollen wir noch festhalten, daß sich wegen $w_{1-n}(k(\mu_p)) = w_{n-1}(k(\mu_p))$ aus Satz 11 eine (nicht-kanonische) Isomorphie

$$\mathrm{H}^{1,n}/\mathrm{div}\,\mathrm{H}^{1,n} \cong \mathrm{H}^{1,2-n}/\mathrm{div}\,\mathrm{H}^{1,2-n} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

ergibt. Anzumerken bleibt außerdem, daß die Ergebnisse dieses Paragraphen für $n = 0$ teilweise schon in [12] zu finden sind.

§5. Die Kerne der Lokalisierungsabbildungen $\rho(n)$

In diesem Paragraphen wollen wir die Kerne der natürlichen Abbildungen

$$\rho(n)\colon \mathrm{H}^{1,n} \to \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{H}^{1,n}_{\mathfrak{p}}$$

und

$$\rho_\Sigma(n)\colon \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma \to \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{H}^{1,n}_{\mathfrak{p}}$$

betrachten. Es werden sich dabei enge Zusammenhänge mit den Ergebnissen des vorigen Paragraphen herausstellen. Zunächst haben wir das grundlegende

Lemma 1. i) $\rho(0)$ *ist injektiv und* $\mathrm{Kern}\,\rho_\Sigma(0) = \mathrm{Hom}(Cl_\Sigma(k), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$;
ii) $\mathrm{Kern}\,\rho(n) = \mathrm{Kern}\,\rho_\Sigma(n)$ *für* $n \neq 0$.

Beweis. i) Dies folgt aus der globalen Klassenkörpertheorie.
ii) Dies folgt aus (4.3). q.e.d.

Für $n \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\mathrm{R}_n(k) := \mathrm{Kern}\,\rho_\Sigma(n).$$

Es sind dann $\mathrm{R}_n(k)/\mathrm{Div}\,\mathrm{R}_n(k)$ und $\mathrm{R}_n(k)/\mathrm{Div}\,\mathrm{H}^{1,n}_\Sigma \cap \mathrm{R}_n(k)$ endliche Gruppen (s. (4.5)).

Bemerkung 2. $\mathrm{R}_n(k) \leqq \mathrm{div}\,\mathrm{H}^{1,n}$ *für* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Für $n \neq 1$ folgt dies aus (4.4). Andererseits ist $\mathrm{div}\,\mathrm{H}^{1,1} = \mathrm{H}^{1,1}$ nach (4.5). q.e.d.

Lemma 3. *Für* $n \neq 0$ *ist* $\dim \mathrm{R}_n(k) = i_{1-n}(k)$.

Beweis. Aus (2.5) erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{H}^{0,n}_\Sigma \to \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{H}^{0,n}_{\mathfrak{p}} \to H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n))^* \to \mathrm{R}_n(k) \to 0,$$

wobei die ersten beiden Terme wegen $n \neq 0$ endlich sind. Folglich ist

$$\dim \mathrm{R}_n(k) = \mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}_p} H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n)).$$

Andererseits haben wir aufgrund von (2.3) die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{H}^{1,1-n}_\Sigma/\mathrm{Div}\,\mathrm{H}^{1,1-n}_\Sigma \to H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n)) \to H^2(G_\Sigma, \mathbb{Q}_p(1-n)) \to \mathrm{H}^{2,1-n}_\Sigma \to 0,$$

wobei der erste Term wegen (4.5) endlich ist. Dies bedeutet

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}_p} H^2(G_\Sigma, \mathbb{Z}_p(1-n)) = \dim \mathrm{H}^{2,1-n}_\Sigma = i_{1-n}(k). \quad \text{q.e.d.}$$

Corollar 4. *Für* $n \neq 0$ *ist* $\mathrm{R}_n(k)$ *endlich genau dann, wenn* $i_{1-n}(k) = 0$ *ist.*

Satz 5. i) $\mathrm{R}_0(k) = \mathrm{D}_1(k)^*$;
ii) *ist* $n \neq 0$ *und* $i_{1-n}(k) = 0$, *so ist* $\mathrm{R}_n(k) = \mathrm{D}_{1-n}(k)^*$.

Beweis. i) Dies folgt aus Lemma 1 i) und der Definition von $\mathrm{D}_1(k)$.
ii) Dies folgt aus Lemma 1 ii) und (4.8). q.e.d.

Wir sehen, daß auch hier die Kenntnis der Zahlen $i_n(k)$ von großer Bedeutung wäre. Die folgenden Abschätzungen sind ein kleiner Schritt in diese Richtung.

