Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

SS 12

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 12.04.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 1

Aufgabe 1. Bestimmen Sie das dritte Taylor-Polynom $(T_3 f)(x;0)$ für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$.

Aufgabe 2. Sei $f(x) = \mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x}$ und $g(x) = 1 - \cos x$ für alle $x > -1/2$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorpolynome $(T_2 f)(x;0)$ und $(T_2 g)(x;0)$.

(b) Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß es keine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ gibt, die $f(0) = f(1) = 0$ erfüllt und jeden ihrer Funktionswerte genau zweimal annimmt.

(*Hinweis:* Zeigen Sie mit Hilfe Zwischenwertsatzes und des Satzes über die Existenz von Maxima, daß so eine Funktion f dann gewisse Werte mindestens dreimal annehmen müßte.)

(*Bemerkung:* Ähnlich zeigt man, daß es keine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden Funktionswert genau zweimal annimmt.)

Aufgabe 4. Ein Ball, der aus einer Anfangshöhe $h > 0$ mit Geschwindigkeit v unter einem Winkel $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ abgeworfen wird, erreicht bei Vernachlässigung der Reibung die Wurfweite

$$L(\alpha) = A\cos\alpha\big(\sin\alpha + \sqrt{H + \sin^2\alpha}\big)\ , \qquad A := \frac{v^2}{g}\ ,\ H := \frac{2gh}{v^2}\ .$$

(a) Begründen Sie, daß es für gegebene Werte $A, H > 0$ zumindest einen Winkel $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gibt, für den die Wurfweite maximal wird.
(*Hinweis:* Die Beantwortung erfordert lediglich Grundeigenschaften stetiger Funktionen und keine Differentialrechnung.)

(b) Sei $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und $\beta = \cos(2\alpha)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, daß dann gilt:

$$\frac{1}{A}L'(\alpha) = \beta + \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{2H + (1-\beta)}}(\beta - H).$$

(c) Zeigen Sie: $L'(\alpha) = 0 \ \Leftrightarrow\ \beta = H/(2+H)$.

(d) Zeigen Sie, daß die maximale Wurfweite $A\sqrt{1+H}$ ist.