Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 07**
Dr. J. Schürmann

Üungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Donnerstag , 03.05.07 bis 12.00 im BK 157/158. Blatt 4
Beachten Sie den geänderten Abgabetermin!

Aufgabe 1. Thema: Lineare Differentialgleichungen. Sei die Matrix

$$Y = (y_{(1)}, \dots, y_{(n)}) : I \to M(n \times n, \mathbb{R})$$

ein *Lösungsfundamentalsystem* der homogenen linearen DGL $y' = A(x)y$ (mit $x \in I$ und $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall). Zeigen Sie:

(a) Die *Wronski-Determinante* $W(x) := det\ Y(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$W' = (spur\ A(x)) \cdot W \quad \text{für } x \in I,$$

wobei *spur* $A(x) := a_{11}(x) + \cdots + a_{nn}(x)$ die Spur von A ist.

(b) Entsprechend genügt die Wronski-Determinante W der homogenen linearen DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

für $x \in I$ der Differentialgleichung $W' = -a_{n-1}(x)W$.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie die Behauptung für festes $x_0 \in I$, und zwar zunächst für Z das Lösungsfundamentalsystem zum Anfangswert $Z(x_0) = E_n$ die Einheitsmatrix, indem Sie die folgende Ableitungsregel der Determinante benutzen:

$$(det\ Z)' = \sum_{i=1}^{n} det(z_{(1)}, \dots, z_{(i-1)}, z'_{(i)}, z_{(i+1)}, \dots, z_{(n)}) .$$

Führen Sie den Fall eines beliebigen Y hierauf zurück mittels $Y = Z \cdot C$ für eine konstante invertierbare Matrix $C \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2. *Reduktionsverfahren von d'Alembert.* Sei $y = (y_1, y_2)^t$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = A(x)y$ für $x \in I$, mit $y_1(x) \neq 0$ und $A = (a_{ij}) : I \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

Ist $z : I \to \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung der Differentialgleichung

$$z' = \left(a_{22}(x) - \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \cdot a_{12}(x)\right) z ,$$

so ist

$$\tilde{y} := \phi \cdot y + (0, z)^t \quad \text{mit} \quad \phi := \int \frac{a_{12}}{y_1} \cdot z\, dx$$

eine zweite linear unabhängige Lösung der DGL $y' = A(x)y$.

Aufgabe 3. Man betrachte für $x > 0$ das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem $y' = A(x)y + b(x)$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

(a) $y(x) := (x^2, -x)^t$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL. Bestimmen Sie mittels des Ansatzes aus Aufgabe 2 eine hierzu linear unabhängige Lösung der homogenen DGL.

(b) Bestimmen Sie anschließend mittels *Variation der Konstanten* eine Lösung der inhomogenen DGL. Hinweis: Benutzen Sie die bekannte Formel

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

für die Inversion einer invertierbaren 2×2 -Matrix.

Allgemeine Hinweise: **Beachten Sie die ersten Termine der Tests!**

- Übungszeiten: Mo: 8.00-10.00 im M6 und Do: 12.00-14.00 im M4 (die Anfangszeiten sind ct.).
- Die Aufgaben sind in Zweiergruppen abzugeben.
- Briefkästen: Mo: 8.00-10.00 den Bk. 157, Do. 12.00-14.00 den Bk. 158 .
- Die erste Aufgabe ist mündlich zu bearbeiten, d.h. die entsprechenden Begriffe werden in den Übungen diskutiert. Von den anderen zwei Aufgaben ist genau eine in schriftliche Form abzugeben, wobei deren Auswahl jeder Gruppe selbst überlassen ist. Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet.
- An folgenden Terminen finden zusätzliche Tests in den Übungen statt: 26.04 bzw. 30.04, 21.05 bzw. 24.05, 18.06 bzw. 21.06.
- Klausurtermin: Sa. den 07.07.2007, 15.00-18.00.