Satz 6. i) $i_0(k) \leqq r_1(k) + r_2(k) - 1$, *also* $d_0(k) \leqq [k:\mathbb{Q}]$;
ii) *für* $n \neq 0, 1$ *ist* $i_{1-n}(k) \leqq d_n(k) \leqq i_{1-n}(k) + [k:\mathbb{Q}]$.

Beweis. i) Zunächst ist $\mathrm{Div}\,\mathrm{R}_1(k) \leqq \mathrm{Div}\,\mathrm{H}^{1,1}_\Sigma \cap \mathrm{R}_1(k)$. Nach (1.4) und der Kummertheorie ist aber

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{H}^{1,1}_\Sigma \cap \mathrm{R}_1(k) = \mathrm{Kern}(E_\Sigma(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \prod_{\mathfrak{p}|p} k_{\mathfrak{p}}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) =: B.$$

Mit Lemma 3 haben wir also $i_0(k) = \dim B$. Bezeichne nun $E(k)$ bzw. $Cl(k)$ die Einheiten- bzw. Idealklassengruppe von k. Weiterhin sei

$$A := \mathrm{Kern}(E(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \prod_{\mathfrak{p}|p} k_{\mathfrak{p}}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Es besteht dann eine exakte Sequenz $0 \to A \to B \xrightarrow{\beta} Cl(k)$, wobei β definiert ist durch $\beta\left(a \otimes \frac{1}{p^j}\right) :=$ Klasse von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^{p^j} = (a)$. Folglich ist $\dim B = \dim A \leqq r_1(k) + r_2(k) - 1$ nach dem Dirichletschen Einheitensatz. Die zweite Behauptung ergibt sich dann mit (4.6).

ii) Aus der exakten Sequenz $0 \to \mathrm{R}_n(k) \to \mathrm{H}^{1,n}_\Sigma \to \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{H}^{1,n}_{\mathfrak{p}}$ lesen wir für $n \neq 0$ wegen Lemma 3 ab:

$$0 \leqq d_n(k) - i_{1-n}(k) \leqq \sum_{\mathfrak{p}|p} \dim \mathrm{H}^{1,n}_{\mathfrak{p}}.$$

Nach (3.4) ist aber $\sum_{\mathfrak{p}|p} \dim \mathrm{H}^{1,n}_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{p}|p} [k_{\mathfrak{p}}:\mathbb{Q}_p] = [k:\mathbb{Q}]$ für $n \neq 0, 1$. q.e.d.

Beispiel. Ist $k = \mathbb{Q}$ oder $k/\mathbb{Q}$ imaginär-quadratisch, so ist $i_0(k) = 0$.

Corollar 7. *Sei k total-reell und $n \neq 0$ gerade; ist dann $i_n(k)=0$, so auch $i_{1-n}(k)=0$.*

Beweis. Ist $i_n(k)=0$, so ist nach (4.6) auch $d_n(k)=0$. Wegen Satz 6ii) ist schließlich $i_{1-n}(k)=0$. q.e.d.

In Satz 5 und Corollar 7 deutet sich eine Beziehung zwischen $R_n(k)$ und $R_{1-n}(k)$ an, welche durch folgenden „Dualitätssatz" aufgedeckt wird.

Satz 8.

$$(R_n(k)/\mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,n} \cap R_n(k))^* = R_{1-n}(k)/\mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,1-n} \cap R_{1-n}(k) \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Es besteht das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,1-n} \cap R_{1-n}(k) & \to & R_{1-n}(k) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Kern}\, \hat{\rho}_\Sigma(1-n) & & \\ & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \\ (\mathrm{Kern}\, \hat{\rho}_\Sigma(n))^* & \xrightarrow{\delta^*} & R_n(k)^* & \to & (\mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,n} \cap R_n(k))^* & \to & 0, \end{array}$$

wobei die Spalten nach (2.5) kanonische Isomorphismen sind. Die Exaktheit der Zeilen folgt aus (2.3), die Kommutativität aus (2.6). Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} (R_n(k)/\mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,n} \cap R_n(k))^* &= \mathrm{Bild}\, \delta^* = \mathrm{Bild}\, \delta \\ &= R_{1-n}(k)/\mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,1-n} \cap R_{1-n}(k). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Corollar 9. *Sei k total-reell und $n \neq 0$ gerade; ist $R_{1-n}(k)$ endlich, so auch $R_n(k)$, und es gilt:*

i) $\mathrm{div}\, H^{1,1-n} = \mathrm{Div}\, H^{1,1-n} + R_{1-n}(k)$;

ii) $\#R_{1-n}(k) = \#R_n(k) \cdot \#(R_{1-n}(k) \cap \mathrm{Div}\, H^{1,1-n})$.

