**Prof. Dr. R. Wulkenhaar**
**Dr. T. Timmermann** **SS 11**

# Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 03.05.2011, 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 4

---

*Der Abgabetermin für Blatt 3 wurde um eine Woche auf den 26.04. verschoben.*

**Aufgabe 1.** Sei $(X, \mu)$ ein Maßraum. Beweise den folgenden Satz der Vorlesung:

(a) $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ ist ein Vektorraum und $\|f\|_\infty := \inf\{C : |f| \leq C \ \mu\text{-fast-überall}\}$ definiert eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$.

(b) $L^\infty(X, \mu) = \mathcal{L}^\infty(X, \mu)/\mathcal{N}(X, \mu)$ ist bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum. (*Hinweis:* Hierzu braucht man vielleicht, dass eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen $N_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ wieder eine Nullmenge ist).

(c) Für $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ gilt $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$. (*Hinweis:* Nimm die Messbarkeit von $fg$ ohne Beweis an.)

**Aufgabe 2.** Sei $\mu$ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$ und $X_p = L^p([0, 1], \mu)$ für jedes $p \in (1, \infty)$. Ferner seien $r, s, t \in (1, \infty)$ mit $1/r + 1/t = 1$. Zeige:

(a) Für alle $g \in X_t$, $h \in X_s$ gibt es ein $T \in \mathcal{L}(X_r, X_s)$ mit $\|T\| \leq \|h\|_s \|g\|_t$ und

$$(T(f))(x) = \int_{[0,1]} h(x)g(y)f(y)d\mu(y) \quad \text{für alle } f \in X_r, x \in [0, 1].$$

(b) Für jedes $K \in C([0, 1] \times [0, 1])$ gibt es ein $S \in \mathcal{L}(X_r, X_s)$ mit

$$(S(f))(x) = \int_{[0,1]} K(x, y)f(y)d\mu(y) \quad \text{für alle } f \in X_r, x \in [0, 1].$$

(*Hinweis:* Erstens: Die Messbarkeit der durch die obige Gleichung definierten Funktion $S(f)$ darf als gegeben angenommen werden. Zweitens: Benutze die Funktion $x \mapsto (\int_{[0,1]} |K(x, y)|^t d\mu(y))^{1/t}$.)

**Aufgabe 3.** Sei $X$ ein normierter Raum, $\mathrm{Id}_X : X \to X$ die Identität und $S, T : X \to X$ lineare Abbildungen mit $ST - TS = \mathrm{Id}_X$. Zeige:

(a) Für alle $n \geq 1$ gilt $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n + 1)T^n$ (*Hinweis:* Induktion.)

(b) Wenn $\|T^n\| = \|T\|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann kann nicht $S, T \in \mathcal{L}(X)$ gelten. (*Bemerkung:* Leider fehlte in der ursprünglichen Aufgabenstellung die Voraussetzung $\|T^n\| = \|T\|^n$. Die Aussage ist auch ohne diese Voraussetzung richtig, kann aber in der Allgemeinheit erst mit Hilfe der Spektraltheorie bewiesen werden.)

**Aufgabe 4.** Sei $I$ eine endliche Indexmenge, $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie normierter Räume, $X := \prod_{i\in I} X_i$ der Produkt-Vektorraum (mit komponentenweiser Skalarmultiplikation und Addition), und seien für jedes $i = 1, \ldots, n$ die Abbildungen $\iota_i \colon X_i \to X$ und $\pi_i \colon X \to X_i$ die kanonische Einbettung beziehungsweise Projektion.

(a) Definiere eine Norm $\|\cdot\|_\times$ auf $X$ mit folgender universeller Eigenschaft: Für jeden normierten Raum $Y$ und jede Familie von Operatoren $S_i \in \mathcal{L}(Y, X_i)$ $(i \in I)$ existiert genau ein $S \in \mathcal{L}(Y, (X, \|\cdot\|_\times))$ mit $S_i = \pi_i \circ S$ für alle $i \in I$. (*Hinweis:* Denke an das Maximum.)

(b) Definiere eine Norm $\|\cdot\|_+$ auf $X$ mit folgender universelle Eigenschaft: Für jeden normierten Raum $Z$ und jede Familie von Operatoren $T_i \in \mathcal{L}(X_i, Z)$ $(i \in I)$ existiert genau ein $T \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|_+), Z)$ mit $T_i = T \circ \iota_i$ für alle $i \in I$. (*Hinweis:* Denke an die Summe.)

(c) Zeige, dass die Normen $\|\cdot\|_\times$ und $\|\cdot\|_+$ äquivalent sind und $X$ bezüglich dieser Normen genau dann vollständig ist, wenn $X_i$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ vollständig ist.