Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 07**

Dr. J. Schürmann

Üungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Mittwoch, 16.05.07 bis 18.00 im BK 157/158. Blatt 6

Beachten Sie den geänderten Abgabetermin!

Aufgabe 1. Thema: Skalarprodukt, (Prä-)Hilbertraum, orthogonale Vektoren und Projektion, Lot. Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm $||\cdot||$. Erfüllt diese die *Parallelogrammgleichung*

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2 \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

so wird für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ durch

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}(||v+w||^2 - ||v-w||^2)\,,$$

bzw. für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ durch

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}(||v+w||^2 - ||v-w||^2 + i||iv+w||^2 - i||iv-w||^2)$$

ein Skalarprodukt auf V erklärt mit $||v||^2 = \langle v, v\rangle$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 2. *ℓ^p-Räume.* Für $1 \le p < \infty$ sei $\ell^p(\mathbb{K})$ die Menge aller Zahlenfolgen $x = (x_n)$, mit $x_n \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, für die gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty\,. \quad \text{Zeigen Sie:}$$

(a) Für $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^p(\mathbb{K})$ folgt für $p > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ aus (vgl. Aufgabe 4 von Blatt 9 des letzten Semesters)

$$\sum_{i=0}^{N} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=0}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{N} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

die *Höldersche Ungleichung*

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Folgern Sie daß $\ell^p(\mathbb{K})$ für $1 \le p < \infty$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm

$$||x||_p := \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{ist.}$$

Hinweis: Die Dreiecksungleichung für $p > 1$ ergibt sich wie die *Minkowskische Ungleichung* in der Vorlesung (vgl. Skript).

(b) $\ell^p(\mathbb{K})$ ist *vollständig* bezüglich der Norm $||\cdot||_p$.

Aufgabe 3. *Orthogonalsysteme von Polynomen.* Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}^+$ eine positive stetige Funktion ($-\infty \le a < b \le \infty$) für die alle (evtl. uneigentlichen) Integrale $\int_a^b dt\, f(t) \cdot t^n$ ($n \in \mathbb{N}$) existieren. Zeigen Sie:

(a) Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ aller reellen Polynome wird durch
$$\langle p, q\rangle_f := \int_a^b dt\, f(t) \cdot p(t) \cdot q(t) \quad \text{für } p, q \in \mathbb{R}[x]$$
ein *Skalarprodukt* definiert.

(b) Bis auf einen konstanten Faktor $c_n \neq 0$ gibt es genau ein Polynom n-ten Grades $Q_n \in \mathbb{R}[x]$, welches auf dem von $1, x, \ldots, x^{n-1}$ aufgespannten Unterraum senkrecht steht bzgl. $\langle \cdot, \cdot\rangle_f$. Diese Folge (Q_n) von Polynomen n-ten Grades ist (bis auf Konstanten $c_n \neq 0$) charakterisiert durch die *Orthogonalitäts-Bedingung*:
$$0 = \langle Q_n, Q_m\rangle_f = \int_a^b dt\, f(t) \cdot Q_n(t) \cdot Q_m(t) \quad \text{für } n \neq m.$$

(c) Für $a = 0$, $b = \infty$ und $f(x) = e^{-x}$ erfüllen die *Laguerreschen Polynome*
$$L_n(x) := \frac{1}{n!} e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x})$$
diese Orthogonalitäts-Bedingung.

Zusatz (nicht zu bearbeiten): Für $a = -1$, $b = 1$ und $f(x) = 1$ (bzw. $a = -\infty$, $b = \infty$ und $f(x) = e^{-x^2}$) erfüllen die *Legendreschen (bzw. Hermiteschen) Polynome* diese Orthogonalitäts-Bedingung.

Allgemeine Hinweise:

- Übungszeiten: Mo: 8.00-10.00 im M6 und Do: 12.00-14.00 im M4 (die Anfangszeiten sind ct.).
- Die Aufgaben sind in Zweiergruppen abzugeben.
- Briefkästen: Mo: 8.00-10.00 den Bk. 157, Do. 12.00-14.00 den Bk. 158 .
- Die erste Aufgabe ist mündlich zu bearbeiten, d.h. die entsprechenden Begriffe werden in den Übungen diskutiert. Von den anderen zwei Aufgaben ist genau eine in schriftliche Form abzugeben, wobei deren Auswahl jeder Gruppe selbst überlassen ist. Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet.
- An folgenden Terminen finden zusätzliche Tests in den Übungen statt: 26.04 bzw. 30.04, 21.05 bzw. 24.05, 18.06 bzw. 21.06.
- Klausurtermin: Sa. den 07.07.2007, 15.30-18.00.