Beweis. Sei $R_{1-n}(k)$ endlich. Aufgrund der Corollare 4 und 7 ist dann $R_n(k)$ endlich und $i_{1-n}(k)=i_n(k)=0$. Nach (4.6) ist weiterhin $\mathrm{Div}\, H^{1,n}=0$. Aus den Sätzen 5 und 8 ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \#D_{1-n}(k) = \#R_n(k) &= [R_{1-n}(k) : \mathrm{Div}\, H^{1,1-n} \cap R_{1-n}(k)] \\ &= [\mathrm{Div}\, H^{1,1-n} + R_{1-n}(k) : \mathrm{Div}\, H^{1,1-n}], \end{aligned}$$

was die Behauptung i) darstellt. Die Behauptung ii) ist eine triviale Folgerung. q.e.d.

Corollar 10. *Sei k total-reell, und seien alle $\mathfrak{p}|p$ total verzeigt in $k(\mu_{p^\infty})/k$; ist $R_1(k)$ endlich, so gilt:*

i) $H_\Sigma^{1,1} = \mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,1} + R_1(k)$;

ii) $\#R_1(k) = \#Cl_\Sigma(k)(p) \cdot \#(R_1(k) \cap \mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,1})$.

Beweis. Nach Corollar 4 und (4.6) ist $d_0(k)=1$, das bedeutet $\mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,0} \leqq H^1(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Aus Verzweigungsgründen ist dann $\mathrm{Div}\, H_\Sigma^{1,0} \cap R_0(k) = 0$. Die weitere Argumentation ist nun genauso wie im Beweis von Corollar 9. q.e.d.

Zum Schluß dieses Abschnittes beweisen wir noch das folgende „Reduktionslemma", das hin und wieder nützlich sein mag.

Lemma 11. *Sei $n \in \mathbb{Z}$ und K/k eine endliche galoissche Erweiterung; ist dann $R_n(K)$ endlich, so ist auch $R_n(k)$ endlich.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. $n \neq 0$ annehmen. Dann folgt die Behauptung aus folgendem kommutativen Diagramm mit exakter linker Spalte

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \downarrow & & \\ H^1(\mathrm{Gal}(K/k), H^0(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))) & & \\ \downarrow \mathrm{inf} & & \\ H^1(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p}} H^1(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \\ \downarrow \mathrm{res} & & \downarrow \\ H^1(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{P}} H^1(G_{K_\mathfrak{P}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \end{array}$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), H^0(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)))$ endlich ist. q.e.d.

§6. Der Iwasawa-Modul Z

Wir wollen in diesem Paragraphen die Theorie der Iwasawa-Moduln heranziehen, um weitere Resultate zu gewinnen. Dazu bezeichne $L/k(\mu_{p^\infty})$ die maximale abelsche p-Erweiterung, in der sämtliche Primstellen von $k(\mu_{p^\infty})$ voll zerlegt sind. Dann ist

$$Z := \mathrm{Gal}(L/k(\mu_{p^\infty}))^*$$

ein p-primärer diskreter G-Modul; dabei ist $\dim Z = \mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Gal}(L/k(\mu_{p^\infty}))$ endlich (siehe [9] Theorem 8). Die Verbindung zum Vorausgegangenen wird hergestellt durch das

Lemma 1. *Für $n \neq 0$ ist $R_n(k) = H^0(G, Z(n))$.*

Beweis. Sei $K := k(\mu_{p^\infty})$. Wir haben das kommutative Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccc} H^1(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p}} H^1(\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{1,n} & \xrightarrow{\rho(n)} & \prod_{\mathfrak{p}} H_\mathfrak{p}^{1,n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(G, H^1(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{P}} H^1(G_{K_\mathfrak{P}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) \\ \downarrow & & \\ H^2(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)). & & \end{array}$$

Da die cohomologische p-Dimension von G gleich 1 ist, ist $H^2(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))=0$ für alle n. Aufgrund von (2.8) ist weiterhin

$$H^1(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))=0 \quad \text{und} \quad H^1(\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))=0$$

für alle $\mathfrak{p}$ und $n\neq 0$. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_n(k)&=\mathrm{Kern}\,\rho(n)=\mathrm{Kern}(H^0(G, H^1(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)))\to\prod_{\mathfrak{P}} H^1(G_{K_{\mathfrak{P}}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)))\\ &=H^0(G, \mathrm{Kern}(H^1(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))\to\prod_{\mathfrak{P}} H^1(G_{K_{\mathfrak{P}}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))))\\ &=H^0(G, \mathrm{Kern}(H^1(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\to\prod_{\mathfrak{P}} H^1(G_{K_{\mathfrak{P}}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))(n))\\ &=H^0(G, \mathsf{Z}(n)) \quad \text{für } n\neq 0. \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Satz 2. *Für $n\neq 1$ ist $i_n(k)\leqq \dim \mathsf{Z}$.*

Beweis. Unter Beachtung von (5.3) ist

$$i_n(k)=\dim \mathsf{R}_{1-n}(k)=\dim H^0(G, \mathsf{Z}(1-n))\leqq \dim \mathsf{Z}(1-n)=\dim \mathsf{Z}$$

für $n\neq 1$. q.e.d.

