Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 06**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Freitag, den 26.5.06, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Man untersuche, ob es jeweils eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung F gibt mit

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^7; & F((1,1,1)) = (1,0,1,7,3,2,1) \\
 & & F((1,5,1)) = (0,1,0,1,0,1,1) \\
\text{b)} & F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2; & F((0,1,1)) = (1,1) \\
 & & F((1,0,1)) = (1,1) \\
 & & F((1,1,1)) = (2,3) \\
\text{c)} & F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2; & F((0,1,1)) = (1,0) \\
 & & F((2,1,3)) = (1,1) \\
 & & F((1,1,2)) = (5,6)
\end{array}
$$

Aufgabe 2. a) Zeigen Sie:

$$(0,1,1),(1,1,1),(1,1,0)$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
b) Für die lineare Abbildung $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, erklärt durch

$$
\begin{aligned}
F((0,1,1)) &= (2,1,2)\\
F((1,1,1)) &= (0,1,1)\\
F((1,1,0)) &= (1,2,3)
\end{aligned}
$$

berechne man $F((2,-1,5))$ und $F((1,0,10))$.

Aufgabe 3. $F:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ sei erklärt durch

$$F((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)) = (x_1+x_3-x_5, x_1-x_2, x_1+x_2+x_4)\ .$$

Man bestimme Basen von $F^{-1}(\{0\})$ und $F(\mathbb{R}^5)$.

Aufgabe 4. Es sei $V=C^\infty(X)$ der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen über dem Einheitsintervall $X=[0,1]$.
a) Man zeige: $D:V\to V$ definiert durch $F:f\mapsto f'$ und $I:V\to V$ definiert durch $I:f\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$ sind lineare Abbildungen.
b) Man berechne $D\circ I, I\circ D, \ker(D\circ I), \ker(I\circ D)$.
c) Man zeige: D ist surjektiv, aber nicht injektiv. I ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Aufgabe 5. Es sei $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, erklärt durch $F(e_n)=0, F(e_i)=e_{i+1}$ $(1\le i\le n-1)$. Man berechne

$$F^k = \underbrace{F\circ\cdots\circ F}_{k\text{ mal}} : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \text{ durch Angabe von } F^k(e_i)\ (1\le i\le n)$$

und

$$G_k := (a\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}+F)^k \text{ durch Angabe von } G_k(e_i)\ (1\le i\le n)\ .$$