Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 24.05.2011, 12 Uhr Blatt 7

Eine stetige lineare Abbildung T zwischen normierten Räumen heißt *kontraktiv*, wenn $\|T\| \leq 1$.

Aufgabe 1. Sei X ein normierter Raum, $M \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum, $M^{\perp} := \{\phi \in X' : M \subseteq \ker \phi\}$ und $p\colon X \to X/M$ die Projektion $x \mapsto x + M$. Zeige:

(a) Die Vorschrift $(\Phi(\phi))(x+M) = \phi(x)$ definiert eine eine injektive, kontraktive Abbildung $\Phi\colon M^{\perp} \to (X/M)'$.

(b) Die Abbildung Φ und die Abbildung $p^*\colon (X/M)' \to M^{\perp}$, $\phi \mapsto \phi \circ p$, sind zueinander inverse isometrische Isomorphismen.

(c) Die Vorschrift $\Psi(\phi + M^{\perp}) = \phi|_M$ definiert einen isometrischen Isomorphismus $\Psi\colon X'/M^{\perp} \to M'$. (*Hinweis:* Benutze Hahn-Banach.)

(d) Wenn X reflexiv ist, dann ist auch X/M reflexiv. (*Hinweis:* Benutze Lemma 4.5 der Vorlesung.)

Aufgabe 2. Sei X ein komplexer Vektorraum.

(a) Sind $\phi, \psi\colon X \to \mathbb{C}$ lineare Abbildungen mit $\ker \phi \subseteq \ker \psi$, so gilt $\psi = \lambda\phi$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Seien nun $\phi_1, \ldots, \phi_n\colon X \to \mathbb{C}$ lineare Abbildungen und $\mathcal{T}$ die Initialtopologie bezüglich $\phi_1, \ldots, \phi_n$, also die gröbste Topologie auf X, die $\phi_1, \ldots, \phi_n$ stetig macht. Ferner sei $\psi\colon X \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung, die bezüglich $\mathcal{T}$ stetig ist. Zeige:

(b) Es gibt ein $C > 0$ mit $|\psi(x)| \leq C \max_{1\leq k\leq n} |\phi_k(x)|$ für alle $x \in X$.
(*Hinweis:* Betrachte Mengen der Form $U_\epsilon := \bigcap_{k=1}^{n} \phi_k^{-1}((-\epsilon, \epsilon))$ mit $\epsilon > 0$.)

(c) $\bigcap_{k=1}^{n} \ker \phi_k \subseteq \ker \psi$.

(d) Ist $\phi\colon X \to \mathbb{C}^n$ definiert durch $x \mapsto (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$, so existiert ein lineare Abbildung $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mit $\psi = f \circ \phi$. Insbesondere gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\psi = \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_n\phi_n$. (*Hinweis:* Betrachte die Abbildung $\phi(x) \mapsto \psi(x)$.)

(*Bemerkung:* Die Folgerung in (d) könnte man auch aus (a) und einer Abwandlung von Aufgabe 1 von Blatt 5 erhalten.)

Aufgabe 3. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in einem normierten Raum X, die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert. Zeige:

(a) $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.

(b) Es gibt eine Folge von Konvexkombinationen der Folgenglieder, die in Norm gegen x konvergiert.

(c) Gib im speziellen Fall $X = \ell^p$ mit $1 < p < \infty$ und $x_n = e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x = 0$ (vergleiche Beispiel 4.10 der Vorlesung) eine Folge von Konvexkombinationen wie in (b) an.

Aufgabe 4. Sei X ein reeller normierter Raum. Für jedes $A \subseteq X$ und $B \subseteq X'$ sind

$$A^\circ := \{\phi \in X' : |\phi(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in A\} \subseteq X',$$
$$^\circ B := \{x \in X : |\phi(x)| \leq 1 \text{ für alle } \phi \in B\} \subseteq X$$

die jeweilige *Polare* von A und *Präpolare* von B. Sei nun $A \subseteq X$ nicht leer. Zeige:

(a) A° ist abgeschlossen, konvex und *balanciert* in dem Sinne, dass $-(A^\circ) = A^\circ$. Insbesondere ist $0 \in A^\circ$.

(b) $A \subseteq {}^\circ(A^\circ)$ und falls $A \subseteq C \subseteq X$, so gilt $C^\circ \subseteq A^\circ$.

(c) $({}^\circ(A^\circ))^\circ = A^\circ$. (*Hinweis:* Verwende ohne separaten Beweis die zu (b) analoge Aussage für Präpolare.)

(d) ${}^\circ(A^\circ)$ ist die kleinste abgeschlossene konvexe balancierte A enthaltende Teilmenge von X. (*Hinweis:* Verwende die zu (a) analoge Aussage für Präpolare sowie Hahn-Banach in der Form von Folgerung 3.19 und zeige mit den dort verwendeten Bezeichnungen $x'/\mu \in A^\circ$ für $\mu := x'(x) + \delta/2$.)

(*Bemerkung:* Aussage (d) ist der *Bipolarensatz*. Dieser gilt analog für komplexe normierte Räume.)