Für das Folgende benötigen wir zwei allgemeine Tatsachen aus der Theorie der Iwasawa-Moduln. Sei dazu $\Gamma:=\mathrm{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k(\mu_p))\leqq G$ und γ eine topologische Erzeugende von Γ; sei A das Dual eines endlich-erzeugten $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-Torsionsmoduls (z.B. $A=\mathscr{X}$; s. [9] Theorem 8); es bezeichne $F_A(T):=\det(\gamma-1-T;\ A^*\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)$ das charakteristische Polynom des Endomorphismus $\gamma-1$ auf $A^*\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$. Dann gilt:

(I) Ist $H^0(\Gamma, A)=0$, so ist schon $A=0$ (s. [19] Lemma 4).

(II) $H^0(\Gamma, A)$ ist genau dann endlich, wenn $F_A(0)\neq 0$ ist (s. [5] App. Lemma 9).

Ist nun $n\in\mathbb{Z}$, so ist leicht nachzurechnen, daß

$$F_{A(n)}(T)=\kappa(\gamma)^{-n\cdot\dim A}\cdot F_A(\kappa(\gamma)^n\cdot(T+1)-1)$$

gilt. Somit ergibt sich aus (II):

(III) Ist $n\in\mathbb{Z}$, so ist $H^0(\Gamma, A(n))$ endlich genau dann, wenn $F_A(\kappa(\gamma)^n-1)\neq 0$ ist.

Satz 3. *$\mathsf{R}_n(k)$ ist endlich für fast alle $n\in\mathbb{Z}$.*

Beweis. Aufgrund von (5.11) können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\mu_p\leqq k$ gilt; dann ist $G=\Gamma$. Nun besitzt das Polynom $F_{\mathsf{Z}}(T)$ nur endlich viele Nullstellen; außerdem ist $\kappa(\gamma)$ keine Einheitswurzel. Folglich ist $F_{\mathsf{Z}}(\kappa(\gamma)^n-1)\neq 0$ für fast alle $n\in\mathbb{Z}$. Mit (III) ergibt sich daraus, daß $\mathsf{R}_n(k)=H^0(G, \mathsf{Z}(n))=H^0(\Gamma, \mathsf{Z}(n))$ endlich ist für fast alle $n\in\mathbb{Z}$. q.e.d.

Satz 4. *Sei $d:=[k(\mu_p):k]$; ist $\mathsf{R}_m(k)=0$ für ein $m\neq 0$, so ist $\mathsf{R}_n(k)=0$ für alle $n\neq 0$ mit $n\equiv m \bmod d$.*

Beweis. Sei $\Delta:=\mathrm{Gal}(k(\mu_p)/k)$; dann ist $d=\#\Delta$ und $G=\Gamma\times\Delta$. Aus $0=\mathsf{R}_m(k)=H^0(G, \mathsf{Z}(m))=H^0(\Gamma, H^0(\Delta, \mathsf{Z}(m)))$ folgt mit (I) nun $H^0(\Delta, \mathsf{Z}(m))=0$. Wegen $n\equiv m \bmod d$ ist dann auch $H^0(\Delta, \mathsf{Z}(n))=0$, und somit $\mathsf{R}_n(k)=H^0(G, \mathsf{Z}(n))=H^0(\Gamma, H^0(\Delta, \mathsf{Z}(n)))=0$. q.e.d.

Beispiele. i) $\mathsf{R}_n(\mathbb{Q})=0$ für alle $n\equiv -1, 0, 1 \bmod p-1$; denn: für $k=\mathbb{Q}$ ist nach [16] Satz 11.2 einerseits $\mathsf{H}^{1,0}_\Sigma=\mathrm{Div}\,\mathsf{H}^{1,0}$ und andererseits $H^0(\Delta, \mathsf{Z})=0$; aus ersterem folgt $\mathsf{R}_n(\mathbb{Q})=\mathsf{R}_1(\mathbb{Q})=\mathsf{D}_0(\mathbb{Q})=0$ für $n\equiv 1 \bmod p-1$; letzteres besagt $\mathsf{R}_n(\mathbb{Q})=0$ für $n\equiv 0 \bmod p-1$; und schließlich ist $\mathsf{R}_n(\mathbb{Q})=\mathsf{R}_{-1}=0$ für $n\equiv -1 \bmod p-1$, wie wir in §7 sehen werden.

ii) Sei $k=\mathbb{Q}(\mu_p)$ mit regulärem p; dann ist $\mathsf{Z}=0$ und somit $\mathsf{R}_n(k)=0$ für alle $n\in\mathbb{Z}$.

