Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 12**
Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 17.05.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 6

Wir benutzen die in dem vorigen Blatt eingeführte Beta-Funktion $B(a, b)$.

Aufgabe 1. Sei $0 < a < 1$ und $I(c, d) := \int_c^d \mathrm{d}x \, \frac{x^{a-1}}{1+x}$ für $0 \leq c < d \leq \infty$.

(a) Berechnen Sie das Integral $I(0, 1)$ durch Entwicklung des Integranden in eine Reihe. (*Hinweis:* Benutzen Sie die geometrische Reihe und beachten Sie, wo diese gleichmäßig konvergiert.)

(b) Berechnen Sie das Integral $I(1, \infty)$. (*Hinweis*: Substituieren Sie $x = z^{-1}$.)

(c) Zeigen Sie, dass $B(a, 1-a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right)$.

Aufgabe 2. Sei $b > 0$ und sei $\gamma(a)$ für $a > 0$ definiert durch

$$\gamma(a) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} B(a, b).$$

Zeigen Sie, dass die so definierte Funktion γ die Voraussetzungen des Satzes von Bohr-Mollerup erfüllt, und schlussfolgere die Formel $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a, b)$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung.)

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie durch Kombination von Aufgabe 2 von Blatt 5 und Aufgabe 2 von Blatt 6 sowie Satz 33.4 den *Legendreschen Verdoppelungssatz*

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}_+.$$

(b) Sei $0 < a < 1$. Schlussfolgern Sie aus der Gleichung $\int_0^\infty dx \, \frac{x^{a-1}}{1+x} = \pi / \sin(\pi a)$, die wir voraussetzen, und Blatt 5, Aufgabe 1 den *Eulerschen Ergänzungssatz*

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(a)
$$\int_0^1 dx \, \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p}{n} + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{für alle } p, n \in \mathbb{N},$$

(b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \, (\sin x)^{a-1} (\cos x)^{b-1} = \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}{2\Gamma(\frac{a+b}{2})} \quad \text{für alle } a, b > 0,$$

(c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \, \tan^c x = \frac{\pi}{2 \cos \frac{c\pi}{2}} \quad \text{für alle } c \in (-1, 1).$$

(*Hinweis:* Entdecken Sie durch Substitution die versteckte Beta-Funktion und nutzen Sie alle bisherigen Ergebnisse.)