Für den Rest des Paragraphen sei k total-reell. Es bezeichne $\iota\in G$ die komplexe Konjugation. Ist A ein diskreter G-Modul, so sei

$$A^+:=\{a\in A:\iota a=a\} \quad \text{und} \quad A^-:=\{a\in A:\iota a=-a\}.$$

Offensichtlich ist $H^0(G, A)\leqq A^+$.

Satz 5. *Ist k total-reell und Z^+ endlich, so ist $\mathsf{R}_n(k)$ endlich für alle geraden $n\in\mathbb{Z}$.*

Beweis. Da ι die Ordnung 2 hat, ist $\mathsf{Z}(n)^+=\mathsf{Z}^+(n)$ endlich für gerades n. Folglich ist auch $\mathsf{R}_n(k)=H^0(G, \mathsf{Z}(n))\leqq \mathsf{Z}^+(n)$ endlich für gerades $n\neq 0$. Für $n=0$ gilt die Behauptung per definitionem. q.e.d.

Beispiel. Sei k der maximale total-reelle Teilkörper von $\mathbb{Q}(\mu_p)$; sei weiterhin $Cl_\Sigma(k)(p)=0$. Dann ist $\mathsf{Z}^+=0$ und somit $\mathsf{R}_n(k)=0$ für alle geraden $n\in\mathbb{Z}$. Die Vandiver-Vermutung behauptet, daß stets $Cl_\Sigma(k)(p)=0$ gilt. Richtig ist dies jedenfalls für alle $p<125000$ (s. S. Wagstaff, Math. Comput. **32**, 583–591 (1978)). Allgemein ist kein total-reelles k mit unendlichem Z^+ bekannt.

Satz 6. *Sei k total-reell abelsch mit zu p teilerfremdem Grad; dann ist $\mathsf{R}_n(k)$ endlich für alle ungeraden $n<0$ und alle geraden $n\geqq 0$. Ist darüberhinaus Z^+ endlich, so sind $\mathsf{R}_n(k)$ und $\mathsf{R}_n(k(\mu_p))$ endlich für alle $n\leqq 0$.*

Beweis. Für $n=0$ gilt die Behauptung per definitionem; sei also $n\neq 0$. Aufgrund von (5.11) können wir o.B.d.A. annehmen, daß $[k(\mu_p):k]=2$ ist. Nach [7] Corollar 3 ist nun $F_{\mathsf{Z}^-}(\kappa(\gamma)^n-1)\neq 0$ für alle $n<0$ (wegen $p\nmid[k:\mathbb{Q}]$ teilt p^2 nicht den Führer von $k/\mathbb{Q}$). Wegen (III) ist somit $H^0(\Gamma, \mathsf{Z}^-(n))$ endlich für alle $n<0$. Nun ist aber

$$\mathsf{R}_n(k)=H^0(G, \mathsf{Z}(n))=H^0(\Gamma, \mathsf{Z}(n)^+)=\begin{cases}H^0(\Gamma, \mathsf{Z}^+(n)) & \text{für } n\neq 0 \text{ gerade,}\\ H^0(\Gamma, \mathsf{Z}^-(n)) & \text{für } n\neq 0 \text{ ungerade,}\end{cases}$$

und

$$\mathsf{R}_n(k(\mu_p))=H^0(\Gamma, \mathsf{Z}(n))=H^0(\Gamma, \mathsf{Z}^+(n))\oplus H^0(\Gamma, \mathsf{Z}^-(n)),$$

woraus die Behauptung für $n<0$ zu ersehen ist. Nach (5.9) ist schließlich $\mathsf{R}_n(k)$ endlich für gerades $n>0$. q.e.d.

§7. Die Fälle $-1 \leqq n \leqq 1$

$R_0(k) = Cl_\Sigma(k)(p)^*$ ist endlich per definitionem. Wir wollen nun den Fall $n=1$ studieren. Sei $E'(k)$ die Gruppe aller Einheiten e von k mit $e \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}|p$; weiterhin sei $U_\mathfrak{p}^1$ die Einseinheitengruppe in $k_\mathfrak{p}^\times$ für $\mathfrak{p}|p$. Dann ist $\prod_{\mathfrak{p}|p} U_\mathfrak{p}^1$ ein endlich-erzeugter $\mathbb{Z}_p$-Modul.

Es besteht die natürliche Einbettung $E'(k) \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|p} U_\mathfrak{p}^1$; dabei bezeichne $\overline{E'(k)}$ den Abschluß von $E'(k)$ in $\prod_{\mathfrak{p}|p} U_\mathfrak{p}^1$ bezüglich der lokalen Topologie. Offensichtlich ist $\operatorname{Rang}_{\mathbb{Z}_p} \overline{E'(k)} \leqq r_1(k) + r_2(k) - 1$, Die Leopoldt-Vermutung behauptet $\operatorname{Rang}_{\mathbb{Z}_p} \overline{E'(k)} = r_1(k) + r_2(k) - 1$ (s. [9] §2). Sie ist bisher bewiesen für einen über $\mathbb{Q}$ oder einem imaginär-quadratischen Zahlkörper abelschen Körper k (s. [3]).

Lemma 1. $\operatorname{Rang}_{\mathbb{Z}_p} \overline{E'(k)} = r_1(k) + r_2(k) - 1 - i_0(k)$.

Beweis. Siehe (4.6) und [9] §2.

Wir erhalten nun sofort den

Satz 2. *Ist k über $\mathbb{Q}$ oder einem imaginär-quadratischen Zahlkörper abelsch, so ist $R_1(k)$ endlich.*

Beweis. Aufgrund der vorstehenden Ausführungen ist in diesem Falle $i_0(k)=0$. Dies bedeutet nach (5.4) jedoch gerade die Endlichkeit von $R_1(k)$. q.e.d.

Beispiele. (Siehe [18].) Sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$; dann ist

$$\#R_1(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } d = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11 \text{ und } p \neq 2, \\ 1 & \text{für } d = 107, 331 \text{ und } p \neq 2, 3, \\ 3 & \text{für } d = 107, 331 \text{ und } p = 3, \\ 1 & \text{für } d = 347, 443 \text{ und } p \neq 2, 5, \\ 5 & \text{für } d = 347, 443 \text{ und } p = 5. \end{cases}$$

Schließlich wollen wir noch folgendes bemerken. Aufgrund von [CG] I-21 ist $i_0(k)=0$ für alle k genau dann, wenn die strikte cohomologische p-Dimension von G_Σ für alle k höchstens 2 ist. Letzteres wird in [22] behauptet, ist aber noch unbewiesen.

Nun wenden wir uns dem Fall $n=-1$ zu. Hier werden wir zu einer vollständigen Antwort im Sinne der oben geäußerten Vermutung kommen. Dazu ziehen wir Ergebnisse der algebraischen K-Theorie heran. Es sei

$$K_2 k := k^\times \otimes_\mathbb{Z} k^\times / I,$$

wobei I die von den Elementen $a \otimes (1-a)$ erzeugte Untergruppe bezeichnet. Sind $a, b \in k^\times$, so schreiben wir $\{a, b\}$ für das durch $a \otimes b$ repräsentierte Element von $K_2 k$ (nach [14] ist sogar jedes Element von $K_2 k$ von dieser Form). Für jede Stelle $\mathfrak{p}$ von k sei $\mu_\mathfrak{p}$ die Gruppe aller Einheitswurzeln in $k_\mathfrak{p}$ und $m_\mathfrak{p} := \#\mu_\mathfrak{p}$; weiter sei

$$(\ ,\ )_\mathfrak{p} : k_\mathfrak{p}^\times \times k_\mathfrak{p}^\times \to \mu_\mathfrak{p}$$

das $m_\mathfrak{p}$-te Hilbert'sche Normenrestsymbol von $k_\mathfrak{p}$ (s. [20] XIV §2; für komplexes $\mathfrak{p}$ ist $(\ ,\ )_\mathfrak{p} = 1$). Wir erhalten dann den Homomorphsimus

$$\lambda : K_2 k \to \bigoplus_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p}$$
$$\{a, b\} \to ((a, b)_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}.$$

Sei $\Lambda := \operatorname{Kern} \lambda$ (in der Literatur wird Λ oft der „wilde Kern" genannt). Nach Garland [6] ist Λ endlich; folglich ist $K_2 k$ eine Torsionsgruppe. Daraus folgert Tate [27] nun, daß einerseits $\dim H^{1,2} = r_2(k)$ ist, und andererseits eine Isomorphie $H^{1,2}/\operatorname{Div} H^{1,2} \cong K_2 k(p)$ besteht.

Satz 3. *$R_{-1}(k)$ ist endlich, und es gilt: $R_{-1}(k)^* = D_2(k) \cong \Lambda(p)$.*

Beweis. Aufgrund von (4.6) ist $i_2(k)=0$, also $R_{-1}(k)$ endlich nach (5.4) und $R_{-1}(k)^* = D_2(k)$ nach (5.5). Weiterhin wird in [24] S. 208 gezeigt, daß $\Lambda \leqq \operatorname{div} K_2 k$ vom Index $\leqq 2$ ist. Folglich ist $\Lambda(p) = \operatorname{div} K_2 k(p)$ für ungerades p. Aus der obigen Isomorphie ergibt sich schließlich $\Lambda(p) = \operatorname{div} K_2 k(p) \cong \operatorname{div} H^{1,2}/\operatorname{Div} H^{1,2} = D_2(k)$. q.e.d.

Beispiele. (Siehe [25] und [2].) Sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$; dann ist

$$\#\Lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } d = \pm 1, -2, -3, -7, -11, \\ 2 & \text{für } d = 7, 21, \\ 3 & \text{für } d = 29, \\ 5 & \text{für } d = 37, \\ 7 & \text{für } d = 11, \\ 19 & \text{für } d = 19. \end{cases}$$

§8. Die Lichtenbaum-Vermutung

In diesem abschließenden Paragraphen wollen wir die Bedeutung der Kerne $R_n(k)$ für die Lichtenbaum-Vermutung herausstellen. Dazu sei k im folgenden stets total-reell. Bezeichnet X das Spektrum des Ringes der ganzen Zahlen von k, so sei $X_\Sigma := X \setminus \{\mathfrak{p}|p\}$ und j: $\operatorname{Spec}(k) \to X_\Sigma$ die natürliche Inklusion. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)$ eine etale Garbe auf $\operatorname{Spec}(k)$. Die Lichtenbaum-Vermutung besagt nun (s. [CL] Conjecture 3.1)

$$H^2(X_\Sigma, j_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n+1)) = 0$$

und

$$|\zeta_k(-n)|_p = \frac{\#H^0(X_\Sigma, j_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n+1))}{\#H^1(X_\Sigma, j_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n+1))}$$

für ungerades $n>0$, wobei $|\ |_p$ den gewöhnlichen p-adischen Betrag bezeichnet. Nun gilt aber

$$H^i(X_\Sigma, j_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = H_\Sigma^{i,n} \quad \text{für } i \geqq 0 \text{ und } n \in \mathbb{Z}.$$

Ist nämlich $\tilde{X}_\Sigma$ die universelle Überlagerung von X_Σ, so ist $H^j(\tilde{X}_\Sigma, j_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = 0$ für $j>0$, da die cohomologische p-Dimension von k_Σ gleich 1 ist. Die Behauptung ergibt sich somit aus dem Zerfallen der Spektralsequenz

$$H^i(G_\Sigma, H^j(\tilde{X}_\Sigma, j_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))) \Rightarrow H^{i+j}(X_\Sigma, j_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)).$$

Für ungerades $n>0$ folgt aus $\mathrm{H}^{2,n+1}_\Sigma = 0$ wegen (4.6), (4.8) und (5.5) weiterhin

$$\#\,\mathrm{H}^{1,n+1}_\Sigma = w_{-n}(k)^{-1} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|p} w_{-n}(k_\mathfrak{p}) \cdot \#\,\mathrm{R}_{-n}(k).$$

Schließlich ist $w_{-n}(k)=1$ für $2 \nmid n$. Wir erhalten also folgende äquivalente Formulierung der Lichtenbaum-Vermutung:

Vermutung. Für ungerades $n<0$ ist $i_{1-n}(k)=0$, und es gilt:

$$\#\,\mathrm{R}_n(k) = \left| \frac{w_{1-n}(k) \cdot \zeta_k(n)}{\prod_{\mathfrak{p}|p} w_n(k_\mathfrak{p})} \right|_p^{-1}.$$

Bemerkung 1. i) Ist $k|\mathbb{Q}$ abelsch, so ist $w_{1-n}(k) \cdot \zeta_k(n) \cdot (\prod_{\mathfrak{p}|p} w_n(k_\mathfrak{p}))^{-1}$ p-ganz für ungerades $n<0$ (s. [CL] Theorem 4).

ii) Ist p unverzweigt in $k|\mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist $\prod_{\mathfrak{p}|p} w_n(k_\mathfrak{p}) = 1$, insbesondere also $\#\,\mathrm{H}^{1,1-n}_\Sigma = \#\,\mathrm{R}_n(k)$ (falls beide Seiten endlich sind).

Satz 2. *Sei $k|\mathbb{Q}$ abelsch und p unverzweigt in $k|\mathbb{Q}$ mit $p \nmid [k:\mathbb{Q}]$; dann gilt für ungerades $n<0$: Ist $|w_{1-n}(k) \cdot \zeta_k(n)|_p = 1$, so ist $\mathrm{R}_n(k)=0$.*

Beweis. Siehe [CL] Theorem 4.4 und beachte Bemerkung 1 ii).

Corollar 3. *Ist $k|\mathbb{Q}$ abelsch, $n<0$ ungerade und p nicht in einer von k und n abhängigen endlichen Ausnahmemenge, so ist $\mathrm{R}_n(k)=0$.*

Literatur

1. Artin, E., Tate, J.: Class field theory. New York-Amsterdam: Benjamin 1968
2. Birch, B.: K_2 of global fields. In: Institute on Number Theory. Proc. Symp. Pure Math. XX (New York 1969), pp. 87–95. Providence: American Mathematical Society 1971
3. Brumer, A.: On the units of algebraic number fields. Mathematika **14**, 121–124 (1967)
4. Coates, J.: On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory. Ann. of Math. **95**, 99–116 (1972)
5. Coates, J.: p-adic L-functions and Iwasawa's theory. In: Fröhlich, Algebraic Number Fields. Proceedings of a Symposium (Durham 1975), pp. 269–353. New York-London: Academic Press 1977
6. Garland, H.: A finiteness theorem for K_2 of a number field. Ann. of Math. **94**, 534–548 (1971)
7. Greenberg, R.: On p-adic L-functions and cyclotomic fields. Nagoya Math. J. **56**, 61–77 (1974)
8. Haberland, K.: Zu Tate's Dualitätssatz in der Galois-Cohomologie über Zahlkörpern. Dissertation, Berlin 1975
9. Iwasawa, K.: On $\mathbb{Z}_l$-extensions of algebraic number fields. Ann. of Math. **98**, 246–326 (1973)
10. Kaplansky, I.: Infinite Abelian Groups. Ann Arbor: University of Michigan Press 1969
11. Koch, H.: Galoissche Theorie der p-Erweiterungen. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970

12. Kubota, T.: Galois group of the maximal Abelian extension over an algebraic number field. Nagoya Math. J. **12**, 177–189 (1957)
13. Kuz'min, L.V.: The Tate module for algebraic number fields. Izw. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36**, 267–327 (1972) [russ.]; engl. Transl.: Math. USSR-Izv. **6**, 263–321 (1972)
14. Lenstra, H.W.: K_2 of a global field consists of symbols. In: Algebraic K-Theory. Proceedings of a Conference (Evanston 1976), pp. 69–73. Lecture Notes in Mathematics **551**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
15. Miki, H.: On the maximal Abelian l-extension of a finite algebraic number field with given ramification. Nagoya Math. J. **70**, 183–202 (1978)
16. Neukirch, J.: Einbettungsprobleme mit lokaler Vorgabe und freie Produkte lokaler Galoisgruppen. J. Reine Angew. Math. **259**, 1–47 (1973)
17. Neukirch, J.: Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie. Invent. Math. **21**, 59–116 (1973)
18. Onabe, M.: On the Isomorphisms of the Galois Groups of the Maximal Abelian Extensions of Imaginary Quadratic Fields. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **27**, 155-161 (1976)
19. Serre, J.-P.: Classes des corps cyclotomiques. Séminaire Bourbaki 1958, exp. 174
20. Serre, J.-P.: Corps locaux. Paris: Hermann 1962

CG. Serre, J.-P.: Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Mathematics 5. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973

21. Takahashi, T.: On Extensions with Given Ramification. Proc. Japan Acad. **44**, 771–775 (1968)
22. Tate, J.: Duality theorems in Galois cohomology over number fields. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicans (Stockholm 1962), pp. 288–295. Uppsala: Almquist-Wiksells 1963
23. Tate, J.: On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. Séminaire Bourbaki 1965/66, exp. 306. New York-Amsterdam: Benjamin 1966
24. Tate, J.: Symbols in arithmetic. In: Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice 1970) Some 1, pp. 201–211. Paris: Gauthier-Villars 1971
25. Tate, J.: The Milnor ring of a global field. Appendix. In: Algebraic K-Theory II. Proceedings of a Conference (Seattle 1972), pp. 429–446. Lecture Notes in Mathematics **342**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
26. Tate, J.: Letter to Iwasawa. In: Algebraic K-Theory II. Proceedings of a Conference (Seattle 1972), pp. 524–527. Lecture Notes in Mathematics **342**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
27. Tate, J.: Relations between K_2 and Galois Cohomology. Invent. Math. **36**, 257–274 (1976)

CL. Coates, J., Lichtenbaum, S.: On l-adic zeta functions. Ann. of Math. **98**, 498–550 (1973)

Eingegangen am 2. Februar 1979